

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Основана Институтом физики металлов УрО РАН

в 2009 г.

**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ
"Физика конденсированных сред"**

**Г л а в н ы й р е д а к т о р
академик РАН В.В. Устинов**

академик РАН Ю.А. Изюмов
академик РАН В.М. Счастливцев
член-корреспондент РАН Б.Н. Гощицкий
член-корреспондент РАН Е.П. Романов
член-корреспондент РАН В.Е. Щербинин

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МЕТАЛЛОВ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ
ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

2

Т.Г. Рудницкая, Ю.А. Изюмов

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ
И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Екатеринбург
2010

УДК 539.12, 524.8, 530.145

Р 83

*Рекомендовано к изданию ученым советом
Института физики металлов и ИИСО УрО РАН*

Рудницкая Т. Г., Изюмов Ю. А.

Р 83

Элементарные частицы и фундаментальные взаимодействия
/ Т. Г. Рудницкая, Ю. А. Изюмов. – Екатеринбург: УрО РАН,
2010. – 348 с. – (Научно-образовательная серия "Физика конден-
сированных сред"; 2).

ISBN 978-5-7691-2144-9

Книга заполняет пробел между специальными курсами по кван-
товой теории поля и элементарных частиц и научно-популярной
литературой по этим вопросам. В ней на основе аппарата реля-
тивистской квантовой механики в достаточно доходчивой фор-
ме изложены современные представления о структуре материи и
фундаментальных взаимодействиях: электромагнитных, слабых,
сильных и гравитационных.

Книга адресована широкому кругу читателей: студентам стар-
ших курсов университетов, прослушавшим курс теоретической
физики, и всем тем, кто желает ознакомиться с современными
достижениями физики элементарных частиц, включая ее роль в
космологии.

УДК 539.12, 524.8, 530.145

Н а у ч н ы й р е д а к т о р

доктор физико-математических наук И. И. Ляпилин

Р е ц е н з е н т

доктор физико-математических наук А. Б. Борисов

© Институт физики металлов УрО РАН, 2010

© Рудницкая Т. Г., Изюмов Ю. А., 2010

ISBN 978-5-7691-2144-9

*Посвящается 100-летию юбилею
со дня рождения нашего Учителя
академика Сергея Васильевича Вонсовского*

Предисловие

Наша книга рассчитана на читателя – научного работника, аспиранта, студента – не специализирующегося по квантовой теории поля и элементарных частиц, поэтому она не перегружена математикой. В то же время в ней достаточно полно изложена квантовая теория электромагнитного поля и электрон-позитронного поля (теория Дирака) и их взаимодействия, составляющего предмет квантовой электродинамики. Подробно рассмотрены теория возмущений и представление рядов в виде диаграмм Фейнмана, а также идея калибровочной инвариантности, приводящая к представлению электромагнитного поля как калибровочного поля в квантовой электродинамике.

Затем на основе современного языка квантовой электродинамики – диаграммной техники – и понятия калибровочного поля рассматривается физика слабых, электрослабых и сильных взаимодействий. Для каждого вида взаимодействия вводятся соответствующие калибровочные поля и их кванты – переносчики взаимодействия между элементарными частицами – лептонами и кварками. Изложены теоретические концепции, приведшие к открытию векторных бозонов и глюонов – переносчиков слабого и сильного взаимодействия, соответственно. Завершается книга главой о Великом объединении электрослабых и сильных взаимодействий и формулировкой Стандартной модели в физике элементарных частиц.

Изложение теории электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий ведется на основе идеи калибровочной инвариантности и внутренней симметрии взаимодействий. В результате возникает единая теория структуры материи: вводятся истинно элементарные частицы (лептоны и кварки) и промежуточные бозоны, переносящие взаимодействия между ними. Описываются решающие эксперименты по обнаружению и предска-

занию новых частиц и различных процессов между ними, подтверждающие фундаментальные положения теории.

Развитие физики элементарных частиц в последние десятилетия достигло впечатляющих результатов. Из хаоса многочисленных частиц, открытых в 1950-1960 гг., удалось выделить истинно элементарные частицы (кварки и лептоны) и обнаружить частицы, которые осуществляют взаимодействие между ними. Систематика частиц возникает из единых принципов, вытекающих из внутренней симметрии взаимодействий и требования калибровочной инвариантности. Успехи теории элементарных частиц демонстрируют единство теоретической физики. Хотя исследуемые объекты (в данном случае электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия) различны, законы, управляющие миром элементарных частиц, являются общими. Трудно найти другую область физики, где бы так ярко проявлялось единство теоретических идей.

Четвертое из фундаментальных взаимодействий – гравитационное – играет очень малую роль в физике элементарных частиц при доступных нам энергиях. Однако его роль становится чрезвычайно важной, когда энергия достигает огромной величины, реализуемой на ранних этапах развития Вселенной. Последняя глава книги посвящена космологическим проблемам физики элементарных частиц.

Мы полагаем, что материал книги будет интересен широкому кругу читателей. Основы теории элементарных частиц должны быть интересны всем физикам независимо от области их собственных исследований, поскольку они представляют новейшие достижения современной физики микромира. Студенты физических специальностей университета найдут в ней математические основы квантовой теории поля и элементарных частиц. Те читатели, которые не интересуются математическим аппаратом, могут опустить соответствующие разделы и сразу перейти к физическим выводам и их реализации в эксперименте.

Авторы благодарят Е.В. Зенкова за большую помощь в подготовке рукописи книги к печати.

Т.Г. Рудницкая, Ю.А. Изюмов

Глава 1

Классификация элементарных частиц

1.1. Введение

За последние десятилетия физика элементарных частиц достигла огромных успехов в области как эксперимента, так и теории. С помощью гигантских ускорителей открыт новый мир элементарных частиц, подверженных удивительным взаимодействиям и взаимопревращениям. В теории возникли такие шедевры, как квантовая хромодинамика и единая теория электрослабого взаимодействия. Сейчас физика находится на стадии создания единой теории всех фундаментальных взаимодействий.

Благодаря развитию физики элементарных частиц происходит слияние, на первый взгляд, совершенно противоположных разделов современной физики: с одной стороны – физики микромира и с другой – космологии. Свойства Вселенной в целом определяются свойствами элементарных частиц. С одной стороны, Вселенная – единственная ”лаборатория”, в которой сегодня и в обозримом будущем можно экспериментально проверить гипотезы и теории, касающиеся элементарных частиц, так как энергии, достижимые в лабораторных условиях, часто оказываются недостаточными, да и масштабы времени не те.

Таблица 1.1. Характерные пространственные масштабы в физике микромира

Размеры атомов и молекул	Квантово- электро- динамические процессы	Радиус действия ядерных сил. Размеры протонов, нейтронов	Структура протонов и нейтронов
10^{-8}	10^{-9} 10^{-10}	10^{-11} 10^{-12}	10^{-13} 10^{-14} см

С другой стороны, свойства элементарных частиц, оказываются, определяются свойствами Вселенной в целом.

Так же как необходимым элементом общего физического образования является знакомство с основными идеями квантовой механики и теории относительности, так и основные сведения об элементарных частицах и их фундаментальных взаимодействиях должны стать общим достоянием всех естествоиспытателей.

1.2. Масштабы физических величин в физике элементарных частиц

Слова лорда Байрона: *”... В знании нет счастья, а наука – обмен одних незнаний на другие”*, во всяком случае во второй части этого утверждения, как нельзя более подходят к истории развития ядерной физики и физики элементарных частиц. И дело здесь в том, что эти науки изучают явления, происходящие на очень малых расстояниях и при очень больших энергиях, недоступных непосредственному наблюдению.

В табл. 1.1 показана шкала характерных расстояний.

Со шкалой расстояний тесно связана шкала времен. Важнейшим масштабным понятием в ядерной физике является *ха-*

рактерное время, или *время пролета*. Это время, требуемое для пролета одной частицы через другую. Например, размер ядра $R \sim 10^{-13}$ см, а скорость в нем протонов и нейтронов $v \sim 5 \cdot 10^9$ см / с, т.е. $1/30$ скорости света. Отсюда для ядерного времени пролета получаем значение

$$\tau_{\text{ядерн.}} = \frac{R}{v} \sim 10^{-22} \text{ с.}$$

Поэтому для атомного ядра большими являются времена $\tau > \tau_{\text{ядерн.}}$, а малыми $\tau < 10^{-22}$ с.

Элементарные частицы при высоких энергиях движутся со скоростями, весьма близкими к скорости света. Так, при энергии 10^6 эВ (1 МэВ) скорость электрона составляет 94% от скорости света, а при энергии 10^9 эВ (1 ГэВ) она отличается от скорости света лишь на $0.5 \cdot 10^{-6}\%$! Поэтому здесь время пролета

$$\tau \sim 3 \cdot 10^{-24} \text{ с.}$$

Оно и определяет естественный масштаб времени в большинстве процессов физики элементарных частиц.

Каким образом можно измерить столь малые времена ?

Времена до 10^{-9} с измеряются непосредственно радиотехническими методами. Времена до 10^{-16} с удается измерять с использованием формулы специальной теории относительности: $\tau = \tau_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, где τ_0 – время жизни покоящейся частицы, τ – ее время жизни в системе отсчета, относительно которой она движется со скоростью v .

Рассмотрим движение π^0 -мезона, энергия (а значит и скорость) которого известна. Измеряется расстояние ℓ , которое π^0 -мезон проходит от рождения до распада. При этом, чем быстрее движется частица, тем легче измерить наблюдаемое

время жизни τ . Далее по известным τ и v вычисляется τ_0 . Вместе с тем, физикам-ядерщикам приходится иметь дело с "астрономическими" временами – так, нестабильное ядро U_{238} живет в среднем $5 \cdot 10^9$ лет !

Теперь рассмотрим шкалу энергий и масс. Для энергий во всей ядерной физике используется одна внесистемная единица – электрон-вольт (эВ):

$$1 \text{ эВ} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг.}$$

Массы часто измеряют в единицах энергии согласно формуле Эйнштейна:

$$E_0 = m c^2.$$

Приведем характерные массы покоя некоторых частиц:

$$\text{электрон} \sim 9.1 \cdot 10^{-28} \text{ г} (0.5 \text{ МэВ});$$

$$\text{протон} \sim 1.672 \cdot 10^{-24} \text{ г} (938 \text{ МэВ});$$

$$\text{нейтрон} \sim 1.675 \cdot 10^{-24} \text{ г} (939.2 \text{ МэВ});$$

$$\text{тяжелые гипероны} \sim 1.7 \cdot 10^{-23} \text{ г} (9.6 \text{ ГэВ}).$$

1.3. Открытие множества "элементарных" частиц

Существующая в настоящее время теория элементарных частиц начала развиваться после 1957 г., так как к этому году были запущены первые мощные ускорители, приведшие к большому числу новых неожиданных открытий и давшие толчок к развитию теории.

Уже к 1957 г. было известно множество частиц, которые делили на несколько групп (табл. 1.2). Справа вверху у символа частицы обозначен ее электрический заряд в единицах абсолютной величины заряда электрона. Знак $\sim$ (тильда) над

Таблица 1.2. Таблица элементарных частиц и их символов

Название группы	Символы частиц	Спин	Масса покоя
Фотон	γ	1	0
Лептоны	$e^-, \nu_e; e^+, \tilde{\nu}_e;$ $\mu^-, \nu_\mu; \mu^+, \tilde{\nu}_\mu$	1/2	$m_e \simeq 0.5 \text{ МэВ};$ $m_\nu = 0$
Мезоны	$\pi^-, \pi^0, \pi^+;$ $K^-, K^0, \widetilde{K}^0, K^+$	0	$m_\pi \simeq 140 \text{ МэВ};$ $m_K \simeq 500 \text{ МэВ}$
Барионы:			
нуклоны	$N^0, P^+, \widetilde{N}^0, P^-$	1/2	$m_{N^0} \simeq 939 \text{ МэВ};$ $m_P \simeq 938 \text{ МэВ}$
гипероны	$\Lambda^0, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+;$ Ξ^-, Ξ^0 и их антича- стицы	1/2	$m_{\Lambda^0} \simeq 1115 \text{ МэВ};$ $m_\Sigma \simeq 1200 \text{ МэВ};$ $m_\Xi \simeq 1300 \text{ МэВ}$

символом обозначает античастицу к соответствующей частице. Античастица имеет противоположный знак всех зарядов по сравнению с частицей и одинаковые массу и спин. Для нуклонов удобно пользоваться обозначениями N^0, P^+ .

В середине XX в. физики практически ничего не могли сказать относительно того, почему в природе именно столько частиц и они обладают именно такими свойствами. Конечно, 30 элементарных "кирпичиков мироздания" – слишком много, однако какое-то время приходилось мириться с таким положением, поскольку не существовало конструктивной идеи, наводящей порядок в этой епархии. Положение усугубилось, когда вскоре были открыты десятки тяжелых частиц, барионов (в настоящее время их известно около 300), многие из них с очень коротким временем жизни.

Сотни "элементарных кирпичиков" – это уже абсурд. Наступает время пересмотреть отношение к известным "элементарным" частицам, а по существу впервые попытаться понять, что же они собой представляют. И здесь, как нередко бывает в

физике, важную роль сыграла аналогия, подобная ситуации, сложившейся в начале XX в. в атомной физике. Был накоплен колоссальный экспериментальный материал по спектрам излучения и поглощения атомов различных химических элементов. Известно было, что каждый элемент имеет свой спектральный портрет, состоящий из множества присущих только этому элементу линий, однако было совершенно непонятно, почему это так. И только после того, как была создана квантовая механика и рассчитан атом водорода, оказалось возможным объяснить комбинационный принцип Ридберга–Ритца и понять специфику атомных спектров.

Из аналогии следует такой вопрос: а может быть, "новые" элементарные частицы, появляющиеся в результате реакций при высоких энергиях, не новые, а уже известные, "старые", но находятся в каких-то других, не известных ранее состояниях? Если это так, нам приходится немедленно сделать такой вывод: то, что мы называем элементарной частицей, на самом деле является сложной динамической структурой, потому что единая неделимая частица не может быть "сама относительно себя" в разных состояниях. Для этого необходимы как минимум две составные части, которые бы взаимодействовали друг с другом, например, на разных возможных расстояниях и т.д. (как в атоме водорода).

Немедленно появляются еще вопросы: что это за составные части и какое между ними взаимодействие? Попробуем продолжить аналогию с атомом. Известно, что состояние электрона в атоме характеризуется тремя квантовыми числами n , l , m . Эти числа появляются при решении стационарного урав-

нения Шредингера

$$\hat{H} \psi_{nlm} = E_n \psi_{nlm}$$

для атома водорода, из которого следует, что энергия E_n и орбитальный момент являются интегралами движения. Итак, появление квантовых чисел однозначно связано с сохраняющимися величинами, или интегралами движения, а они в свою очередь определяются симметрией взаимодействий в рассматриваемой системе.

Поставим вопрос по-другому: допустим, что мы не знаем, из чего состоит атом водорода и как составные части в нем взаимодействуют, но мы знаем (откуда – не важно), что состояние электрона в атоме характеризуется квантовыми числами n, l, m , которые принимают значения $n = 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots, m = -l, \dots, 0, \dots, +l$. Можем ли мы в принципе узнать структуру атома водорода, основываясь на этих данных? Оказывается, можем. Решение уравнения Шредингера ”с другого конца” приведет нас к центрально-симметричному кулоновскому полю и двум разноименным зарядам.

Теперь вернемся к ”элементарной” частице и попробуем понять, какими квантовыми числами определяется ее состояние. Если нам это удастся, возможно, мы и узнаем, из чего она состоит и как взаимодействуют ее составные части.

Для осуществления этой программы приведем в порядок все, что мы знаем об элементарных частицах и посмотрим, какие их характеристики могут претендовать на роль квантовых чисел.

Таблица 1.3. Типы фундаментальных взаимодействий

Тип взаимодействия	Константа связи	Описание
Сильное взаимодействие	1	Радиус действия $R \sim 10^{-13}$ см. Связывает нуклоны в атомных ядрах.
Электромагнитное взаимодействие	$\frac{1}{137}$	Потенциал $\sim \frac{1}{r}$, поэтому конечного радиуса действия нет. Связывает электронные оболочки с ядрами; атомы в молекулах и во всех конденсированных телах.
Слабое взаимодействие	10^{-14}	Радиус действия $R \sim 10^{-15} - 10^{-16}$ см. Ничего не связывает, вызывает только распады (например, β -распад).
Гравитационное взаимодействие	10^{-39}	Играет заметную роль лишь в макроскопических процессах, в которых участвуют большие массы. Связывает космические объекты (Солнечная система, звезды в галактиках и др.).

1.4. Типы взаимодействий и времена реакций

В настоящее время все известные в природе процессы можно объяснить с помощью всего четырех разных типов взаимодействий. Введем безразмерный параметр, характеризующий силу взаимодействия в относительной шкале, и расположим эти взаимодействия в порядке "убывания" (табл. 1.3). Различные группы частиц по-разному участвуют в этих взаимодействиях: фотон – только в электромагнитном, лептоны – в электромагнитном и слабом, барионы – во всех. В гравитационном взаимодействии участвуют все частицы, однако этим взаимодействием в электромагнитных процессах пренебрегают вследствие чрезвычайной малости масс покоя.

С современной точки зрения (развивается в квантовой элек-

тродинатике), взаимодействие представляет собой следующий процесс. Два электрических заряда, находящиеся на некотором расстоянии друг от друга, испускают виртуальные фотоны. Виртуальная частица, родившись, обладает действием, меньшим постоянной Планка. Для нее соотношение неопределенности имеет другой знак:

$$\Delta E \tau \leq \hbar.$$

Здесь ΔE – собственная энергия частицы, τ – время ее жизни. Поскольку такая частица не может ”заявить” о своем существовании (минимальное действие, которое мы можем ”воспринять”, – это $\hbar$), то мы ее не замечаем. Но за время своей жизни частица может долететь до другой и ею поглотиться, отдав свой импульс и энергию. Так, электрические заряды ”перебрасываются”, как мячиками, виртуальными фотонами. Поскольку масса покоя фотона равна нулю, то, двигаясь со скоростью света, виртуальный фотон может пролететь очень далеко, следовательно, конечный радиус действия для электромагнитного взаимодействия отсутствует.

Аналогично тяжелые частицы, – нуклоны, гипероны, – взаимодействующие посредством сильного взаимодействия, обмениваются виртуальными мезонами. Каждый нуклон окружен облаком виртуальных мезонов, рождающихся и исчезающих наподобие молекул пара над поверхностью жидкости, – так называемая ”мезонная шуба”. ”Голых” нуклонов в природе не существует. При массе мезона $M_\pi c^2 \sim 103.5$ МэВ из соотношения $\Delta E \tau < \hbar$ оцениваем время жизни виртуального мезона:

$$\tau < \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{M_\pi c^2}.$$

Если мезон движется со скоростью $v = 10^8$ м / с. ($1/3$ скорости света), то он улетит на расстояние

$$R = v \cdot \tau \sim 10^{-13} \text{ см.}$$

Итак, мы объяснили, почему радиус действия ядерных сил $R \simeq 10^{-13}$ см.

Теперь на основании сказанного делаем вывод о том, что частицы разных групп играют разную роль в природе: частицы с полуцелым спином – это частицы вещества (лептоны и барионы), а с нулевым или целым спином осуществляют взаимодействие между частицами вещества, являясь квантами соответствующих полей.

Выясним, какое время отводится двум нуклонам на взаимодействие, если они движутся друг относительно друга со скоростью $v \sim 10^8$ м / с. ? Линейные размеры нуклона $d \sim 10^{-13}$ см. Следовательно, они могут взаимодействовать, пока летят друг мимо друга на расстояниях порядка своих размеров. Отсюда время взаимодействия: $\tau = \frac{d}{v} \sim 10^{-23}$ с. Это и есть время реакции на сильное взаимодействие. Итак,

$$\tau_{\text{сильное}} \sim 10^{-23} \text{ с.}$$

Для слабого взаимодействия времени требуется на столько порядков больше, на сколько оно слабее, т.е. на 14 порядков. Отсюда

$$\tau_{\text{слабое}} \sim 10^{-8} - 10^{-10} \text{ с.}$$

Электромагнитное и гравитационное взаимодействия не имеют конечного радиуса действия и говорить о времени реакции на них, по-видимому, смысла нет.

Теперь рассмотрим, какие характеристики элементарных частиц могут претендовать на положение квантовых чисел (основной критерий обоснованности такой "претензии" – наличие соответствующего закона сохранения). Итак, попробуем перечислить эти характеристики.

1.5. Квантовые числа

Перечислим квантовые числа, которыми должны характеризоваться частицы.

Спин I . Для всех лептонов и барионов $I = 1/2$ (возможен $I = 3/2$). Для фотона и π -мезонов $I = 1$ и 0 , соответственно. Квантовое число I характеризует длину вектора собственного механического момента частицы:

$$|\vec{I}| = \hbar \sqrt{I(I+1)}.$$

Ориентация этого вектора относительно выделенного направления (например магнитного поля) определяется магнитным квантовым числом m_I , принимающим значения: $m_I = -I, -I+1, \dots, +I$ – всего $2I+1$ возможностей. В отсутствие магнитного поля энергии всех состояний с различными m_I совпадают и нет возможности в принципе различить эти состояния, понять, какую же проекцию имеет спин.

Изотопический спин T . Если мы могли бы в природе "выключить" электромагнитное взаимодействие, то оказались бы не в состоянии отличить нейтрон от протона. Действительно, без электромагнитного взаимодействия невозможно понять, есть у частицы электрический заряд или нет, а неболь-

шая разность масс P^+ и N^0 (0.14%) объясняется тем, что протон – заряженный ”шарик” – имеет меньшую собственную энергию за счет электростатического отталкивания, чем ”шарик” нейтральный. При ”выключенном” электромагнитном взаимодействии их энергии должны совпадать. Такую ситуацию формально можно описать так. Введем некоторое гипотетическое пространство, в котором рассматривается вектор $\vec{T}$, называемый *изотопическим спином*. Его модуль равен $|\vec{T}| = \sqrt{T(T+1)}$. Ориентация этого вектора по отношению к оси z также определяется некоторым квантовым числом T_z : $T_z = -T, \dots, +T$ (всего $2T+1$ значений); T – квантовое число, характеризующее изотопический спин, формально принимает те же значения, что и I . При этом формально имеют место все соотношения, приведенные в предыдущем пункте для обычного спина. Только теперь состояния с различным T_z будем отождествлять с разными зарядовыми состояниями частиц. Далее можно рассуждать так. Есть одна частица – нуклон (N), которая может находиться в двух различных состояниях: в одном электрический заряд равен нулю, в другом отличен от нуля. Если бы не было электромагнитного взаимодействия, энергии этих состояний совпадали бы (вырождение по зарядовым состояниям).

Если отождествить эти зарядовые состояния с разными проекциями изотопического спина, то нуклону приходится приписать $T = 1/2$. При этом ”проекция” $T_z = +\frac{1}{2}$ отвечает протонному состоянию нуклона, а $T_z = -\frac{1}{2}$ – нейтронному. (Разумеется, можно и наоборот, но раз условились, впредь надо придерживаться этого правила.) Аналогично распределяем по

изотопическим мультиплетам остальные группы: $T(\Lambda) = 0$; $T(\Sigma) = 1$ ($T_z(\Sigma^\pm) = \pm 1$, $T_z(\Sigma^0) = 0$); $T(\Xi) = 1/2$ ($T_z(\Xi^0) = 1/2$, $T_z(\Xi^-) = -1/2$).

Электрический заряд Q . Измеряется в единицах абсолютного заряда электрона: $Q_e = -1$, $Q_p = +1$ и т.д.

Гиперзаряд Y . Равен удвоенному среднему электрическому заряду изотопического мультиплета: $Y = 2\bar{Q}$. Для нуклона $Y = 2 \times \frac{1}{2}(Q_N + Q_p) = 2 \times \frac{1}{2}(0 + 1) = +1$. Аналогично $Y_\Lambda = 0$, $Y_\Sigma = 0$, $Y_\Xi = -1$.

Лептонный заряд Q_L . Все лептоны имеют $Q_L = +1$ (антилептоны — $Q_L = -1$), для всех остальных частиц $Q_L = 0$.

Барионный заряд B . Для всех барионов $B = 1$, для антибарионов $B = -1$, для всех остальных частиц $B = 0$.

Четность P . Четность — чисто квантовомеханическое свойство микросистем, состояние которых задается волновой функцией $\psi(x, y, z)$. Что произойдет с волновой функцией, если произвести инверсию системы координат ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$)? Введем оператор инверсии $\hat{P}$ так, что $\hat{P}\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z)$. Подействовав на данное равенство еще раз оператором $\hat{P}$, получим

$$\hat{P}^2 \psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}).$$

Это есть уравнение на собственные значения оператора $\hat{P}^2$, которые обозначим P^2 . Из него следует, что $P^2 = 1$, откуда $P = +1$ или $P = -1$. Как видим, для волновой функции имеются две возможности при инверсии системы координат —

остаться прежней или изменить знак:

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}), \quad (P = +1),$$

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r}), \quad (P = -1).$$

Системы, которые описываются не меняющей знак волновой функцией, имеют положительную четность, меняющей – отрицательную. Четность является фундаментальной характеристикой состояния микросистемы.

Странность S. При наблюдении реакций с тяжелыми частицами и мезонами было обнаружено, что некоторые частицы ведут себя ”странно” (с точки зрения представлений о них в 1950 годах). Так, эти частицы не появляются по одиночке; живут дольше, чем можно было бы ожидать; одна и та же частица имеет то положительную четность, то отрицательную; их квантовые числа не удовлетворяют эмпирическому уравнению

$$T_z = Q - \frac{B}{2},$$

которое справедливо для ”обычных” частиц. Так, для протона $T_z = +1/2$, $Q = 1$, $B = 1$, и указанное равенство, очевидно, выполняется. Аналогично и для нейтрона: $T_z = -1/2$, $Q = 0$, $B = 1$. Но для Σ^+ -гиперона $T_z = +1/2$, $Q = +1$, $B = 1$, и $1 \neq 1 - 1/2$. Странными в указанном смысле являются также и Σ^0 , Σ^- , Λ^0 , Ξ^0 , Ξ^- - частицы.

Все эти непонятные свойства решили объединить понятным словом ”странность”, а Гелл-Манн предложил количественную характеристику данного свойства, введя новое квантовое число S – странность – так, чтобы выполнялось приведённое вы-

ше равенство с учетом этого числа:

$$T_z = Q - \frac{B}{2} - \frac{S}{2}.$$

Для "обычных" частиц (например нуклонов), $S = 0$. Для Σ^+ -гиперона необходимо принять $S = -1$. Легко можно видеть, что в этом случае модифицированное соотношение выполняется.

Очарование С. Еще одна внутренняя характеристика частиц. По отношению к данному квантовому числу, которое ещё называют *чарм*¹, частицы могут быть неочарованные, а также единожды или дважды очарованные. Квантовое число C пришлось ввести для объяснения некоторых явлений, связанных со слабым взаимодействием. Подробнее об этом будет сказано в главе о слабых взаимодействиях.

Цвет. Чем абстрактнее выглядит свойство элементарной частицы, тем обыденнее его хочется назвать. "Цвет" элементарной частицы играет основополагающую роль в теории сильных взаимодействий и может принимать три значения: B (blue – синий); R (red – красный); G (green – зеленый). Необходимость введения этого квантового числа будет показана ниже.

Используя вновь введенные квантовые числа, можно теперь восемь барионов разместить в табл. 1.4.

Здесь N обозначает нуклон, понимаемый как "дублет", т.е. состояние, двукратно вырожденное по z -компоненте изотопического спина T (этим двум состояниям отвечают протон и нейтрон). Аналогично, Λ является синглетом, Σ – изотопическим триплетом, Ξ – дублетом.

¹От англ. *charm* – очарование.

Таблица 1.4. Квантовые числа для барионов. Мультиплетность $M = 2T + 1$

Частица	B	Y	M	I	S	T
N	1	1	2	1/2	0	1/2
Λ	1	0	1	1/2	-1	0
Σ	1	0	3	1/2	-1	1
Ξ	1	-1	2	1/2	-2	1/2

1.6. Законы сохранения и симметрия

Квантовые числа выражают четко определенные и не меняющиеся со временем физические характеристики частицы, т.е. ее интегралы движения. Из квантовой механики известно, что наличие сохраняющихся величин тесно связано со свойствами *симметрии* физической системы. Таким образом, прослеживается цепочка:

квантовые числа $\Leftrightarrow$ законы сохранения $\Leftrightarrow$ симметрия системы.

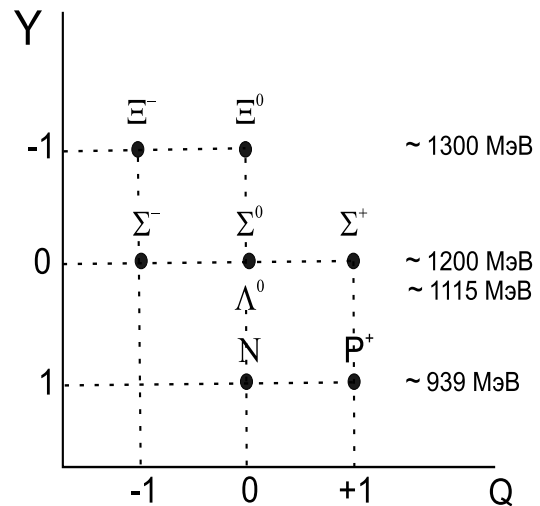
Существуют лишь 4 типа симметрии, связанных с преобразованиями пространственно-временных координат. Напомним эти "геометрические" симметрии и связанные с ними законы сохранения:

1. "Однородность времени" $\Leftrightarrow$ закон сохранения энергии.
2. "Однородность пространства" $\Leftrightarrow$ закон сохранения импульса.
3. "Изотропность пространства" $\Leftrightarrow$ закон сохранения момента импульса.
4. Инвариантность относительно инверсии пространственных координат $\Leftrightarrow$ закон сохранения четности.

Имеется еще несколько квантовых чисел, с которыми тоже связаны законы сохранения, – Барионного заряда, электрического заряда, лептонного заряда, странности, очарования. С какими симметриями связаны они? Такие симметрии называются ”динамическими”. Их природу еще предстоит выяснить. Можно только привести известный пример динамической симметрии – градиентная инвариантность электромагнитного поля ($\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \varphi(\mathbf{r})$) и связанный с ней закон сохранения электрического заряда.

Теперь попробуем использовать введенные выше квантовые числа и провести ”новую” классификацию. Начнем с адронов, т.е. сильно взаимодействующих частиц, расположив их на диаграмме ”электрический заряд – гиперзаряд” (рис. 1.1).

Попытаемся представить все 8 изображенных на диаграмме частиц как различные компоненты некоторого состояния, первоначально вырожденного, но затем расщепленного за счет фундаментальных взаимодействий. Напомним, что чем выше



симметрия системы, тем выше кратность вырождения

квантовых состояний, а ”включение” каких-либо взаимодействий, напротив, приводит к снятию вырождения (частичному или полному). Так, в отсутствие магнитного поля стрелка компаса находится в состоянии безразличного равновесия – все ее

Рис. 1.1. Октет барионов на плоскости гиперзаряд – электрический заряд

ориентации энергетически эквивалентны. Состояния стрелки, отвечающие различным ее ориентациям, вырождены. Но взаимодействие с магнитным полем приводит к тому, что стрелка стремится развернуться строго определенным образом. Энергия стрелки будет теперь разной в зависимости от ее ориентации относительно поля. Другими словами, взаимодействие с полем снимает первоначальное вырождение состояний.

Если мы могли бы выключить электромагнитное взаимодействие, то потеряли бы способность различать протон и нейтрон, $\Sigma^{\pm,0}$ - частицы, Ξ^- - и Ξ^0 - частицы. Это значит, что на приведенной диаграмме частицы, размещенные на одной горизонтали, сбежались бы в одну точку. Но даже и в этом случае они еще различались бы величиной гиперзаряда Y . Эту различимость также можно понимать как результат расщепления исходного 8-кратного состояния на два дублета (N^0, P^+ и Ξ^-, Ξ^0) и квартет ($\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Lambda^0$). С каким взаимодействием связано такое расщепление ?

Гелл-Манн предположил, что в недрах сильного взаимодействия есть некоторое "умеренное", при "выключении" которого частицы перестают различаться по вертикали, т.е. становятся неразличимыми $N^0, \Lambda^0, \Sigma^0, \Xi^0$ и т.д. Теперь сделаем еще шаг: "выключим" и "умеренное", и электромагнитное взаимодействия. Тогда получим единое 8-кратно вырожденное состояние. Если в такие же *супермультиплеты* расположить следующие тяжелые барионы, то получим либо 8-кратное, либо 10-кратное вырождение. Итак, мы получаем спектр, состоящий из уровней кратности 8, 8, 10 и т.д., который, видимо, и характеризует симметрию сильных взаимодействий. Такая

Таблица 1.5. Квантовые числа четырех кварков

Кварк	B	Q	S	C
u	$1/3$	$2/3$	0	0
d	$1/3$	$-1/3$	0	0
s	$1/3$	$2/3$	-1	0
c	$1/3$	$2/3$	0	1

симметрия характеризуется унитарной группой $SU(3)$.

1.7. Кварки

Теперь рассмотрим, из чего должна состоять каждая из частиц? Если она состоит из двух частиц, то низшее (невозбужденное) состояние такой составной системы не может быть 8-кратно вырождено (ведь связанное состояние двух частиц аналогично атому водорода, основное состояние которого невырождено). Подходят три частицы. Но им пришлось приписать совершенно необычные свойства. Поэтому Гелл-Манн и назвал их таинственным словом: *кварки*². Первоначально было введено три кварка: u , d и s (см. табл. 1.5). Последний является носителем "странности". Гелл-Манн предположил, что странность даром не дается: s -кварк тяжелее u - и d -кварков на ~ 146 МэВ. При объединении кварков в какую-либо частицу их квантовые числа складываются, а волновые функции перемножаются. Например, протон представляет собой связанное состояние u и d -кварков. Тройка чисел B , Q , S для него равна 1, 1, 0. Гиперзаряд $Y = 1$.

Переберем все возможные комбинации из этих кварков (Рис.1.2, слева) и сравним их с экспериментально наблюдае-

²Термин предложен Гелл-Манном и заимствован из романа Дж. Джойса "Поминки по Финнегану".

мыми частицами, имеющими спин $I = \frac{3}{2}$ (рис.1.2, справа). Последняя частица (sss) была предсказана теоретически: масса ~ 1676 МэВ, странность $S = -3$, и получила название Ω^- -гиперон. Ее последующее экспериментальное обнаружение было триумфом. Разность масс частиц, странность которых различается на единицу, составляет примерно 146 МэВ.

Гипотеза кварков позволила объяснить еще один казавшийся ранее непонятным факт: наличие магнитного момента у нейтрона. С точки зрения электродинамики, у электрически нейтральной частицы не может быть магнитного момента. Теперь же, считая нейтрон состоящим из трех заряженных частиц, возможно вычислить его магнитный момент и объяснить экспериментально полученное отношение магнитного момента нейтрона к магнитному моменту протона

$$\frac{\mu_{N^0}}{\mu_{P^+}} = -\frac{2}{3}. \quad (1.1)$$

Действительно, протон имеет кварковую конфигурацию uud . Если считать, что магнитный момент кварка связан со спином обычной формулой

$$\mu = \mu_0 Q \mathbf{I}, \quad (1.2)$$

где μ_0 – магнетон Бора, и учитывая, что каждый кварк имеет спин $I = 1/2$, то правильное значение для спина протона (тоже $1/2$) можно будет легко получить при следующих спиновых конфигурациях кварков: $u(\uparrow) u(\uparrow) d(\downarrow)$ и $u(\uparrow) u(\downarrow) d(\uparrow)$. Вероятность первой конфигурации в 2 раза больше, чем второй, поскольку в этом случае имеется два тождественных u -кварка в эквивалентных спиновых состояниях. Таким образом, вероятности обеих конфигураций равны $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно. Аналогичным образом находим, что нейтрон должен быть суперпозицией кварковых конфигураций $d(\uparrow) d(\uparrow) u(\downarrow)$

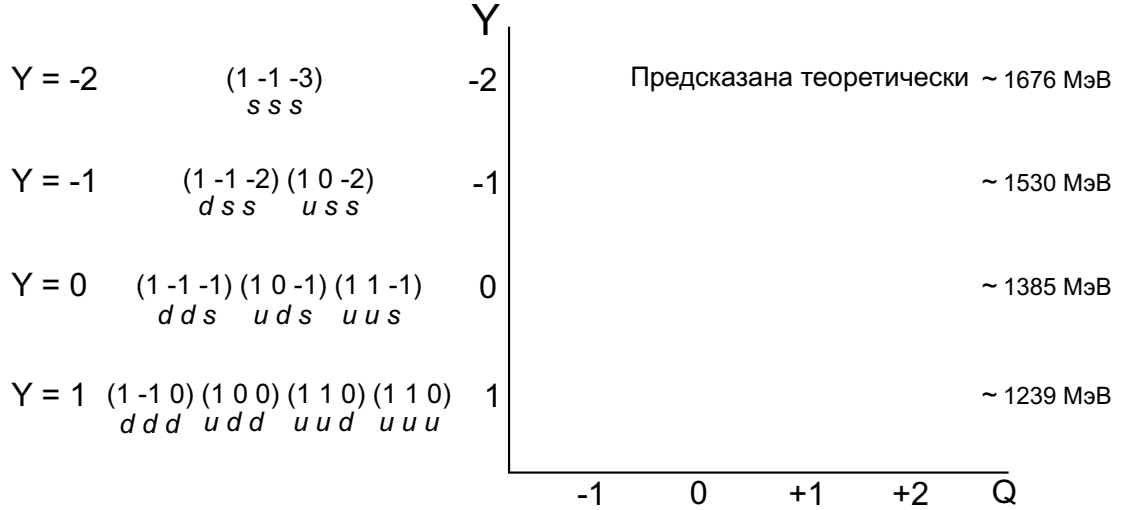


Рис. 1.2. Декуплет барионов на плоскости гиперзаряд–электрический заряд

и $d(\downarrow)$ $d(\uparrow)$ $u(\uparrow)$, также имеющих вероятности $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. Теперь, принимая во внимание заряды кварков (Q), по формуле (1.2) вычисляем значения z -проекции магнитного момента:

$$\mu_{P^+} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{2} (Q_u + Q_u - Q_d) + \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{2} (Q_u - Q_u + Q_d) = \frac{\mu_0}{2}, \quad (1.3)$$

$$\mu_{N^0} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{2} (Q_d + Q_d - Q_u) + \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{2} (Q_d - Q_d + Q_u) = -\frac{2}{3} \frac{\mu_0}{2}, \quad (1.4)$$

откуда сразу следует (1.1).

После таких очевидных успехов в 1960-е годы стали предприниматься попытки обнаружения кварков в свободном состоянии, которые не приводили к желаемым результатам. В пределах точности измерений не был обнаружен дробный заряд; не удалось разбить имеющимися средствами тяжелую частицу на кварки. Возникли идеи, что кварки – это лишь удачная интерпретация наблюдаемых явлений, а на самом деле их нет.

Однако попытки объяснить некоторые факты в слабых взаимодействиях привели к выводу, что должен существовать еще кварк, отличный от старых трех, наделенный новым качеством, названным очарованием, или шармом: s -кварк с кван-

товым числом очарования $C = 1$. В 1973 г. одновременно в трех лабораториях мира был обнаружен мезон, состоящий из c - и $\bar{c}$ -кварков.

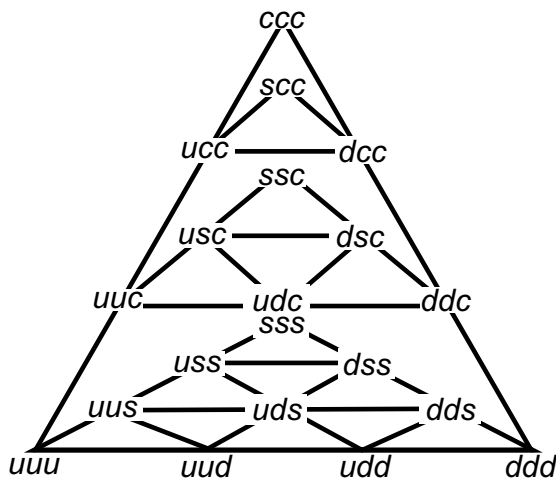


Рис. 1.3. Полный набор тройных комбинаций из четырех кварков: u , d , s , c

Теперь из четырех кварков – u , d , s , c – можно построить тройные комбинации, показанные на рис. 1.3. На каждом уровне приведены комбинации u , d и s -кварков, на втором уровне – комбинации с участием одного c -кварка, на третьем – двух c -кварков, а вершину пирамиды венчает

комбинация из трех c -кварков. Эту пирамиду можно рассматривать, поставив ее на любую из четырех граней, причем в ее вершинах всегда будет комбинация, состоящая из трех одинаковых кварков: uuu , ddd , sss , ccc . Поскольку все кварки имеют спин $1/2$, то в такой тройной комбинации неизбежно будут присутствовать по крайней мере два одинаковых кварка с одной и той же проекцией спина, что запрещено принципом Паули.

Выход из этой ситуации был найден в гипотезе, что кварки должны характеризоваться еще одним квантовым числом, которое было названо "цветом". Каждый кварк может находиться в одном из трех "цветовых" состояний: R (red – красный), G (green – зеленый), B (blue – голубой). Тогда комбинация, например, uuu , должна была бы состоять из трех кварков с разными цветами (другие варианты запрещены принципом

Паули). По аналогии с оптикой такую комбинацию следовало бы назвать "белой". Гипотеза цветовой симметрии предсказывает, что реальные частицы (барионы) состоят из трех каких-либо кварков разного цвета, а потому являются белыми.

До сих пор мы говорили о кварковой модели барионов, которые состоят из трех кварков. Однако, в сильных взаимодействиях участвуют еще и мезоны, состоящие из двух субчастиц: кварка q и антикварка $\bar{q}$. Поскольку у антикварка барионный заряд должен быть другого знака ($B = -1$) в отличие от кварка, барионный заряд которого $B = 1$, такая составная частица ($q\bar{q}$) имеет барионный заряд $B = 0$, как и должно быть для мезона. Также и в отношении цвета: мезон не имеет цвета, поскольку цвет антикварка есть "антицвет" и цвета античастиц нейтрализуют друг друга.

Итак, барионы и мезоны, участвующие в сильных взаимодействиях (по этому признаку их собирательно называют *адронами*), состоят из кварков. До сих пор мы говорили только о четырех видах кварков: u , d , s , c . Но из соображений, о которых будет рассказано в главе 6, были введены еще два вида кварков: t (top – верхний) и b (bottom – нижний). Таким образом, кварковая модель адронов включает шесть кварков, которые объединяют попарно в три так называемых *поколения* (табл. 1.6).

В этой таблице наряду с кварками представлены лептоны, которые также попарно образуют три поколения. Кварки и лептоны являются фермионами, поскольку они имеют спин $1/2$. На нынешнем уровне наших знаний они считаются элементарными частицами. Лептоны сами по себе являются эле-

Таблица 1.6. Три поколения кварков и лептонов

Поколение		1-е	2-е	3-е	Q
Кварки	верхние	u	c	t	$+\frac{2}{3}$
	нижние	d	s	b	$-\frac{1}{3}$
Лептоны	верхние	ν_e	ν_μ	ν_τ	0
	нижние	e	μ	τ	-1

ментарными частицами, а кварки – ”кирпичиками”, из которых состоят все наблюдаемые адроны, которые более или менее стабильны. Они могут распадаться на другие частицы и характеризуются определенным временем жизни.

Подсчитаем общее число элементарных частиц. Поскольку каждый кварк может иметь любой из трех цветов, то всего должно быть $6 \times 3 = 18$ кварков, а если учесть еще антикварки, то их общее число будет 36. Шесть лептонов вместе с их античастицами образуют еще 12 частиц. Несмотря на такое обилие перечисленных элементарных частиц, число их символов, приведённых в табл. 1.6, не так велико (их всего 12), и многие сотни экспериментально найденных тяжелых адронов (и наверное, многих тех, которые еще будут открыты) оказываются составленными только из шести кварков, которые экспериментально обнаружены. Их масса и время жизни показаны в табл.1.7.

Самым последним был открыт t -кварк (1996 г.), и его открытие стало триумфом кварковой модели сильных взаимодействий. Хотя ни один из кварков не наблюдался в свободном состоянии, нет сомнений в их существовании. Невозможность существования кварков в свободном состоянии также получила теоретическое объяснение. Кварки существуют внутри объема, занятого элементарной (в прошлом !) частицей, например

нуклоном, имеющей поперечный размер порядка радиуса взаимодействия ядерных сил $\sim 10^{-13}$ см. Существование кварков проявляется при взаимодействии реальных частиц, в частности в процессах их столкновений и распада, о чем будет сказано в главе 6.

1.8. Дальнейшее развитие представлений об элементарных частицах и их взаимодействиях

В табл. 1.7 наряду с лептонами и кварками в последней колонке приведена еще одна группа частиц, о которой ранее еще не было речи, и они не включены в список элементарных частиц, показанных в табл. 1.6. Эти элементарные частицы в отличие от лептонов и кварков являются бозонами, т.е. имеют не полуцелый, а целый спин. Их роль в мире элементарных частиц совсем другая. Если лептоны элементарны сами по себе, а кварки – это субчастицы, составляющими адроны, то бозоны являются переносчиками взаимодействия между лептонами и бозонами.

Так, хорошо известно, что фотон переносит электромагнитное взаимодействие между заряженными частицами. Скажем, два электрона путем обмена фотонами взаимодействуют, и это взаимодействие проявляется, в частности, как кулоновское отталкивание двух зарядов, которое убывает с расстоянием как $1/r$. Тот факт, что электрические силы далекодействующие (не имеют конечного радиуса действия), обусловлен отсутствием массы покоя у фотона, переносящего взаимодействие.

Слабые взаимодействия переносят Z - и W - бозоны, и в силу своей большой массы покоя обуславливают малый радиус дей-

Таблица 1.7. Массы элементарных частиц и год их открытия

ν_e ; < 10 эВ; 1956 e ; 0.5 МэВ; 1897	ν_μ ; < 170 КэВ; 1962 μ ; 105.7 МэВ; 1937, 1947	ν_τ ; < 24 МэВ; 1975 τ ; 1777 МэВ; 1975	γ g
u ; 5 МэВ; 1964 d ; 10 МэВ; 1964	c ; 1300 МэВ; 1974 s ; 150 МэВ; 1964	t ; 176 ГэВ; 1996 b ; 4.3 ГэВ; 1977	Z ; 91.2 ГэВ; 1983 W ; 80.4 ГэВ; 1983

ствия этих сил ($\sim 10^{-15}$) см. Эти, так называемые векторные бозоны – заряженные W^+ , W^- и нейтральные W^0 и Z – были открыты в 1983 г., что было торжеством теории электрослабых взаимодействий, которая предсказала эти частицы до их экспериментального обнаружения.

Наконец, частица, обозначенная в табл. 1.7 символом g , называется *глюоном* и является переносчиком сильных взаимодействий между кварками. Кварковая модель, основанная на теории сильных взаимодействий, предсказывает восемь глюонов, которые характеризуются совокупностями двух цветовых индексов m и n , каждый из которых принимает три значения по числу трех цветов кварков. Всего имеется $3^2 = 9$ комбинаций индексов m и n , поэтому должно быть только $3^2 - 1 = 8$ комбинаций в связи с тем, что одна из комбинаций нефизична. Кварки взаимодействуют друг с другом путем обмена глюонов, при этом в индивидуальном процессе столкновения кварка с глюоном цвет кварка меняется. Замечательным свойством является возможность самопроизвольного испускания глюона глюоном, что отличает глюон от фотона, для которого подобный процесс ("светящийся свет") невозможен. Это свойство и порождает упомянутый конфайнмент – удержание кварков в адроне.

Современная теория элементарных частиц и их взаимодей-

ствий строится в рамках квантовой теории поля, о которой речь пойдет в следующих главах книги. Первой теорией такого типа стала *квантовая электродинамика* (КЭД) – теория взаимодействующего электронно-позитронного и электромагнитного полей. При создании этой теории были разработаны основные концепции теории квантованных полей, и в частности ее язык – диаграммная техника. Предложенный Р. Фейнманом способ графического изображения вкладов в рамках теории возмущений для электромагнитного взаимодействия стал универсальным языком для теории и слабого, и сильного взаимодействия. В этом проявляется единство подходов теоретической физики к различным проблемам.

Другим принципом, применяющимся во всех квантовых теориях поля, является требование инвариантности относительно калибровочных преобразований лагранжиана. Это требование приводит к необходимости учитывать так называемое *калибровочное поле*, квантами которого и выступают бозоны – переносчики взаимодействия между элементарными частицами-фермионами. В КЭД калибровочным полем является электромагнитное поле с его квантами – фотонами, в теории слабых взаимодействий – это поле векторных (W , Z)-бозонов и наконец, в теории сильных взаимодействий, называемой *квантовой хромодинамикой* (КХД), калибровочное поле есть глюонное поле с квантами поля – глюонами.

Свойства калибровочного поля определяются внутренней симметрией, описываемой некоторой непрерывной группой: $U(1)$ – для электромагнитного взаимодействия, $SU(2)$ – для слабого взаимодействия и $SU(3)$ – для сильного взаимодей-

ствия. Таким образом, для разных взаимодействий (квантованных полей) открывается единый эвристический принцип – требование инвариантности относительно калибровочных преобразований. Его конкретная реализация – построение калибровочного поля для заданного взаимодействия – строится на основе группы симметрии. Об этом будет сказано в последующих главах.

Глава 2

Электромагнитное поле

2.1. Классическое электромагнитное поле

В лагранжевом формализме электромагнитное поле описывается "обобщенной координатой" – векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и "обобщенным импульсом" $\mathbf{p}$, определяемым как

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)}. \quad (2.1)$$

Здесь L – плотность функции Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int L d\mathbf{r},$$

где $\mathcal{L}$ – лагранжиан. Из курса классической электродинамики известно, что для свободного электромагнитного поля функция L имеет следующий вид:

$$L = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right\}. \quad (2.2)$$

Отсюда находим обобщенный импульс поля:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Векторы напряженности электрического и магнитного поля связаны с векторным потенциалом соотношениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Также известно, что функция Гамильтона записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right\} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} \left\{ |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнение движения для векторного потенциала представляет собой уравнение Эйлера для функционала $\mathcal{L}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{A}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right)} = 0. \quad (2.7)$$

Подставляя сюда (2.2), получаем следующее уравнение для векторного потенциала:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \mathbf{A} = 0, \quad (2.8)$$

или более коротко

$$\square \mathbf{A} = 0,$$

где введен оператор Д'Аламбера: $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. При этом на вектор $\mathbf{A}$ может еще быть наложено дополнительное условие, которое часто выбирают в виде (так называемая калибровка Лоренца):

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.8) можно представить как разложение по плоским волнам с определенной поляризацией. Если электромагнитное поле заключено в объеме $V = L^3$, то волновой вектор $\mathbf{k}$ принимает следующие значения:

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

В силу условия (2.9) имеем $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) = 0$, т.е. вектор $\mathbf{A}$ перпендикулярен волновому вектору.

Введем единичный вектор поляризации волны $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ ($\lambda = 1, 2$). Волну с произвольной поляризацией, распространяющуюся в направлении вектора $\mathbf{k}$, можно представить суперпозицией волн с двумя взаимно перпендикулярными векторами поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$. В соответствии с этим, запишем решение (2.8) в виде

$$\mathbf{A} = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left(q_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + q_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (2.11)$$

Подставляя это разложение в уравнение (2.8), получаем систему уравнений для амплитуд $q_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$\frac{\partial^2 q_{\mathbf{k}\lambda}}{\partial t^2} + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}\lambda} = 0 \quad (\omega_k = ck), \quad (2.12)$$

откуда

$$q_{\mathbf{k}\lambda} = q_{\mathbf{k}\lambda}^0 e^{-i\omega_k t}. \quad (2.13)$$

Подстановка формул (2.11–2.13) в (2.4) приводит к следующим выражениям для напряженностей полей:

$$\mathbf{E} = i \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}) \left(q_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + q_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{H} = i \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}] \left(q_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + q_{\mathbf{k}\lambda}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right), \quad (2.15)$$

и гамильтониана

$$\mathcal{H}_{\text{классич.}} = \frac{L^3}{4\pi} \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 (q_{\mathbf{k}\lambda} q_{\mathbf{k}\lambda}^* + q_{\mathbf{k}\lambda}^* q_{\mathbf{k}\lambda}). \quad (2.16)$$

2.2. Квантование свободного поля

Переход от классического описания к квантовому производится путем замены динамических переменных на соответствующие операторы. Применительно к полю эта процедура, называемая квантованием, производится по правилу

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}\lambda} &\rightarrow \hat{q}_{\mathbf{k}\lambda}, \\ q_{\mathbf{k}\lambda}^* &\rightarrow \hat{q}_{\mathbf{k}\lambda}^+. \end{aligned}$$

Введем операторы $b_{\mathbf{k}\lambda}$, связанные с $\hat{q}_{\mathbf{k}\lambda}$ следующим образом:

$$b_{\mathbf{k}\lambda} = \left(\frac{2\pi\hbar c}{kL^3} \right)^{1/2} \hat{q}_{\mathbf{k}\lambda} \equiv \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k L^3} \right)^{1/2} \hat{q}_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (2.17)$$

Теперь сделаем следующий важный шаг: примем, что операторы $b_{\mathbf{k}\lambda}$ подчиняются перестановочным соотношениям Бозе:

$$b_{\mathbf{k}\lambda} b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ - b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ b_{\mathbf{k}\lambda} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (2.18)$$

Оператор энергии (гамильтониан) выражается через операторы $b_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar \omega_k (b_{\mathbf{k}\lambda} b_{\mathbf{k}\lambda}^+ + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}\lambda}),$$

или, в соответствии с (2.18),

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar \omega_k \left(b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.19)$$

В этом выражении мы узнаем гамильтониан системы невзаимодействующих гармонических осцилляторов с частотами ω_k , где k – дискретная переменная: $k = (2\pi/L) \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (2.10). Таким образом, поле, заполняющее ограниченную область пространства, эквивалентно бесконечной системе гармонических осцилляторов. Оператор импульса принимает вид

$$\hat{p} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \mathbf{k} b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}\lambda}. \quad (2.20)$$

Как известно из элементарной квантовой механики, уровни энергии гармонического осциллятора с частотой ω записываются как $\varepsilon_n = \hbar \omega (n + 1/2)$, $n = 0, 1, \dots$. Отсюда сразу получаем спектр энергий электромагнитного поля:

$$E = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_k \left(n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.21)$$

где $n_{\mathbf{k}\lambda}$ – неотрицательные целые числа, а $\omega = c k$. Сравнение выражений (2.19) и (2.21) позволяет интерпретировать оператор

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\lambda} = b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}\lambda}$$

как оператор числа квантов поля (фотонов).

Таким образом, электромагнитное поле можно представить в виде совокупности невзаимодействующих частиц – фотонов, имеющих импульс $\hbar \mathbf{k}$, энергию $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ и находящихся в одном из двух базисных состояний поляризации, задаваемых единичным вектором $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ ($\lambda = 1, 2$).

Состояние поля задается указанием числа фотонов во всех этих состояниях. Следовательно, вектор состояния поля, отвечающий энергии (2.21), имеет вид (бесконечного) списка чисел

$n_{\mathbf{k}\lambda}$ со всеми возможными k, λ . Будем записывать его в виде кет-вектора $|n_{k_1 p_1} \dots n_{k_i p_i} \dots\rangle$. Правила действия операторов поля b, b^+ таковы:

$$b_{\mathbf{k}_i \lambda} |n_{k_1 \lambda} \dots n_{k_i \lambda} \dots\rangle = \sqrt{n_{k_i \lambda}} |n_{k_1 \lambda} \dots n_{k_i \lambda} - 1 \dots\rangle, \quad (2.22)$$

$$b_{\mathbf{k}_i \lambda}^+ |n_{k_1 \lambda} \dots n_{k_i \lambda} \dots\rangle = \sqrt{n_{k_i \lambda} + 1} |n_{k_1 \lambda} \dots n_{k_i \lambda} + 1 \dots\rangle. \quad (2.23)$$

2.3. Коммутаторы электромагнитного поля

Компоненты вектор-потенциала магнитного поля $A_\mu(\mathbf{r})$, $\mu = x, y, z$, в квантовой теории являются операторами, разложенными по плоским волнам, так что вместо выражения (2.11) теперь имеем

$$A_\mu(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e_\mu^\lambda (b_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad (2.24)$$

Введем гайзенберговское представление этого оператора:

$$A_\mu(\mathbf{r}, t) \equiv A_\mu(x) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} A_\mu(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} H t}. \quad (2.25)$$

Учитывая, что гамильтониан H , записанный через операторы вторичного квантования, имеет диагональную форму (2.19), приходим к следующему выражению для оператора поля $A_\mu(x)$:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e_\mu^\lambda (b_{\mathbf{k}\lambda} e^{ikx} + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-ikx}). \quad (2.26)$$

При этом учтено, что в гайзенберговском представлении операторы $b_{\mathbf{k}\lambda}$ и $b_{\mathbf{k}\lambda}^+$ равны:

$$b_{\mathbf{k}\lambda}(t) = b_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\omega_k t}, \quad b_{\mathbf{k}\lambda}^+(t) = b_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\omega_k t}. \quad (2.27)$$

В выражение (2.26) введены четырехкомпонентные векторы

$$x = \{\mathbf{r}, it\}, \quad k = \{\mathbf{k}, i\omega\}, \quad (2.28)$$

скалярное произведение которых равно $kx = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$, причем

$$k^2 = \mathbf{k}^2 - \omega^2 = 0, \quad (2.29)$$

что следует из закона дисперсии свободных электромагнитных волн, $\omega = |\mathbf{k}|$ (см. соотношение (2.12)). Здесь и в дальнейшем мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$ и $c = 1$, так что энергия и частота будут иметь размерность длины.

Вычислим теперь коммутаторы полей, заданных в произвольных пространственно-временных точках. Согласно (2.26), запишем

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), A_\nu(x')] &= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}\lambda, \mathbf{k}'\lambda'} \frac{e_\mu^\lambda e_\nu^{\lambda'}}{\omega\omega'} \left\{ [b_{\mathbf{k}\lambda}, b_{\mathbf{k}'\lambda'}] e^{i(kx+k'x')} + \right. \\ &\quad + [b_{\mathbf{k}\lambda}, b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+] e^{i(kx-k'x')} + [b_{\mathbf{k}\lambda}^+, b_{\mathbf{k}'\lambda'}] e^{-i(kx-k'x')} + \\ &\quad \left. + [b_{\mathbf{k}\lambda}^+, b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+] e^{-i(kx+k'x')} \right\} = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega} \left(e^{ik(x-x')} - e^{-ik(x-x')} \right) \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При выводе этого соотношения использовано одно из условий ортогональности и полноты векторов поляризации:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda} e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda &= \delta_{\mu\nu}, \\ \sum_{\mu} e_\mu^\lambda e_\mu^{\lambda'} &= \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Перепишем полученное выражение для коммутатора в следующем виде:

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = -iD(x-x')\delta_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

где

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\mathbf{k}. \quad (2.33)$$

Мы использовали при этом известное правило перехода от суммирования по импульсу $\mathbf{k}$ к интегрированию:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \cdots = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \cdots d\mathbf{k}. \quad (2.34)$$

Трехмерный интеграл в (2.33) можно заменить четырехмерным, добавив интегрирование по частоте и введя δ -функцию:

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \xi(k) \delta(k^2) d^4k, \quad (2.35)$$

где

$$\xi(k) = \frac{k_0}{|k_0|}, \quad d^4k = d\mathbf{k} dk_0.$$

Поскольку

$$\delta(k^2) = \delta(k_0^2 - \omega^2) = \frac{1}{2|k_0|} (\delta(k_0 - \omega) - \delta(k_0 + \omega)),$$

переход от (2.35) к (2.33) очевиден.

Выражение в правой части (2.33) нетрудно вычислить, проинтегрировав сначала по углу между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$. В итоге получаем явное выражение для функции $D(x)$:

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)} \xi(x) \delta(r^2 - t^2), \quad \xi(x) = \frac{t}{|t|}.$$

Таким образом, $D(x)$ обращается в нуль всюду, кроме точек, лежащих на световом конусе $x^2 = r^2 - t^2 = 0$. В этих точках $D(x)$ имеет δ -образную особенность.

2.4. Хронологическое и нормальное произведение операторов поля

В дальнейшем при исследовании взаимодействия электромагнитного поля с электронами существенную роль будут играть произведения операторов потенциалов, расставляемых в определенном порядке. Рассмотрим здесь два типа упорядоченных произведений, которые называются *хронологическим* и *нормальным* произведениями.

В хронологическом произведении операторов $A_\mu(x)$ и $A_\nu(x')$, которое будем обозначать как $T(A_\mu(x) A_\nu(x'))$, множители расположены в хронологическом порядке:

$$T(A_\mu(x) A_\nu(x')) = \begin{cases} A_\mu(x) A_\nu(x'), & t > t' \\ A_\nu(x') A_\mu(x), & t < t'. \end{cases} \quad (2.36)$$

Используя разложение потенциалов (2.26) на плоские волны, представим хронологическое произведение в виде

$$T(A_\mu(x) A_\nu(x')) = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}\lambda, \mathbf{k}'\lambda'} \frac{e_\mu^\lambda e_\nu^{\lambda'}}{\omega\omega'} \left\{ b_{\mathbf{k}\lambda} b_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(kx+k'x')} + \right. \quad (2.37) \\ \left. + b_{\mathbf{k}\lambda} b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ e^{i(kx-k'x')} + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(kx-k'x')} + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ e^{-i(kx+k'x')} \right\},$$

где $t > t'$. Поменяв местами x и x' , получим хронологическое произведение при $t < t'$.

В нормальном произведении $N(A_\mu(x) A_\nu(x'))$ операторы рождения фотонов $b_{\mathbf{k}\lambda}^+$ расположены слева от операторов по-

глощения $b_{\mathbf{k}\lambda}$. Таким образом,

$$N(A_\mu(x) A_\nu(x')) = \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}\lambda, \mathbf{k}'\lambda'} \frac{e_\mu^\lambda e_\nu^{\lambda'}}{\omega \omega'} \left\{ b_{\mathbf{k}\lambda} b_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(kx+k'x')} + \right. \quad (2.38)$$

$$\left. + b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ b_{\mathbf{k}\lambda} e^{i(kx-k'x')} + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{-i(kx-k'x')} + b_{\mathbf{k}\lambda}^+ b_{\mathbf{k}'\lambda'}^+ e^{-i(kx+k'x')} \right\},$$

где $t > t'$.

Между хронологическим и нормальным произведением существует простое соотношение – их разность не содержит операторов рождения и уничтожения фотонов и представляет число:

$$T(A_\mu(x) A_\nu(x')) - N(A_\mu(x) A_\nu(x')) =$$

$$= \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega_k} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')-i\omega|t-t'|} \delta_{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Переходя в последнем выражении от суммы по $\mathbf{k}$ к интегралу по правилу (2.34), запишем (2.39) в виде

$$T(A_\mu(x) A_\nu(x')) - N(A_\mu(x) A_\nu(x')) =$$

$$= A_\mu(x) A_\nu(x') = D^c(x - x') \delta_{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

где

$$D^c(x - x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega|t|} \frac{d\mathbf{k}}{\omega}. \quad (2.41)$$

Разность между T - и N -произведениями называется *сверткой* операторов и обозначается

$$\overbrace{A_\mu(x) A_\nu(x')} = D^c(x - x') \delta_{\mu\nu}.$$

Нетрудно убедиться, что функция $D^c(x)$ удовлетворяет волновому уравнению с сингулярным источником:

$$\square D^c(x) = i \delta(x). \quad (2.42)$$

Таким образом, $-i D^c(x)$ представляет собой функцию Грина волнового уравнения. Введенные соотношениями (2.32) и (2.40) две функции $D(x)$ и $D^c(x)$ являются основными характеристиками квантованного электромагнитного поля, которые определяют теорию возмущений для взаимодействующего электромагнитного и электронного полей.

Разложим функцию $D^c(x)$ в интеграл Фурье:

$$D^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D^c(k) e^{ikx} d^4k. \quad (2.43)$$

Из сравнения выражений (2.41) и (2.43) находим

$$D^c(k) = \frac{-i}{k^2 - i\delta}. \quad (2.44)$$

Здесь k – четырехмерный вектор: $k = \{\mathbf{k}, i\omega\}$ и $k^2 = \mathbf{k}^2 - \omega^2$, δ – малая постоянная ($\delta \rightarrow 0$). Мы видим, что полюса функции Грина волнового уравнения электромагнитного поля определяют закон дисперсии квантов поля – фотонов:

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|. \quad (2.45)$$

Глава 3

Электронно-позитронное поле

3.1. Уравнение Дирака

3.1.1. Релятивистское уравнение движения

Уравнение Шредингера, как можно убедиться, не инвариантно относительно преобразований Лоренца, следовательно, оно не может описывать состояние частицы, движущейся с большими скоростями. Можно попытаться получить релятивистски инвариантное уравнение, используя следующие рассуждения.

Уравнение Шредингера можно получить на основе классической связи энергии и импульса:

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad (3.1)$$

если заменить E и p операторами

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla. \quad (3.2)$$

Действуя обеими частями получающегося из (3.1) операторного равенства на функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$, записываем уравнение Шредингера для свободной частицы в координатном представлении:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi. \quad (3.3)$$

Если включить потенциальную энергию, то $E = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r})$, и тем же способом получим

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U\Psi. \quad (3.4)$$

Теперь рассмотрим релятивистскую связь между энергией и импульсом для свободной частицы:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \quad (3.5)$$

Используя выражения (3.2) для операторов E и $\mathbf{p}$, получаем:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -c^2 \hbar^2 \Delta \Psi + m^2 c^4 \Psi. \quad (3.6)$$

Это уравнение можно записать в ковариантной форме (все величины имеют одинаковую тензорную размерность и, следовательно, одинаково преобразуются при преобразованиях координат).

Введем четырехмерное пространство

$$x_\mu = \{x_1, x_2, x_3, ict\} \quad (3.7)$$

($x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$; $x_4 = ict$). Импульсы, канонически сопряженные этим координатам, запишем в виде:

$$p_\mu = \left\{ p_1, p_2, p_3, i\frac{E}{c} \right\} \quad (3.8)$$

($p_1 = p_x$; $p_2 = p_y$; $p_3 = p_z$; $p_4 = iE/c$). Связь между операторами этих координат и импульсов обычная:

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad (3.9)$$

Заменяя в (3.5) величины соответствующими операторами, получаем уравнение

$$\sum_{\mu=1}^4 \hat{p}_\mu^2 = -m^2 c^2,$$

или

$$\left\{ \sum_{\mu=1}^4 \hat{p}_{\mu}^2 + m^2 c^2 \right\} \Psi = 0. \quad (3.10)$$

(уравнение Клейна–Гордона). Можно ввести оператор Д’Аламбера (четырёхмерный аналог оператора Лапласа):

$$\square = \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu}^2}, \quad (3.11)$$

$\left(\sum_{\mu=1}^4 \hat{p}_{\mu}^2 = -\hbar^2 \square \right)$. Тогда уравнение Клейна–Гордона примет вид

$$\square \Psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi = 0. \quad (3.12)$$

Решением этого уравнения является функция $\Psi(x_1, x_2, x_3, t)$, т.е. в обычном понимании функция координат и времени, которая описывает частицу, обладающую тремя степенями свободы. Волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ является скалярной (имеет одну компоненту) и описывает скалярное поле. В природе существуют частицы, которые описываются уравнением Клейна–Гордона, – это *мезоны*. На самом деле частицы могут обладать еще некоторыми внутренними степенями свободы, которые являются их фундаментальными характеристиками.

3.1.2. Уравнение Дирака

Продолжим поиски релятивистски инвариантного уравнения, из которого вытекало бы существование у частицы дополнительных, внутренних степеней свободы. Эту задачу решил Дирак.

Линеаризованное уравнение, основанное на соотношении

$$E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4},$$

не может быть записано в ковариантной форме, так как четыре компоненты импульса входят в него несимметрично. Дирак предложил следующую форму линеаризованного уравнения:

$$(E - c \alpha_1 p_1 - c \alpha_2 p_2 - c \alpha_3 p_3 - c \beta m c) \Psi = 0,$$

или

$$\left(\frac{E}{c} - \vec{\alpha} \vec{p} - \beta m c \right) \Psi = 0. \quad (3.13)$$

Если под E понимать оператор $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, а импульс также заменить его оператором в координатном представлении: $\vec{p} \rightarrow \hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla$, то это уравнение примет вид уравнения Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_D \Psi, \quad (3.14)$$

где оператор Гамильтона есть

$$\hat{H}_D = c \vec{\alpha} \hat{\vec{p}} + \beta m c^2. \quad (3.15)$$

В уравнение Дирака входят неизвестные пока величины $\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и β . В наиболее общем случае следует считать эти величины операторами. Установить их вид Дирак предложил следующим образом. Если уравнение (3.13) слева умножить на оператор $(\frac{E}{c} + \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c)$, то получится квадратичная форма, которая должна совпадать с уравнением Клейна–

Гордона:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{E}{c} + \vec{\alpha} \vec{p} + \beta mc \right) \left(\frac{E}{c} - \vec{\alpha} \vec{p} - \beta mc \right) = \\
 & = \frac{E^2}{c^2} - \alpha_1^2 p_1^2 - \alpha_2^2 p_2^2 - \alpha_3^2 p_3^2 - \beta^2 m^2 c^2 - \\
 & - (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_1) p_1 p_2 - (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1) p_1 p_3 - (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_2) p_2 p_3 - \\
 & - (\alpha_1 \beta + \beta \alpha_1) p_1 mc - (\alpha_2 \beta + \beta \alpha_2) p_2 mc - (\alpha_3 \beta + \beta \alpha_3) p_3 mc = \\
 & = \frac{E^2}{c^2} - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - m^2 c^2.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Отсюда следуют соотношения

$$\alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i = 2\delta_{ik}, \tag{3.17}$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0,$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1, \tag{3.18}$$

где индексы i, k принимают значения 1, 2, 3, 4 и в правой части первого соотношения стоит символ Кронекера. Таким образом, сразу видно, что величины α и β действительно являются операторами, поскольку они не коммутируют между собой.

Можно легко получить явные выражения для этих четырех операторов в некотором представлении, в котором они записываются в виде матриц. Прежде всего установим минимальную размерность требуемых матриц. Рассмотрим равенство

$$\alpha_i \alpha_k = -\alpha_k \alpha_i \quad (i \neq k).$$

Соответствующее равенство для детерминантов этих матриц имеет вид

$$\det(\alpha_i) \det(\alpha_k) = \det(-\hat{1}) \det(\alpha_k) \det(\alpha_i),$$

где $\hat{1}$ – единичная матрица той же размерности, что и α . Но детерминанты – это уже числа. Сокращая общие множители, видим, что равенство получится, если

$$\det(-\hat{1}) = 1.$$

Это возможно лишь в том случае, когда размерность матриц четная, так как

$$\det(-\hat{1}) = (-1)^n,$$

где n – размерность.

Матрицы второго порядка ($n = 2$), удовлетворяющие соотношениям (3.17) и (3.18), можно выбрать в виде

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Однако этих матриц три и не существует четвертой матрицы, которая была бы линейно независимой от них и удовлетворяла соотношениям (3.17)–(3.18). Возможны и другие варианты выбора подходящих матриц второго порядка, но они будут сводиться к трем независимым комбинациям матриц σ .

Следовательно, нужно обратиться к матрицам следующего четного порядка – четвертого. Такими матрицами могут быть только четыре следующие:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}; & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}; \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}; & \beta &= \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

(можно выбрать и другой эквивалентный набор:

$$\gamma_1 = -i\beta\alpha_1; \quad \gamma_2 = -i\beta\alpha_2; \quad \gamma_3 = -i\beta\alpha_3; \quad \gamma_4 = -\beta,$$

и т.д.).

Матрицы σ_x , σ_y , σ_z называются матрицами Паули. Смысл представления (3.19) и (3.21) выясним немного позднее, а пока запишем уравнение Дирака с использованием явного вида входящих в него матриц (3.21). Поскольку операторы в этом уравнении имеют вид четырехрядных матриц, то вектор, на который они действуют, должен изображаться столбцом из четырех компонент:

$$\hat{H}_D \Psi \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Итак, уравнение Дирака принимает следующий вид:

$$\left\{ \hat{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - c\hat{p}_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - c\hat{p}_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - c\hat{p}_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

3.1.3. Свободная частица

Здесь мы имеем дело с системой четырех однородных уравнений относительно функций $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_4(\mathbf{r}, t)$. Решение уравнения (3.23) будем искать в виде

$$\Psi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}. \quad (3.24)$$

Здесь E – энергия частицы, $\mathbf{p}$ – ее импульс. Тогда

$$\hat{E}\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = E\Psi, \\ \hat{p}_i \Psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \Psi = p_i \Psi.$$

Таким образом, в этом случае для вектора u получается уравнение (3.23), в котором вместо операторов $\hat{E}$ и $\hat{p}_i$ нужно просто подставить энергию и компоненты импульса частицы – наблюдаемые классические величины. В результате получаем однородную систему четырех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (E - mc^2)\Psi_1 - cp_3\Psi_3 - c(p_1 - ip_2)\Psi_4 = 0, \\ (E - mc^2)\Psi_2 - c(p_1 + ip_2)\Psi_3 + cp_3\Psi_4 = 0, \\ -cp_3\Psi_1 - c(p_1 - ip_2)\Psi_2 + (E + mc^2)\Psi_3 = 0, \\ -c(p_1 + ip_2)\Psi_1 + cp_3\Psi_2 + (E + mc^2)\Psi_4 = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Условием разрешимости этой системы является равенство нулю ее определителя, откуда следуют четыре корня:

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= +\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}, \\ E_{3,4} &= -\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для нахождения волновой функции представим вектор u (3.24) в виде

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad W' = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Тогда получаем два уравнения для двухкомпонентных функций W, W' :

$$\begin{aligned} (E - mc^2)W - c\vec{\sigma}\vec{p}W' &= 0, \\ -c\vec{\sigma}\vec{p}W + (E + mc^2)W' &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Условие обращения в нуль определителя дает

$$E = \pm\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}, \quad (3.29)$$

и для каждого значения энергии получаем:

$$W \text{ — произвольно, } W' = \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E + mc^2} W, \quad E > 0, \quad (3.30)$$

$$W' \text{ — произвольно, } W = \frac{c\vec{\sigma}\vec{p}}{E - mc^2} W', \quad E < 0. \quad (3.31)$$

Направим координатную ось z в направлении импульса частицы. Тогда $\vec{p} = (0, 0, p_z)$. Полагая в уравнении (3.30) $W = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, где A и B — произвольные константы, и учитывая явный вид матриц Паули (3.19), получаем из (3.27) решение,

отвечающее положительной энергии (3.29):

$$u_+ = \begin{pmatrix} A \\ B \\ \frac{cp_z A}{E + mc^2} \\ \frac{cp_z B}{E + mc^2} \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Аналогично, подставляя в уравнение (3.31) вектор $W' = \begin{pmatrix} D \\ F \end{pmatrix}$ с двумя произвольными константами D и F , получаем решение, отвечающее отрицательной энергии:

$$u_- = \begin{pmatrix} \frac{cp_z D}{E - mc^2} \\ \frac{cp_z F}{E - mc^2} \\ D \\ F \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

В нерелятивистском пределе, при скоростях $v \ll c$, для решения с положительной энергией получаем $W' \sim \frac{v}{c}W \ll W$, а для решения с отрицательной энергией $-W \sim \frac{v}{c}W' \ll W'$, откуда

$$u_+ \sim \begin{pmatrix} A \\ B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_- \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D \\ F \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Здесь учтено, что волновая функция должна быть конечной (не расходиться). Таким образом, в нерелятивистском приближении как при положительной, так и при отрицательной энергии частица описывается двухкомпонентной волновой функцией.

Формально спектр (3.29) релятивистской частицы, полученный из уравнения Дирака, представляется сплошной полосой положительных и отрицательных значений, разделенных щелью $2mc^2$, как это показано на рис.3.1. Дирак истолковал состояния с отрицательной энергией как полностью заполненные и образующие физический вакуум. Если какой-нибудь частице из вакуума добавляется энергия $E > 2mc^2$, то образовавшаяся дырка должна реально проявляться как частица с противоположным электрону электрическим зарядом. Такая "античастица" была экспериментально обнаружена и названа позитроном. Таким образом, уравнение Дирака открывает существование электронно-позитронного поля, свойства которого будут изучены далее в этой главе.

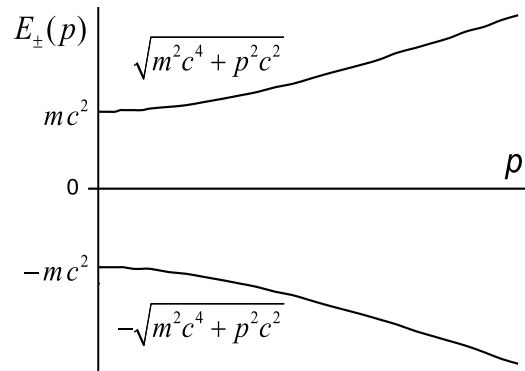


Рис. 3.1. Энергетический спектр свободной частицы, следующий из уравнения Дирака

3.1.4. Спин

Рассмотрим интегралы движения, являющиеся следствиями уравнения Дирака. Для сохранения физической величины достаточно, чтобы ее оператор коммутировал с гамильтонианом $\hat{H}_D$ (3.15).

Импульс $\hat{\vec{p}}$: $[\hat{H}_D, \hat{\vec{p}}] = 0$. Этот результат следовало ожидать — свободная частица движется по инерции с постоянным импульсом.

Момент $\vec{L}$: $[\hat{H}_D, \vec{\hat{L}}] \neq 0$. Например, для $\hat{L}_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$:

$$[\hat{H}_D, \hat{L}_z] = i\hbar c (\alpha_y p_x - \alpha_x p_y). \quad (3.35)$$

Таким образом, орбитальный момент не является интегралом движения.

Будем искать интеграл движения, имеющий размерность момента, в виде

$$\vec{\hat{J}} = \vec{\hat{L}} + \vec{\hat{S}} \quad (3.36)$$

так, чтобы $[\hat{H}_D, \vec{\hat{S}}]$ было равно $-[\hat{H}_D, \vec{\hat{L}}]$. Этому требованию удовлетворяет вектор с компонентами

$$\hat{S}_x = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_y\alpha_z; \quad \hat{S}_y = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_z\alpha_x; \quad \hat{S}_z = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_x\alpha_y. \quad (3.37)$$

Рассмотрим подробнее эти выражения. Так,

$$\hat{S}_z = -\frac{i\hbar}{2}\alpha_x\alpha_y = -\frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_x\sigma_y \end{pmatrix}.$$

Но $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$, поэтому

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Теперь можно сказать о том представлении, в котором записаны матрицы α_i и β : в нем матрица $\hat{S}_z$ диагональна. Базисом такого представления являются собственные векторы оператора $\hat{S}_z$:

$$\hat{S}_z|u\rangle = S_z|u\rangle.$$

Для матрицы $\hat{\sigma}_z$ можно записать (см. (3.27)):

$$\hat{\sigma}_z|W\rangle = \sigma_z|W\rangle,$$

или

$$\hat{\sigma}_z \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z u_1 &= u_1, \\ \hat{\sigma}_z u_2 &= -u_2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Имеем два собственных значения: $\sigma_z = \pm 1$ и соответствующие им собственные векторы; u_1 описывает спин параллельный, а u_2 – антипараллельный оси z .

Частица имеет собственный момент импульса – спин, обладающий двумя возможными проекциями на ось z . Запишем теперь все четыре полученных решения:

$$\begin{array}{ll} 1. \ E > m c^2 & 2. \ E > m c^2 \quad (\text{частицы}) \\ \Psi_1 \ \uparrow_{\vec{p}} \uparrow_{\vec{s}} & \Psi_2 \ \uparrow_{\vec{p}} \downarrow_{\vec{s}} \\ 3. \ E < m c^2 & 4. \ E < m c^2 \quad (\text{античастицы}) \\ \Psi_3 \ \uparrow_{\vec{p}} \uparrow_{\vec{s}} & \Psi_4 \ \uparrow_{\vec{p}} \downarrow_{\vec{s}} \end{array}$$

3.1.5. Переход от уравнения Дирака к уравнению Паули. Магнитный момент частицы

Посмотрим, как преобразуется уравнение Дирака, если в нем совершить переход к нерелятивистскому приближению. Рассмотрим общий случай, когда частица движется во внешнем электромагнитном поле. Как известно, в этом случае в операторе кинетической энергии необходимо произвести замену: $\hat{\vec{p}} \rightarrow \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A}$, где $\vec{A}$ – векторный потенциал электромагнитного поля. Скалярный потенциал будем обозначать φ .

Прежде всего выделим энергию покоя в волновой функции:

$$\Psi = \Psi_0 e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t}. \quad (3.41)$$

Тогда для функции Ψ_0 получаем уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t} = \left[c \vec{\alpha} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) + mc^2(\beta - 1) + e \varphi \right] \Psi_0. \quad (3.42)$$

Снова ищем решение в виде

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношение

$$c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix} = c \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \begin{pmatrix} W' \\ W \end{pmatrix},$$

получаем два уравнения для компонент W и W' волновой функции:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = c \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) W' + e \varphi W, \\ i\hbar \frac{\partial W'}{\partial t} = c \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) W - 2mc^2 W' + e \varphi W'. \end{cases} \quad (3.43)$$

При выполнении предельного перехода учтено, что для решения уравнения (3.30) с положительной энергией $W' \sim \frac{1}{c}W$. Тогда во втором уравнении можно пренебречь членами $i\hbar \frac{\partial W'}{\partial t}$ и $e \varphi W'$ по сравнению с $c \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) W$ и $2mc^2 W'$. В результате для спинора W' получаем

$$W' \simeq \frac{1}{2mc^2} \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) W. \quad (3.44)$$

Подставляя (3.44) в уравнения (3.43), приходим к уравнению для W :

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left\{ \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right\}^2 W + e \varphi W. \quad (3.45)$$

Распишем оператор в правой части:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{\sigma} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right\}^2 &= \sigma_x^2 \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \sigma_y^2 \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right)^2 + \sigma_z^2 \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right)^2 + \\ &+ \sigma_x \sigma_y \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) + \sigma_y \sigma_x \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \\ &+ \sigma_x \sigma_z \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) + \sigma_z \sigma_x \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) \left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \\ &+ \sigma_y \sigma_z \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) + \sigma_z \sigma_y \left(p_z - \frac{e}{c} A_z \right) \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right). \end{aligned}$$

Для матриц Паули выполняются следующие тождества:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1; \quad [\sigma_i, \sigma_k] &= 2i\epsilon_{ikl} \sigma_l; \quad \sigma_i \sigma_k = -\sigma_k \sigma_i \quad (i \neq k); \\ \sigma_i \sigma_k &= i\epsilon_{ikl} \sigma_l \quad (i \neq k); \quad \sigma_i \sigma_k \sigma_l = i\epsilon_{ikl}, \end{aligned}$$

где ϵ_{ikl} – антисимметричный тензор (символ Леви–Чивита) и все индексы независимо пробегают значения x, y, z . Учитывая эти свойства, полученные выше громоздкие выражения можно упростить. Так, обозначив для краткости $\hat{\pi}_i = \hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i$, ($i = x, y$), получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y \hat{\pi}_x \hat{\pi}_y + \sigma_y \sigma_x \hat{\pi}_y \hat{\pi}_x &= \frac{e}{c} \sigma_x \sigma_y \left\{ -[\hat{p}_x, A_y] + [\hat{p}_y, A_x] \right\} = \\ &= -\frac{e\hbar}{c} \sigma_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = -\frac{e\hbar}{c} \sigma_z H_z. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь учтено, что для любой функции координат $f(\mathbf{r})$ имеет место тождество

$$[\hat{p}_i, f(\mathbf{r})] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial r_i} f(\mathbf{r})$$

и введена напряженность магнитного поля, связанная с векторным потенциалом соотношением

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

В итоге уравнение для W принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\varphi - \frac{e\hbar}{2mc} \left(\hat{\vec{\sigma}} \vec{H} \right) \right] W. \quad (3.47)$$

Это и есть уравнение Паули для нерелятивистской частицы, обладающей собственным моментом – спином. Величина

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \quad (3.48)$$

есть магнитный момент частицы, а $\mu_B = e\hbar/(2mc)$ – магнетон Бора. Его энергия в магнитном поле определяется так, как обычно в электродинамике:

$$\hat{H}_\mu = -(\vec{\mu} \mathbf{H}) = -\frac{e\hbar}{2mc} (\vec{\sigma} \mathbf{H}) = -\frac{e\hbar}{mc} (\mathbf{S} \mathbf{H}), \quad (3.49)$$

где $\mathbf{S}$ – вектор спина.

Далее рассмотрим первый член в правой части (3.47). Накладывая на векторный потенциал условие калибровки

$$\text{div} \mathbf{A} = 0,$$

имеем

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e}{mc} (\hat{\vec{p}} \vec{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} A^2.$$

Если магнитное поле постоянно и направлено по оси z , $\mathbf{H}(0, 0, H)$, то векторный потенциал допускает представление: $A_x = -\frac{1}{2}H y$, $A_y = \frac{1}{2}H x$, $A_z = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (\hat{\vec{p}} \vec{A}) &= -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y \right) = \\ &= -i\hbar H \left(-\frac{\partial}{\partial x} y + \frac{\partial}{\partial y} x \right) = -i\hbar [\mathbf{r} \times \nabla]_z H_z = \hat{L}_z H_z. \end{aligned}$$

В общем случае

$$\frac{e}{mc}(\widehat{\vec{p}}\vec{A}) = \frac{e}{2mc}(\widehat{\vec{L}}\vec{H}). \quad (3.50)$$

Это выражение имеет смысл энергии орбитального магнитного момента в магнитном поле.

Таким образом, в уравнение Паули наряду с оператором кинетической энергии частицы входит энергия взаимодействия орбитального и спинового магнитных моментов частицы с внешним магнитным полем и энергия взаимодействия ее заряда с электрическим полем:

$$i\hbar\frac{\partial W}{\partial t} = \left\{ \frac{\widehat{p}^2}{2m} + e\varphi_0 - \frac{e}{2mc}(\widehat{\vec{L}} + 2\widehat{\vec{S}})\vec{H} \right\} W. \quad (3.51)$$

Решением этого уравнения является спинор – двухкомпонентная волновая функция $W = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ для частицы с положительной энергией; при этом $u_1 = u(\mathbf{r}, t, \sigma_z = 1)$, $u_2 = u(\mathbf{r}, t, \sigma_z = -1)$.

Исторически уравнение Паули было введено раньше, чем уравнение Дирака, и спин электрона был введен феноменологически через матрицы Паули.

3.2. Ковариантная форма уравнения Дирака

3.2.1. Другая запись уравнения Дирака

Преобразуем уравнение Дирака к более симметричной форме. Для этого введем матрицы

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -i\beta\alpha_x; & \gamma_2 &= -i\beta\alpha_y; & \gamma_3 &= -i\beta\alpha_z; \\ \gamma_4 &= \beta; & \gamma_5 &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5, \end{aligned} \quad (3.52)$$

или в развернутом виде:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.53)$$

Непосредственная проверка показывает, что эти матрицы удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и ранее введенные матрицы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$:

$$\gamma_i^+ = \gamma_i; \quad \gamma_i^2 = 1; \quad \gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2 \delta_{ik}, \quad (3.54)$$

($i, k = 1, 2, 3, 4$). Умножая (3.14) слева на β , получаем уравнение Дирака в следующей форме:

$$\sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mu}} + \frac{m c}{\hbar} \Psi = 0, \quad (3.55)$$

где использованы стандартные обозначения: $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = i c t$. В дальнейшем мы всегда будем подразумевать, что по дважды встречающемуся индексу производится суммирование.

Перейдем теперь к выяснению поведения волновой функции при различных преобразованиях системы отсчета.

3.2.2. Поворот системы координат

Поворот и преобразования Лоренца являются линейными ортогональными преобразованиями:

$$x'_{\mu} = a_{\mu \nu} x_{\nu}, \quad (3.56)$$

$$x_{\nu} = a_{\nu \mu} x'_{\mu}, \quad (3.57)$$

где

$$a_{\mu\nu} a_{\rho\mu} = \delta_{\nu\rho}. \quad (3.58)$$

Соответственно производные преобразуются как

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} = a_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad (3.59)$$

при этом волновая функция подвергается унитарному преобразованию:

$$\Psi' = \hat{U} \Psi. \quad (3.60)$$

Если физическая система инвариантна относительно таких преобразований, то уравнение Дирака (3.55) в новых переменных должно сохранять свой вид:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \Psi'}{\partial x'_\mu} + \frac{m c}{\hbar} \Psi' = 0. \quad (3.61)$$

Подставляя сюда формулы преобразований, имеем

$$a_{\nu\mu} \gamma_\mu \hat{U} \frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu} + \hat{U} \frac{m c}{\hbar} \Psi = 0.$$

Видно, что это соотношение будет сводиться к уравнению Дирака для исходных (нестрихованных) величин при условии

$$\hat{U}^{-1} a_{\nu\mu} \gamma_\mu \hat{U} = \gamma_\nu. \quad (3.62)$$

Таково требование, накладываемое на преобразование волновой функции, индуцированное преобразованием пространственно-временных координат. Умножая справа на $a_{\mu\nu}$ и суммируя по двойным индексам с учетом условия унитарности (3.58), получаем:

$$\hat{U}^{-1} \gamma_\mu \hat{U} = a_{\mu\nu} \gamma_\nu. \quad (3.63)$$

Пусть рассматриваемое преобразование отвечает повороту вокруг оси $x_3 = z$ на угол φ . Убедимся, что в этом случае условию (3.62) удовлетворяет оператор

$$\widehat{U} = e^{\frac{\varphi}{2} \gamma_1 \gamma_2}. \quad (3.64)$$

Разложим $\widehat{U}$ в ряд

$$\widehat{U} = 1 + \frac{\varphi}{2} \gamma_1 \gamma_2 + \frac{\varphi^2}{2! 4} (\gamma_1 \gamma_2)^2 + \dots \quad (3.65)$$

Учитывая свойства матриц γ (3.54), имеем

$$\begin{aligned} (\gamma_1 \gamma_2)^2 &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2 = -\gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_2 = -1, \\ (\gamma_1 \gamma_2)^3 &= (\gamma_1 \gamma_2)^2 \gamma_1 \gamma_2 = -\gamma_1 \gamma_2, \\ (\gamma_1 \gamma_2)^4 &= (\gamma_1 \gamma_2)^2 (\gamma_1 \gamma_2)^2 = 1 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Поэтому (3.65) преобразуется так:

$$\widehat{U} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2! 4} + \frac{\varphi^4}{4! 16} - \dots \right) + \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^3}{3! 8} + \frac{\varphi^5}{5! 32} \dots \right),$$

или

$$\widehat{U} = \cos \frac{\varphi}{2} + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (3.66)$$

$$\widehat{U}^{-1} = \cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (3.67)$$

При этом

$$\begin{aligned} \widehat{U}^{-1} \gamma_1 \widehat{U} &= \left(\cos \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) \gamma_1 \left(\cos \frac{\varphi}{2} + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \gamma_1 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \underbrace{(\gamma_1 \gamma_2)^2}_{-1} \gamma_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \\ &+ \gamma_1 \gamma_1 \gamma_2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \\ &= \gamma_1 \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \gamma_2 \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi = \sum_{\nu} a_{\mu \nu} \gamma_{\nu}, \end{aligned}$$

что согласуется с выражением для матрицы поворота вокруг оси z :

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при повороте вокруг произвольной координатной оси x_i на угол φ волновая функция Ψ подвергается унитарному преобразованию:

$$\widehat{U}(x_i) = \exp \left(\frac{\varphi}{2} \gamma_k \gamma_l \right), \quad (3.68)$$

где индексы k, l, i образуют циклическую перестановку.

3.2.3. Преобразования Лоренца

Преобразования Лоренца можно представить как поворот на мнимый угол $\varphi = i\chi$ в плоскости $x_1 x_4$:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \operatorname{ch} \chi - x_0 \operatorname{sh} \chi, \\ x'_0 &= -x_1 \operatorname{sh} \chi + x_0 \operatorname{ch} \chi. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Здесь $x_0 = ct = ix_4$, $\operatorname{ch} \chi = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\operatorname{sh} \chi = \beta (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\operatorname{th} \chi = \beta$, где $\beta \equiv v/c$. С учетом этого

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ y &= y', & y' &= y, \\ z &= z', & z' &= z, \\ t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Отвечающий этому преобразованию оператор $\hat{U}$ (3.68) имеет следующий вид:

$$\hat{U} = \exp \left(i \frac{\chi}{2} \gamma_1 \gamma_4 \right). \quad (3.71)$$

3.2.4. Инверсия системы координат

Пусть $\hat{I}$ – оператор инверсии:

$$\begin{aligned} x'_i &\equiv \hat{I} x_i = -x_i \quad (i = 1, 2, 3), \\ x'_4 &\equiv \hat{I} x_4 = x_4. \end{aligned} \quad (3.72)$$

После инверсии уравнение Дирака в новых координатах будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^3 \gamma_i \frac{\partial \Psi'}{\partial x'_i} + \gamma_4 \frac{\partial \Psi'}{\partial x'_4} + \frac{m c}{\hbar} \Psi' = 0 \quad (3.73)$$

или

$$- \sum_{i=1}^3 \gamma_i \hat{I} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \gamma_4 \hat{I} \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} + \frac{m c}{\hbar} \hat{I} \Psi = 0.$$

Если на это уравнение подействовать еще раз оператором $\hat{I}$, то мы придем к уравнению

$$- \sum_{i=1}^3 \hat{I} \gamma_i \hat{I} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} + \hat{I} \gamma_4 \hat{I} \frac{\partial \Psi}{\partial x_4} + \frac{m c}{\hbar} \hat{I}^2 \Psi = 0.$$

Таким образом получаем тождества:

$$\begin{aligned} - \hat{I} \gamma_i \hat{I} &= \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \hat{I} \gamma_4 \hat{I} &= \gamma_4, \\ \hat{I}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Этим равенствам удовлетворяет оператор $\pm \beta$. Примем за оператор инверсии

$$\hat{I} = \beta. \quad (3.75)$$

3.2.5. Преобразование билинейных форм

Полезно наряду с четырехкомпонентной волновой функцией Ψ ввести сопряженную величину Ψ^+ , определив их как столбец и комплексно сопряженную строку соответственно:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \quad \Psi^+ = (\Psi_1^*, \Psi_2^*, \Psi_3^*, \Psi_4^*). \quad (3.76)$$

Уравнение Дирака для них имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\hbar c \vec{\alpha} \nabla \Psi + mc^2 \beta \Psi, \quad (3.77)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} = -i\hbar c \nabla \Psi^+ \vec{\alpha} + mc^2 \Psi^+ \beta. \quad (3.78)$$

Комбинируя оба уравнения, приходим к тождеству

$$i\hbar \left(\Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^+}{\partial t} \right) = -i\hbar c [\Psi^+ \vec{\alpha} \Psi + (\nabla \Psi^+ \vec{\alpha}) \Psi].$$

Его можно переписать также в виде

$$\frac{\partial (\Psi^+ \Psi)}{\partial t} = -c \operatorname{div} (\Psi^+ \vec{\alpha} \Psi), \quad (3.79)$$

тогда оно приобретет смысл уравнения непрерывности, где вектор

$$\vec{j} = c \Psi^+ \vec{\alpha} \Psi \quad (3.80)$$

имеет смысл тока, а $\Psi^+ \Psi$ — плотности частиц.

Вместо функции Ψ^+ удобно пользоваться функцией

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma_4. \quad (3.81)$$

Тогда вместо уравнений (3.77) и (3.78) получаем стандартную

пару уравнений в ковариантной форме:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} + \frac{mc}{\hbar} \Psi = 0, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - \frac{mc}{\hbar} \bar{\Psi} = 0. \quad (3.83)$$

Плотность тока через функцию $\bar{\Psi}$ записываем как

$$\vec{j} = c \Psi^+ \vec{\alpha} \Psi = c \Psi^+ \beta \beta \vec{\alpha} \Psi = i c \bar{\Psi} \vec{\gamma} \Psi,$$

или в компонентах:

$$j_k = i c \bar{\Psi} \gamma_k \Psi. \quad (3.84)$$

Как преобразуется функция $\bar{\Psi}$ при вращении системы координат? Поскольку Ψ преобразуется как $\Psi' = \hat{U} \Psi$, для эрмитово-сопряженной Ψ^+ имеем: $\Psi^{+'} = \Psi^+ \hat{U}^+$. Умножая справа на γ_4 , находим:

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \hat{U}^+ = \bar{\Psi} \hat{U}^{-1}. \quad (3.85)$$

Здесь мы воспользовались тождеством $\hat{U}^+ \gamma_4 = \gamma_4 \hat{U}^+$, которое следует из явного вида оператора $\hat{U}$ (3.68). Правило преобразования под действием инверсии имеет вид

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \gamma_4. \quad (3.86)$$

Поскольку интересующие нас наблюдаемые величины (средние значения, вероятности переходов), как правило, содержат квадратичные комбинации волновых функций, то нужно знать, как ведут себя при отражениях и поворотах различные билинейные комбинации введенных выше величин. Перечислим пять основных типов таких комбинаций.

Скаляр:

$$\Psi^+ \Psi = \bar{\Psi} \gamma_4 \Psi. \quad (3.87)$$

Инвариантность этой комбинации относительно любых унитарных преобразований (сохраняющих объем) следует уже из того, что это плотность вероятности.

Псевдоскаляр:

$$\Psi^+ \gamma_5 \Psi = \bar{\Psi} \gamma_4 \gamma_5 \Psi. \quad (3.88)$$

При вращении псевдоскаляр не меняется:

$$(\Psi^+ \gamma_5 \Psi)' = \Psi^+ \hat{U}^{-1} \gamma_5 \hat{U} \Psi = \Psi^+ \hat{U}^{-1} \hat{U} \gamma_5 \Psi = \Psi^+ \gamma_5 \Psi,$$

а инверсии меняет знак:

$$(\Psi^+ \gamma_5 \Psi)' = \Psi^+ \beta \gamma_5 \beta \Psi = -\Psi^+ \gamma_5 \beta^2 \Psi = -\Psi^+ \gamma_5 \Psi.$$

Полярный вектор:

$$\Psi^+ \gamma_\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma_4 \gamma_\mu \Psi \quad (\mu = 1, \dots, 4). \quad (3.89)$$

При поворотах системы координат компоненты вектора *линейно* преобразуются сами через себя:

$$(\Psi^+ \gamma_\mu \Psi)' = \Psi^+ \hat{U}^{-1} \gamma_\mu \hat{U} \Psi = \sum_\nu a_{\mu\nu} \Psi^+ \gamma_\nu \Psi.$$

При инверсии пространственные компоненты полярного вектора меняют знак:

$$(\Psi^+ \gamma_i \Psi)' = \Psi^+ \beta \gamma_i \beta \Psi = \begin{cases} -\Psi^+ \gamma_i \Psi & (i = 1, 2, 3), \\ \Psi^+ \gamma_i \Psi & (i = 4), \end{cases}$$

что следует непосредственно из свойств матриц Дирака.

Аксиальный вектор:

$$\Psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \Psi = \bar{\Psi} \gamma_4 \gamma_5 \gamma_\mu \Psi. \quad (3.90)$$

При поворотах аксиальный вектор преобразуется так же, как полярный:

$$(\Psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \Psi)' = \Psi^+ \hat{U}^{-1} \gamma_5 \gamma_\mu \hat{U} \Psi = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \Psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \Psi,$$

а при инверсии он не меняет своего вида:

$$(\Psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \Psi)' = \Psi^+ \gamma_5 \gamma_\mu \Psi,$$

поскольку в этом случае для оператора $\hat{U}$ имеем $\gamma_5 \hat{U} = \hat{U} \gamma_5$.

Тензор 2-го ранга:

$$\Psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi = \bar{\Psi} \gamma_4 \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi. \quad (3.91)$$

При поворотах компоненты тензора 2-го ранга преобразуются как произведения компонент двух векторов:

$$(\Psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi)' = \sum_{\phi\sigma} a_{\mu\phi} a_{\nu\sigma} \Psi^+ \gamma_\phi \gamma_\sigma \Psi,$$

а при инверсии

$$(\Psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi)' = \Psi^+ \beta \gamma_\mu \gamma_\nu \beta \Psi = \Psi^+ \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi.$$

3.3. Свободное электронно-позитронное поле

3.3.1. Вариационный принцип для уравнения Дирака

Рассматривая уравнение Дирака, мы описывали электроны и позитроны с помощью волновой функции в конфигурационном пространстве. Переходя к волновой функции в пространстве чисел заполнения, мы тем самым приходим к интерпретации функций $\Psi(\mathbf{r})$, $\bar{\Psi}(\mathbf{r})$ как некоторых волновых полей, квантами которых являются невзаимодействующие частицы. При

этом уравнение Дирака, так же как и уравнения Максвелла, должно рассматриваться как уравнение поля, а не уравнение для одной частицы. Квантование же электронно-позитронного поля означает, что $\Psi(\mathbf{r})$, $\bar{\Psi}(\mathbf{r})$ становятся операторами, действующими на вектор состояния, или волновую функцию, поля в пространстве чисел заполнения. Зависимость этих операторов от координат и времени и определяется уравнением Дирака.

Покажем, что уравнение Дирака может быть получено из вариационного принципа:

$$\delta \int L d^4x = 0, \quad (3.92)$$

где L – плотность функции Лагранжа – должна быть выбрана в виде

$$L = -\frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \Psi \right) - m \Psi^+ \Psi. \quad (3.93)$$

Далее будем пользоваться системой единиц, в которой $\hbar = c = 1$. Это целесообразно, поскольку фундаментальные константы задают естественные масштабы, определяющие ход атомных процессов. При таком выборе единиц измерения размерности энергии, частоты и массы совпадают и становятся равными обратной длине.

Будем рассматривать Ψ , $\bar{\Psi}$ как обобщенные координаты, а $\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu}$, $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu}$ – как обобщенные скорости. Поскольку Ψ – столбец из четырех комплексных величин, имеется восемь обобщенных координат, и мы будем обозначать их $\bar{\Psi}_\nu$, Ψ_ν . В этом представлении γ_μ – четырехрядные матрицы; их компоненты будем обозначать $(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 4$).

Составим теперь уравнения Эйлера для лагранжиана (3.93):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \Psi_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}_\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Прямое вычисление дает:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} &= -\frac{1}{2} \bar{\Psi}_\beta (\gamma_\mu)_{\beta\alpha}, & \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_\alpha}{\partial x_\mu} \right)} &= \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \Psi_\beta, \\ \frac{\partial L}{\partial \Psi_\alpha} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\Psi}_\nu}{\partial x_\beta} (\gamma_\nu)_{\beta\alpha} - m \bar{\Psi}_\alpha, \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}_\alpha} &= -\frac{1}{2} (\gamma_\nu)_{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial x_\nu} - m \Psi_\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.94), получаем уравнения Дирака:

$$\gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} + m \Psi = 0, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu - m \bar{\Psi} = 0. \quad (3.96)$$

3.3.2. Тензор энергии-импульса электронно-позитронного поля

Напомним, что для электромагнитного поля с векторным потенциалом $\mathbf{A}$ тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\mu\nu}^{\text{ЭЛМ}} = L \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu}. \quad (3.97)$$

Тензор энергии-импульса электронно-позитронного поля получается путем естественной замены $A_\rho \rightarrow \Psi_\mu, \Psi_\mu^+$. Таким образом,

$$T_{\mu\nu} = L \delta_{\mu\nu} - \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_\lambda}{\partial x_\nu} \right)} \frac{\partial \bar{\Psi}_\lambda}{\partial x_\mu} \right). \quad (3.98)$$

Обратим внимание на важное обстоятельство: при подстановке уравнений Дирака (3.95) и (3.96) в лагранжиан (3.93) получаем

$$L = 0. \quad (3.99)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \Psi \right) - m \bar{\Psi} \Psi = \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\bar{\Psi} m \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right) - m \bar{\Psi} \Psi = 0. \end{aligned}$$

Поэтому тензор энергии-импульса для дираковского поля имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\bar{\Psi}_\lambda \gamma_\nu \frac{\partial \Psi_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{\Psi}_\lambda}{\partial x_\mu} \gamma_\nu \Psi_\lambda \right). \quad (3.100)$$

Тензор энергии-импульса удовлетворяет следующему равенству:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.101)$$

Полная энергия H и импульс поля $\mathbf{P}$ равны:

$$H = \int W d\mathbf{r}, \quad (3.102)$$

$$\mathbf{P} = \int \pi d\mathbf{r}, \quad (3.103)$$

где W и π – плотность энергии и импульса соответственно:

$$W = -T_{44} = \frac{1}{2i} \left(-\bar{\Psi} \gamma_4 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \gamma_4 \Psi \right), \quad (3.104)$$

$$\pi = \frac{1}{2i} \left(\bar{\Psi} \gamma_4 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{r}} \gamma_4 \Psi \right). \quad (3.105)$$

В силу равенства (3.101) 4-вектор

$$P_\mu = -i \int T_{\mu 4} d\mathbf{r}$$

сохраняется.

Тензор $T_{\mu\nu}$ несимметричен. Выделим его симметричную часть:

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}). \quad (3.106)$$

Для нее выполняется уравнение непрерывности типа (3.101):

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \theta_{\mu\nu} = 0. \quad (3.107)$$

3.4. Квантование электронно-позитронного поля

3.4.1. Введение фермиевских операторов

Разложим $\Psi(\mathbf{r})$ в ряд по ортонормированной системе функций, являющихся решением уравнения Дирака и отвечающих определенному значению энергии (или частоты в нашей системе единиц). При этом частоты могут быть как положительными, так и отрицательными, соответствующие им функции будем обозначать $\Psi_m^{(+)}$, $\Psi_m^{(-)}$. Условие ортонормировки для них имеет вид

$$\int \Psi_m^{*(\eta)} \Psi_n^{(\eta')} d\mathbf{r} = \delta_{mn} \delta_{\eta\eta'} \quad (\eta, \eta' = \pm). \quad (3.108)$$

Разложение $\Psi(\mathbf{r})$ запишем в следующем виде:

$$\Psi = \sum_m a_m \Psi_m^{(+)} + \sum_m b_m^+ \Psi_m^{(-)}, \quad (3.109)$$

$$\bar{\Psi} = \sum_m a_m^+ \bar{\Psi}_m^{(+)} + \sum_m b_m \bar{\Psi}_m^{(-)}. \quad (3.110)$$

Квантование состоит в том, что функции Ψ , Ψ^+ мы начинаем считать операторами уничтожения и рождения частиц. Это значит, что операторами становятся коэффициенты разложения. Итак, теперь будем работать с операторами $\hat{a}_m$, $\hat{a}_m^+$, $\hat{b}_m$, $\hat{b}_m^+$ (далее крышечки над операторами будем опускать). Поскольку это поле описывает частицы со спином $1/2$, они должны иметь перестановочные соотношения фермиевского типа:

$$\begin{aligned} \{a_m, a_{m'}^+\} &= \delta_{mm'}, & \{a_m, a_{m'}\} &= \{a_m^+, a_{m'}^+\} = 0, \\ \{b_m, b_{m'}^+\} &= \delta_{mm'}, & \{b_m, b_{m'}\} &= \{b_m^+, b_{m'}^+\} = 0, \\ \{a_m, b_{m'}\} &= \{a_m, b_{m'}^+\} = \{a_m^+, b_{m'}\} = \{a_m^+, b_{m'}^+\} = 0, \end{aligned} \quad (3.111)$$

откуда

$$a_m^2 = a_m^{+2} = b_m^2 = b_m^{+2} = 0. \quad (3.112)$$

Пользуясь этими перестановочными соотношениями, найдем конкретное представление для операторов a_m , a_m^+ , b_m , b_m^+ . Введем операторы

$$n_m^{(+)} = a_m^+ a_m, \quad n_m^{(-)} = b_m^+ b_m.$$

Заметим, что

$$n_m^{(+)}{}^2 = a_m^+ a_m a_m^+ a_m = a_m^+ a_m (1 - a_m a_m^+) = a_m^+ a_m.$$

Отсюда получаем

$$n_m^{(+)}{}^2 = n_m^{(+)}, \quad n_m^{(-)}{}^2 = n_m^{(-)}. \quad (3.113)$$

Это свойство позволяет рассматривать $n_m^{(\pm)}$ как проекционные операторы. Их собственными значениями могут быть только нуль и единица. Другими словами, только такими могут быть числа заполнения состояний электронно-позитронного поля.

Введенные операторы имеют следующий смысл:

a_m – оператор уничтожения частицы с положительной энергией, т.е. электрона;

a_m^+ – оператор рождения электрона;

b_m – оператор уничтожения частицы с отрицательной энергией, т.е. позитрона;

b_m^+ – оператор рождения позитрона.

Тогда оператор

$$\Psi = \sum_m a_m \Psi_m^{(+)} + \sum_m b_m^+ \Psi_m^{(-)} \quad (3.114)$$

есть оператор уничтожения электронов и рождения позитронов (или поглощения электронов и испускания позитронов).

Аналогично оператор

$$\bar{\Psi} = \sum_m a_m^+ \bar{\Psi}_m^{(+)} + \sum_m b_m \bar{\Psi}_m^{(-)} \quad (3.115)$$

есть оператор рождения электронов и уничтожения позитронов.

3.4.2. Энергия электронно-позитронного поля

Теперь нужно выразить энергию поля (3.102) через операторы рождения и уничтожения. Вспомним, что

$$\int \Psi_m^{\dagger(+)} \Psi_{m'}^{(+)} d\mathbf{r} = \delta_{m m'}, \quad \text{или} \quad \int \bar{\Psi}_m^{(+)} \gamma_4 \Psi_{m'}^{(+)} d\mathbf{r} = \delta_{m m'}. \quad (3.116)$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\varepsilon_m^{(+)}t} \cdot \Psi_m^{(+)}(\mathbf{r}), \\ \Psi_m^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= e^{-i\varepsilon_m^{(-)}t} \cdot \Psi_m^{(-)}(\mathbf{r}), \\ \bar{\Psi}_m^{(+)}(\mathbf{r}, t) &= e^{i\varepsilon_m^{(+)}t} \cdot \bar{\Psi}_m^{(+)}(\mathbf{r}), \\ \bar{\Psi}_m^{(-)}(\mathbf{r}, t) &= e^{i\varepsilon_m^{(-)}t} \cdot \bar{\Psi}_m^{(-)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \right\} \quad (3.117)$$

где $\Psi_m^{(\pm)}(\mathbf{r}) \sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ и $\varepsilon_m^{(\pm)} = \pm\omega_m^{(\pm)}$ – энергии (частоты), соответствующие электронам и позитронам. Поэтому, согласно (3.102),

$$\begin{aligned} H &= i(-i) \sum_{m m'} \left\{ \int d\mathbf{r} \varepsilon_{m'}^{(+)} a_m^+ a_{m'} \bar{\Psi}_m^{(+)} \gamma_4 \Psi_m^{(+)} - \int d\mathbf{r} \varepsilon_{m'}^{(-)} b_m b_{m'}^+ \bar{\Psi}_m^{(-)} \Psi_{m'}^{(-)} \right\} = \\ &= \sum_m \left\{ \varepsilon_m^{(+)} a_m^+ a_m - \varepsilon_m^{(-)} b_m b_m^+ \right\}. \end{aligned}$$

Но $b_m b_m^+ = 1 - b_m^+ b_m$, и окончательное выражение для гамильтониана электронно-позитронного поля принимает вид

$$\hat{H} = \sum_m \varepsilon_m^+ a_m^+ a_m + \sum_m \varepsilon_m^- b_m^+ b_m - \sum_m \varepsilon_m^-. \quad (3.118)$$

Собственные значения этого гамильтониана равны

$$H = \sum_m \varepsilon_m^{(+)} n_m^{(+)} + \sum_m \varepsilon_m^{(-)} n_m^{(-)} - \sum_m \varepsilon_m^{(-)}. \quad (3.119)$$

Смысл полученного выражения следующий: энергия электронно-позитронного поля складывается из энергии электронов, находящихся в состояниях m с энергией $\varepsilon_m^{(+)}$, из энергии позитронов в состояниях m с энергией $\varepsilon_m^{(-)}$ и суммы энергий всех отрицательных состояний. В интерпретации Дирака занятые состояния с отрицательной энергией есть *вакуум*. Таким образом, энергия

$$E_0 = - \sum_m \varepsilon_m^{(-)} \quad (3.120)$$

есть энергия электронно-позитронного вакуума. Поскольку она отрицательна, то (3.119) не является положительно определенным выражением: энергия электронно-позитронного поля может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Более того, если первые два члена зависят от числа частиц в системе (полное число электронов и позитронов с положительной энергией конечно), то число слагаемых в последнем члене в принципе бесконечно (число состояний $m = 1, 2, \dots$).

Таким образом, мы впервые сталкиваемся с характерной для определения нулевой энергии вакуума расходимостью, возникающей при квантовании любого поля. Эту проблему можно если не решить, то обойти с помощью переопределения энергии поля как (заведомо положительной) энергии возбужденных состояний, отсчитываемой от энергии вакуума, который является основным состоянием.

С учетом сказанного, энергия электронно-позитронного поля равна

$$E = H - E_0 = \sum_m \varepsilon_m^{(+)} n_m^{(+)} + \sum_m \varepsilon_m^{(-)} n_m^{(-)}. \quad (3.121)$$

Состояния электронно-позитронного вакуума характеризуется тем, что все числа заполнения $n_m^{(+)}$, $n_m^{(-)}$ равны нулю:

$$\langle n_m^{(+)} \rangle_0 = \langle a_m^+ a_m \rangle_0 = 0, \quad \langle n_m^{(-)} \rangle_0 = \langle b_m^+ b_m \rangle_0 = 0. \quad (3.122)$$

3.4.3. Плотность тока, заряд и импульс

Выражение для 4-вектора тока имеет вид

$$j_\mu = i e \Psi^+ \gamma_\mu \Psi. \quad (3.123)$$

Оно включает в себя временную компоненту, представляющую собой плотность заряда ρ :

$$\begin{aligned} j_4 &= i \rho, \\ \rho &= e \Psi^+ \gamma_4 \Psi = e \bar{\Psi} \Psi, \end{aligned} \quad (3.124)$$

и вектор трехмерного тока

$$\mathbf{j} = i e \Psi^+ \vec{\gamma} \Psi = e \bar{\Psi} \vec{\alpha} \Psi. \quad (3.125)$$

Здесь $e = -|e|$ – заряд электрона. Полный заряд, связанный с полем, равен $Q = \int \rho d\mathbf{r}$. Подставляя сюда (3.114), (3.115), получаем

$$\begin{aligned} Q &= e \left(\sum_m a_m^+ a_m + \sum_m b_m b_m^+ \right) = \\ &= e \left(\sum_m n_m^{(+)} - \sum_m n_m^{(-)} \right) + e \sum_m 1. \end{aligned} \quad (3.126)$$

Эта формула имеет простой смысл. Полный заряд Q есть алгебраическая сумма зарядов всех электронов ($\sum_m n_m^{(+)}$), находящихся во всех возможных состояниях, всех позитронов ($\sum_m n_m^{(-)}$) и полного электрического заряда вакуума $Q_0 = e \sum_m 1$. Последнее слагаемое снова приводит к бесконечности. Поэтому целесообразно отсчитывать полный электрический заряд электронно-позитронного поля от заряда вакуума:

$$q = Q - Q_0 = e \sum_m n_m^{(+)} - e \sum_m n_m^{(-)}. \quad (3.127)$$

Использование формул (3.103), (3.114) и (3.115) дает выражение для полного импульса поля:

$$\mathbf{P} = \sum_m \mathbf{p}_m \left(n_m^{(+)} + n_m^{(-)} \right), \quad (3.128)$$

где $\mathbf{p}_m$ – импульс частицы в состоянии m (оно включает в себя и поляризацию).

3.4.4. Разложение операторов поля по плоским волнам

Запишем уравнения Дирака (3.82, 3.83) в системе единиц, где $\hbar = c = 1$:

$$(i\gamma\hat{p} + m)\Psi = 0, \quad (3.129)$$

$$\bar{\Psi}(i\gamma\hat{p} - m) = 0. \quad (3.130)$$

Здесь $\hat{p}_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ – оператор μ -компоненты импульса, выражение $\gamma\hat{p} = \gamma_\mu\hat{p}_\mu$ следует понимать как скалярное произведение двух 4-векторов.

Рассмотрим состояние дираковской частицы с определенным импульсом $\mathbf{p}$ и обозначим ее волновую функцию через $\Psi(\mathbf{p})$. Ее можно представить как плоскую волну, зависящую от времени:

$$\Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{V}} u(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\varepsilon t}. \quad (3.131)$$

Будем для определенности считать энергию $\omega = \varepsilon$ положительной:

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (3.132)$$

Амплитуда $u(\mathbf{p})$ представляет собой постоянный (не зависящий от времени) четырехкомпонентный биспинор, удовлетворяющий уравнению

$$(i\gamma p + m)u(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.133)$$

где $p = \{\mathbf{p}, i\varepsilon\}$ – четырехкомпонентный импульс.

Для отрицательных энергий $\omega = -\varepsilon$ волновую функцию

запишем в виде

$$\Psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{V}} v(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} + i\varepsilon t}, \quad (3.134)$$

где $v(\mathbf{p})$ – другой постоянный биспинор, удовлетворяющий уравнению

$$(i\gamma p - m)v(-\mathbf{p}) = 0. \quad (3.135)$$

Состояние электрона не может быть описано значением спина, поскольку оператор спина не коммутирует с гамильтонианом. Однако легко проверить, что скалярное произведение $\vec{\sigma}\vec{p}$ коммутирует с $\hat{H}$, поэтому электрон может характеризоваться проекцией спина на импульс, а его волновая функция должна быть собственной функцией оператора $\vec{\sigma}\vec{p}$, так как амплитуда удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})}{|\vec{p}|} u^r(\mathbf{p}) = r u^r(\mathbf{p}), \quad (3.136)$$

где собственные значения $r = \pm 1/2$ описывают поляризацию частицы. Будем считать, что биспинорные амплитуды ортонормированы:

$$u^{*r}(\mathbf{p})u^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}, \quad v^{*r}(\mathbf{p})v^{r'}(\mathbf{p}) = \delta_{rr'}. \quad (3.137)$$

Таким образом, при заданных импульсе и энергии частица имеет два вырожденных состояния, различающихся поляризацией r . Амплитуды этих состояний удовлетворяют следующим уравнениям:

$$(i\gamma p + m)u^r(\mathbf{p}) = 0, \quad (3.138)$$

$$(i\gamma p - m)v^r(-\mathbf{p}) = 0. \quad (3.139)$$

Величины $+m$ и $-m$ могут рассматриваться как собственные значения четырехрядной матрицы $i\gamma p$, и их собственные векторы $u^r(\mathbf{p})$ и $v^r(-\mathbf{p})$ могут быть вычислены. Использование решений для них позволяет вычислить суммы по поляризациям:

$$\sum_r u_\alpha^r(\mathbf{p}) \bar{u}_\beta^r(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\varepsilon} (i\gamma p - m)_{\alpha\beta}, \quad (3.140)$$

$$\sum_r v_\alpha^r(-\mathbf{p}) \bar{v}_\beta^r(-\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\varepsilon} (i\gamma p + m)_{\alpha\beta}, \quad (3.141)$$

которые понадобятся в дальнейшем при вычислении различных парных произведений, составленных из компонент операторов поля Ψ_α и $\bar{\Psi}_\beta$. Эти вычисления будут выполнены с помощью разложения операторов поля по плоским волнам:

$$\Psi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}r} \{a_r(\mathbf{p}) u_\alpha^r(\mathbf{p}) e^{ipx} + b_r^+ v_\alpha^r(-\mathbf{p}) e^{-ipx}\}, \quad (3.142)$$

$$\bar{\Psi}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}r} \{a_r^+(\mathbf{p}) \bar{u}_\alpha^r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_r \bar{v}_\alpha^r(-\mathbf{p}) e^{ipx}\} \quad (3.143)$$

(ср. с формулами (3.109) и (3.110)). Разложения (3.142) и (3.143) учитывают состояния поля со всеми возможными импульсами, поляризациями, а также положительными и отрицательными значениями энергии частиц.

3.5. Фундаментальные характеристики квантованного электронно-позитронного поля

3.5.1. Антиккоммутаторы

Квантование электронно-позитронного поля связано с разложением операторной волновой функции $\Psi(x)$ по ортого-

нальному базису с коэффициентами, являющимися ферми-операторами рождения и уничтожения электронов и позитронов. По этой причине мы должны вычислять антикоммутаторы операторов поля. Из перестановочных соотношений для ферми-операторов следует, что

$$\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')\} = 0, \quad \{\bar{\Psi}_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(x')\} = 0. \quad (3.144)$$

Рассмотрим далее антикоммутатор двух операторов $\Psi_\alpha(x)$ и $\bar{\Psi}_\beta(x')$, взятых в гайзенберговском представлении. Пользуясь разложением Ψ по плоским волнам и перестановочными соотношениями для ферми-операторов, получаем:

$$\begin{aligned} \{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x')\} &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, r} u_\alpha^r(\mathbf{p}) \bar{u}_\beta^r(\mathbf{p}) e^{ip(x-x')} + \\ &+ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, r} v_\alpha^r(-\mathbf{p}) \bar{v}_\beta^r(-\mathbf{p}) e^{-ip(x-x')}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Обозначим входящие сюда суммы как

$$-i S_{\alpha\beta}^+(x - x') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, r} u_\alpha^r(\mathbf{p}) \bar{u}_\beta^r(\mathbf{p}) e^{ip(x-x')}, \quad (3.146)$$

$$-i S_{\alpha\beta}^-(x - x') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}, r} v_\alpha^r(-\mathbf{p}) \bar{v}_\beta^r(-\mathbf{p}) e^{-ip(x-x')}. \quad (3.147)$$

Суммы по поляризациям представляем формулами (3.140) и (3.141). Тогда величины, определенные соотношениями (3.146) и (3.147), могут быть записаны в следующем виде:

$$-S_{\alpha\beta}^+ = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon} (i\gamma p - m)_{\alpha\beta} e^{ipx} = -\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon} e^{ipx}, \quad (3.148)$$

$$-S_{\alpha\beta}^- = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon} (+i\gamma p - m)_{\alpha\beta} e^{-ipx} = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)_{\alpha\beta} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon} e^{-ipx}. \quad (3.149)$$

В последнем равенстве мы учли, что $\hat{p} = -i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Переходя от суммирования по $\mathbf{p}$ к интегрированию, представляем эти выражения в окончательном виде:

$$S^\pm(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \Delta_\pm(x), \quad (3.150)$$

где

$$\Delta_\pm(x) = \frac{\mp i}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} \frac{1}{2\varepsilon} e^{\pm i p x}, \quad \varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (3.151)$$

С учетом соотношений (3.145) и всех последующих запишем выражение для антикоммутатора двух операторов поля:

$$\{\Psi_\alpha(x), \Psi_\beta^+(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x - x'), \quad (3.152)$$

$$S_{\alpha\beta}(x) = S_{\alpha\beta}^+(x) + S_{\alpha\beta}^-(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta(x), \quad (3.153)$$

$$\Delta(x) = \Delta_+(x) + \Delta_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} d\mathbf{p}, \quad (3.154)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (3.155)$$

3.5.2. Хронологическое и нормальное произведения

Аналогично тому, как для квантованного электромагнитного поля были введены понятия хронологического и нормального произведений, для электронно-позитронного поля их также следует ввести, учитывая только различие в перестановочных соотношениях для бозе- и ферми-операторов.

Если $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ – какие-либо две компоненты операторов поля $\Psi(x_1)$ и $\bar{\Psi}(x_2)$, то их хронологическое произведение

определяется следующим образом:

$$T(\varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2)) = \begin{cases} \varphi_1(x_1) \varphi_2(x_2), & t_1 > t_2 \\ -\varphi_2(x_2) \varphi_1(x_1), & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (3.156)$$

Знак минус при $t_1 < t_2$ учитывает как раз антикоммутативность ферми-операторов. Хронологическое произведение произвольного числа операторов определяется формулой

$$T(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)) = \delta_P \varphi_{i_1}(x_{i_1}) \varphi_{i_2}(x_{i_2}) \dots \varphi_{i_n}(x_{i_n}). \quad (3.157)$$

В правой части операторы расставлены в хронологическом порядке, т.е. $t_{i_1} > t_{i_2} > \dots > t_{i_n}$, а δ_P равно $+1$ или -1 в зависимости от четности перестановки операторов в левой части по отношению к операторам в правой части.

Введем теперь нормальное произведение операторов. Если $\Psi = A + B^+$ и $\bar{\Psi} = A^+ + B$, где A и B – соответственно операторы поглощения электрона и позитрона, а A^+ и B^+ – операторы рождения этих частиц, то нормальное произведение двух этих операторов поля определяется так:

$$\begin{aligned} N(\Psi(x) \bar{\Psi}(y)) &= N[(A(x) + B^+(x)) (A^+(y) + B(y))] = \\ &= -A^+(y)A(x) + A(x)B(y) + B^+(x)A^+(y) + B^+(x)B(y), \end{aligned} \quad (3.158)$$

т.е. в нормальном произведении операторы рождения стоят слева от операторов уничтожения, причем меняется знак при перестановке двух операторов.

Данное выражение дополняется двумя другими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} N(\Psi(x) \Psi(y)) &= \Psi(x) \Psi(y), \\ N(\bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}(y)) &= \bar{\Psi}(x) \bar{\Psi}(y). \end{aligned} \right\} \quad (3.159)$$

В случае произвольного числа операторов рождения и уничтожения при переходе от некоторого произведения к нормальному знак определяется четностью соответствующей перестановки, что можно выразить символическим равенством:

$$N(Z_1 Z_2 \dots Z_n) = \delta_P Z_{i_1} Z_{i_2} \dots Z_{i_n}, \quad (3.160)$$

где каждый из операторов Z является оператором либо рождения, либо уничтожения частицы.

Пользуясь разложениями (3.142) и (3.143) операторов спинорного поля и указанными выше определениями, можно вычислить разность T - и N -произведения двух операторов поля:

$$T(\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')) - N(\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')) = \begin{cases} -i S_{\alpha\beta}^+(x - x'), & t' < t, \\ i S_{\alpha\beta}^-(x - x'), & t' > t, \end{cases} \quad (3.161)$$

где величины $S_{\alpha\beta}^\pm(x - x')$ определены формулами (3.148) и (3.149). Это выражение можно представить в виде

$$T(\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')) - N(\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')) = S_{\alpha\beta}^c(x - x'), \quad (3.162)$$

$$S_{\alpha\beta}^c(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right)_{\alpha\beta} \Delta^c(x), \quad (3.163)$$

а $\Delta^c(x)$ определяется интегралом:

$$\Delta^c(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\varepsilon|t|} \frac{d\mathbf{p}}{\varepsilon}, \quad (3.164)$$

причем ε дается величиной (3.155).

Нетрудно проверить, что функция $S^c(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(i\gamma\hat{p} + m) S^c(x) = -i \delta(x), \quad (3.165)$$

т.е. $iS^c(x)$ является функцией Грина для уравнения Дирака.

Разложим $S_{\alpha\beta}^c(x)$ в интеграл Фурье:

$$S_{\alpha\beta}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int S_{\alpha\beta}^c(p) e^{ipx} d^4p. \quad (3.166)$$

Используя соотношение (3.151), для фурье-компоненты $S_{\alpha\beta}^c(x)$ получаем

$$S_{\alpha\beta}^c(p) = i \frac{(i\gamma\hat{p} - m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2 - i\delta}, \quad (3.167)$$

где 4-импульс $p = \{\mathbf{p}, i\varepsilon\}$, а его квадрат $p^2 = \mathbf{p}^2 - \varepsilon^2$. В знаменателе (3.167) стоит бесконечно малая мнимая добавка ($\delta > 0$).

Разность T -произведения и N -произведений двух операторов поля была названа в главе о квантованном электромагнитном поле сверткой. В случае электронно-позитронного поля ее также следует называть сверткой и обозначать аналогичным образом. Потому соотношение (3.162) можно записать в виде

$$\overbrace{\Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x')} = S_{\alpha\beta}^c(x - x'). \quad (3.168)$$

Из выражения (3.167) следует, что полюса функции Грина электронно-позитронного поля описывают закон дисперсии электронов и позитронов:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (3.169)$$

Обратим внимание на полную аналогию математического описания свободного электромагнитного и электронно-позитронного полей. Спектр свободных частиц в обоих полях определяется полюсами функции Грина волнового уравнения или уравнения Дирака. В обоих случаях функция Грина (с точностью до постоянного множителя) совпадает со сверткой

пары операторов поля, определенной как разность хронологического и нормального произведений операторов. Эти величины – функции Грина и свертка – являются важнейшими элементами теории возмущений для взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей (квантовой электродинамики). В следующей главе мы покажем, как ряды теории возмущений по этому взаимодействию выражаются через функции Грина (свертки) свободных полей.

Глава 4

Квантовая электродинамика

4.1. Уравнения квантовой электродинамики

4.1.1. Постулирование уравнений для взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей

В двух предыдущих главах были сформулированы уравнения для свободного электромагнитного и электронно-позитронного полей исходя из вариационного принципа Лагранжа. Уравнения (3.95) и (3.96) для свободного электронно-позитронного поля можно обобщить на случай, когда электрон взаимодействует с электромагнитным полем, используя известный из классической физики принцип замены импульса частицы на обобщенный импульс:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (4.1)$$

Распространяя этот принцип на релятивистскую квантовую механику, можно потребовать аналогичное для оператора 4-импульса:

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} A_\mu, \quad (4.2)$$

где $\hat{p}_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ — оператор компоненты 4-импульса, а A_μ — 4-компонентный потенциал. Замена (4.2) эквивалентна замене

производных

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\frac{e}{c}A_\mu \quad (4.3)$$

в уравнениях Дирака, и вместо уравнений (3.95) и (3.96) получаем два обобщенных уравнения для дираковской частицы в поле (в системе единиц $\hbar = c = 1$):

$$\left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu \right) + m \right] \Psi = 0, \quad (4.4)$$

$$\bar{\Psi} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ieA_\mu \right) - m \right] = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение $\square A_\mu = 0$ для свободного электромагнитного поля при наличии электрических токов запишем так, как в классической физике:

$$\square A_\mu = -j_\mu. \quad (4.6)$$

Для плотности электрического тока в состоянии Ψ примем выражение

$$j_\mu = ie \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi, \quad (4.7)$$

формально совпадающее с выражением для плотности тока в случае свободного движения. Таким образом мы приходим к системе связанных уравнений (4.4)–(4.5) для электронно-позитронного поля и уравнению

$$\square A_\mu = -ie \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi \quad (4.8)$$

для электромагнитного поля.

Можно проверить, что эта система уравнений релятивистски ковариантна и градиентно инвариантна, т.е. удовлетворяет фундаментальным принципам физики, а значит, несмотря на интуитивный характер вывода, является правильной.

4.1.2. Функция Лагранжа и тензор энергии-импульса

Мы установили (постулировали) систему уравнений для отдельного электрона, находящегося в электромагнитном поле. Чтобы получить уравнения для квантованных полей с произвольным числом электронов, мы должны, как и раньше, рассматривать величины Ψ и A_μ как операторы, действующие в пространстве чисел заполнения. Уравнения квантовой электродинамики можно получить из вариационного принципа:

$$\delta \int L d^4x = 0, \quad (4.9)$$

где L – плотность функции Лагранжа.

Будем сначала рассматривать Ψ , $\bar{\Psi}$, A_μ как с-числа и запишем плотность функции Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_{e\gamma} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + m \right) \Psi + \frac{1}{2} \Psi \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - m \right) \bar{\Psi} + \\ &\quad + ie \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi A_\nu. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь L_0 соответствует свободному электромагнитному и электронно-позитронному полям, а $L_{e\gamma}$ – их взаимодействию (последний член).

Уравнения Эйлера, определяющие экстремум функционала в левой части (4.9), должны иметь следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} \right)} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} = 0. \quad (4.12)$$

Вычислим входящие сюда производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial A_\nu} &= ie\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi, & \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)} &= -\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}, \\ \frac{\partial L}{\partial\Psi} &= \frac{1}{2}\bar{\Psi}(ie\gamma_\nu A_\nu - m) + \frac{1}{2}\left[\gamma_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + ieA_\nu\right) - m\right]\bar{\Psi}, \\ \frac{\partial L}{\partial\bar{\Psi}} &= \frac{1}{2}\Psi(ie\gamma_\nu A_\nu - m) - \frac{1}{2}\left[\gamma_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - ieA_\nu\right) + m\right]\Psi, \\ \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\right)} &= -\frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu, & \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\right)} &= \frac{1}{2}\Psi\gamma_\mu.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнения Эйлера, получаем уравнения (4.4)–(4.6) взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей. Заметим, что часто плотность функции Лагранжа, описывающая взаимодействие между полями, записывается в виде скалярного произведения потенциала электромагнитного поля на вектор плотности тока:

$$L_{e\gamma} = A_\mu j_\mu. \quad (4.13)$$

Этот ток может быть определен с помощью L согласно общей формуле:

$$j_\mu = -ie\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu}\right)}\Psi - \bar{\Psi}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\right)}\right) = ie\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi. \quad (4.14)$$

Тензор энергии-импульса также может быть вычислен с по-

мощью общей формулы

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= L\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\mu}\right)}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\nu}\right)}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu} = \\
 &= \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho}\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\rho} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}\gamma_\nu\frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x_\mu}\gamma_\nu\Psi.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Он представляет собой сумму выражений для тензора энергии-импульса электромагнитного и электронно-позитронного полей.

Эта формула выведена для классических величин A_μ , Ψ и $\bar{\Psi}$. В случае квантованных полей тензору энергии-импульса соответствует эрмитов оператор, получающийся симметризацией отдельных членов в (4.15).

4.2. Матрица рассеяния

4.2.1. Представление взаимодействия

Квантовая электродинамика занимается исследованием динамической системы, объединяющей электромагнитное и электронно-позитронное поля. Гамильтониан этой системы H разбит на две части: $H = H_0 + V$, где H_0 – гамильтониан свободных полей, а V описывает их взаимодействие. Волновая функция Φ подчиняется уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi. \tag{4.16}$$

В этом уравнении $H = H_0 + V$ не зависит от времени, и временная зависимость переносится на волновую функцию $\Phi(t)$.

Представим формально функцию $\Phi(t)$ в виде произведения

$$\Phi(t) = e^{-iH_0 t} \tilde{\Phi}(t), \tag{4.17}$$

в котором функция $\tilde{\Phi}(t)$ подчиняется уравнению, получаемому подстановкой выражения (4.17) в уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t} = V(t)\tilde{\Phi}, \quad (4.18)$$

где

$$V(t) = e^{iH_0t} V e^{-iHt}. \quad (4.19)$$

Величина $\tilde{\Phi}(t)$, как и оператор $V(t)$, зависят от времени. Такое представление называют представлением взаимодействия.

Интегрируя уравнение (4.18) в пределах времени от t_0 до t , получаем

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(t_0) - i \int_{t_0}^t V(t') \tilde{\Phi}(t') dt'. \quad (4.20)$$

Итерируя это уравнение, записываем решение в виде бесконечного ряда:

$$\tilde{\Phi}(t) = S(t, t_0) \tilde{\Phi}(t_0), \quad (4.21)$$

где

$$S(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t V(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 V(t_1) V(t_2) + \dots \quad (4.22)$$

имеет смысл оператора эволюции, переводящего систему из времени t_0 к моменту t .

Общий член этого ряда представляет собой n -кратный интеграл

$$(-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n V(t_1) V(t_2) \cdots V(t_n), \quad (4.23)$$

в котором интегрирование ведется по упорядоченной последовательности времен: $t_n < t_{n-1} < \cdots t_2 < t_1 < t$. Можно поставить перед всем подынтегральным выражением символ хронологического произведения операторов, уже введенный в предыдущих главах при обсуждении свертки операторов поля, т.е. записать подынтегральное выражение в виде $T\{V(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n)\}$. Под знаком T -произведения операторы $V(t_i)$ можно переставлять как угодно, при этом знак такого произведения не меняется, поскольку оператор V содержит произведение двух фермиевских операторов.

В выражении (4.23) можно сделать $n!$ таких перестановок, и при любой перестановке n -кратный интеграл не изменит своей величины. Вместе с тем сумма $n!$ таких членов образует интеграл, в котором интегрирование по каждой переменной t_i ведется в одинаковых пределах от t_0 до t . Таким образом, с помощью введения операции T -произведения интеграл (4.23) можно заменить на следующий:

$$\frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \cdots \int_{t_0}^t dt_n T\{V(t_1)V(t_2)\cdots V(t_n)\}. \quad (4.24)$$

Тогда ряд (4.22) сворачивается в экспоненту

$$S(t, t_0) = T e^{-i \int_{t_0}^t dt' V(t')}. \quad (4.25)$$

Именно возможностью получения такого простого выражения для оператора эволюции и обусловлено введение понятия хронологического произведения, с которым мы встречались ранее.

4.2.2. Матрица рассеяния в квантовой электродинамике

Основными задачами квантовой электродинамики являются задачи о столкновениях частиц, которые формулируются следующим образом: задано состояние электромагнитного и электронно-позитронного полей в момент времени $t = -\infty$ и требуется определить состояние полей при $t = \infty$. В представлении взаимодействия эти состояния описываются функциями $\tilde{\Phi}(-\infty)$ и $\tilde{\Phi}(\infty)$. Согласно (4.21), они связаны между собой соотношением:

$$\tilde{\Phi}(\infty) = S \tilde{\Phi}(-\infty), \quad (4.26)$$

где оператор S имеет следующий вид:

$$S \equiv S(\infty, -\infty) = T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t)}. \quad (4.27)$$

Оператор S называется матрицей рассеяния, или S -матрицей.

Будем полагать, что в начальном и конечном состоянии частицы являются свободными, т.е. при $t = \pm\infty$ оператор взаимодействия $V(t)$ обращается в нуль. Так как при $V \rightarrow 0$ вектор состояния в представлении взаимодействия совпадает с вектором состояния в гайзенберговском представлении, то можно считать, что $\tilde{\Phi}(-\infty) = \Phi^0$, и записать (4.26) в виде $\tilde{\Phi}(\infty) = S\Phi^0$. Если в начальный момент времени $t = -\infty$ система находилась в состоянии Φ_i^0 , то при $t = \infty$ ее состояние

$$\tilde{\Phi}(\infty) = S\Phi_i^0. \quad (4.28)$$

Тогда амплитуда вероятности перехода системы из состояния Φ_i^0 при $t = -\infty$ в состояние Φ_f^0 при $t = \infty$ равна

$$(\Phi_f^0, \Phi(\infty)) = (\Phi_f^0, S\Phi_i^0) = (f|S|i). \quad (4.29)$$

Таким образом, вероятности различных процессов описываются элементами матрицы рассеяния S , связывающими соответствующие начальные и конечные состояния.

Введем теперь величину $V(t)$ в квантовой электродинамике. Гамильтониан взаимодействия V определяется как лагранжиан взаимодействия с обратным знаком, поэтому, согласно (4.13),

$$V(t) = - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d\mathbf{r},$$

отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt = - \int j_\mu(x) A_\mu(x) d^4x \equiv \int U(x) d^4x.$$

Окончательно S -матрица в квантовой электродинамике имеет вид:

$$S = T e^{-i \int U(x) d^4x}, \quad (4.30)$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T \{U(x_1) \cdots U(x_n)\}, \quad (4.31)$$

$$U(x) = -j_\mu(x) A_\mu(x), \quad (4.32)$$

а интегрирование по каждой переменной производится по всему четырехмерному пространству.

Ток $j_\mu(x)$ определяется выражением (4.14). В квантовой механике можно переписать выражение для тока, представив его в следующем виде:

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\bar{\Psi}_\alpha(x) \Psi_\beta(x) - \Psi_\beta(x) \bar{\Psi}_\alpha(x)). \quad (4.33)$$

Поскольку операторы $\bar{\Psi}_\alpha(x)\Psi_\beta(x)$ и $\Psi_\beta(x)\bar{\Psi}_\alpha(x)$ отличаются лишь c -числом, выражение (4.33) отличается от исходного (4.14) тоже c -числом и не нарушает условия $\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$, а также не создает бесконечного заряда вакуума. Новое выражение для тока можно записать как нормальное произведение операторов поля:

$$j_\mu(x) = ie N \left(\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \Psi(x) \right). \quad (4.34)$$

По этой причине величина (4.32) для $U(x)$ также имеет вид нормального произведения:

$$U(x) = -ie N \left(\bar{\Psi}(x) \gamma_\mu A_\mu \Psi(x) \right), \quad (4.35)$$

и теперь n -й член разложения S -матрицы можно записать так:

$$S^{(n)} = \frac{(-e)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots \int d^4x_n T \left\{ N \left(\bar{\Psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1} \Psi(x_1) \right) \cdots \right. \\ \left. N \left(\bar{\Psi}(x_n) \gamma_{\mu_n} A_{\mu_n} \Psi(x_n) \right) \right\}. \quad (4.36)$$

4.2.3. Теорема Вика

Как видно из последнего соотношения, дальнейшая задача вычисления рядов теории возмущений для S -матрицы сводится к вычислению T -произведений операторов поля. Поскольку операторы фермионного и бозонного полей коммутируют между собой, каждое T -произведение в (4.36) разбивается на произведение двух хронологических произведений – только от фермионных и только от бозонных операторов.

Используем теорему Вика, которая утверждает, что T -произведение операторов, являющихся либо операторами рождения, либо операторами уничтожения, разбивается на

сумму нормальных произведений со всеми возможными свертками.

Напомним, что свертка двух операторов φ_i и φ_k определяется как разность их хронологического и нормального произведений:

$$\overbrace{\varphi_i \varphi_k} = T(\varphi_i \varphi_k) - N(\varphi_i \varphi_k). \quad (4.37)$$

Утверждение, составляющее теорему Вика, заключается в следующем алгебраическом тождестве:

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n) &\equiv \delta_P \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_n} = N(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n) + \\ &+ N(\overbrace{\varphi_1 \varphi_2} \varphi_3 \dots \varphi_n) + N(\overbrace{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3} \varphi_4 \dots \varphi_n) + \dots + \\ &+ N(\overbrace{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4} \dots \varphi_n) + \dots + N(\overbrace{\varphi_1 \varphi_2} \dots \overbrace{\varphi_{n-1} \varphi_n}) + \dots \end{aligned} \quad (4.38)$$

Первый член представляет N -произведение всех операторов, стоящих в левой части тождества, затем идут N -произведения, содержащие одну свертку (причем перебираются все возможности), N -произведения с двумя свертками и т.д. В последней серии членов все операторы входят во всевозможные свертки.

Разумеется, исходное T -произведение содержит четное число операторов, причем число операторов рождения равно числу операторов уничтожения для каждого (фермионного и бозонного) поля, поскольку свертка двух операторов рождения или двух операторов уничтожения равна нулю. Напомним также, что символ δ_P в первой строке (4.38) равен ± 1 в зависимости от четности перестановки $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ фермионных операторов, при помощи которой исходное хронологическое произведение переходит в нормально упорядоченное.

Доказательство тождества (4.38) почти очевидно. Действительно, если в T -произведении рядом стоят два оператора,

причем оператор рождения стоит справа от оператора уничтожения, то эту пару можно заменить на сумму двух членов

$$T(\varphi_i \varphi_k) = N(\varphi_i \varphi_k) + \widehat{\varphi_i \varphi_k}, \quad (4.39)$$

согласно определению (4.37). Поступая аналогичным образом с парой "неправильно" стоящих операторов, мы приходим к выражению (4.38). В предыдущих двух главах было показано, что свертки операторов электронно-позитронного полей и электромагнитного поля являются c -числами и их можно вынести за знак N -произведения. Но это и означает, что T -произведение разбивается на сумму членов с нормальными произведениями, содержащими $n, n-2, \dots, 2, 0$ операторов. Тогда отдельные слагаемые описывают вклад в амплитуду рассеяния различных процессов с участием разного числа частиц.

Заметим, что матричный элемент от T -произведения между состояниями вакуума $|0\rangle$ и $\langle 0|$ выражается только суммой членов со всеми возможными свертками. Матричный элемент любого другого члена в (4.38) обратится в нуль, поскольку в этих случаях в каждом нормальном произведении справа стоят операторы уничтожения, которые при действии на волновую функцию вакуума дают нуль. Таким образом, например, в случае бозе-операторов

$$\langle 0|T(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4)|0\rangle = \widehat{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4} + \widehat{\varphi_1 \varphi_3 \varphi_2 \varphi_4} + \widehat{\varphi_1 \varphi_4 \varphi_2 \varphi_3},$$

а в случае ферми операторов во втором члене в правой части стоит знак минус.

4.2.4. Диаграммы Фейнмана

Теорема Вика позволяет вычислять элементы матрицы рассеяния, сводя их к произведению сверток ферми- или бозе-операторов. Рассмотрим, как работает теорема Вика на примере поправки второго порядка:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int \int d^4x d^4x' T(j_\mu(x) A_\mu(x) j_\nu(x') A_\nu(x')). \quad (4.40)$$

Поскольку электронные и фотонные операторы коммутируют друг с другом, это выражение можно записать в виде

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int \int d^4x d^4x' T(j_\mu(x) j_\nu(x')) T(A_\mu(x) A_\nu(x')). \quad (4.41)$$

Сначала рассмотрим упругое рассеяние двух электронов. Пусть в начальном состоянии имеется два электрона с 4-импульсами p_1 и p_2 , а в конечном состоянии – с импульсами p_3 и p_4 (ради простоты спиновые индексы опускаем). Поскольку в обоих состояниях фотоны отсутствуют (поле находится в вакуумном состоянии), то матричный элемент от фотонных операторов

$$-iD_{\mu\nu}(x - x') = \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle \quad (4.42)$$

есть не что иное, как свертка.

Для T -произведения потребуется вычислить матричный элемент

$$\langle 34 | T j_\mu(x) j_\nu(x') | 12 \rangle = \langle 0 | a_3 a_4 T j_\mu(x) j_\nu(x') a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle, \quad (4.43)$$

где индексы 1, 2, 3, 4 дают краткую запись состояний электрона с импульсами p_1, p_2, p_3, p_4 . Оператор тока $j_\mu = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$, где

Ψ и $\bar{\Psi}$ могут быть разложены по плоским волнам. Разложения (3.142–3.143) для простоты запишем в виде

$$\Psi = \sum_p (a_p \Psi_p + b_p^+ \Psi_{-p}), \quad \bar{\Psi} = \sum_p (a_p^+ \bar{\Psi}_p + b_p \bar{\Psi}_{-p}). \quad (4.44)$$

Поскольку в процессе, который мы рассматриваем, позитронов нет, в выражениях для Ψ , $\bar{\Psi}$ следует оставить лишь первые слагаемые, отвечающие электронам.

Подставляя эти разложения в (4.43), приходим к матричным элементам по вакуумному состоянию от произведения восьми ферми-операторов:

$$\langle 0 | T a_3 a_4 a_{p_1} a_{p_1'}^+ a_{p_2} a_{p_2'}^+ a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle. \quad (4.45)$$

По теореме Вика это выражение должно распадаться на произведение сверток четырех электронных операторов, при этом 4-импульсы p_1' и p_2' должны совпадать с 4-импульсами 4 или 3, а 4-импульсы p_1 и p_2 – с 4-импульсами 2 или 1. Таким образом, матричный элемент (4.45) распадается на сумму четырех членов. Изобразим их с помощью символов сверток. Для матричного элемента (4.43) имеем:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | a_3 a_4 T (j_\mu(x) j_\nu(x')) a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle = \\ & = \langle 0 | \underbrace{a_3 a_4}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi')}_{\text{св}} a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle + \\ & + \langle 0 | \underbrace{a_3 a_4}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi')}_{\text{св}} a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle + \\ & + \langle 0 | \underbrace{a_3 a_4}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi')}_{\text{св}} a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle + \\ & + \langle 0 | \underbrace{a_3 a_4}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}_{\text{св}} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi')}_{\text{св}} a_2^+ a_1^+ | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.46)$$

При сворачивании внешнего оператора с Ψ или $\bar{\Psi}$ из суммы по импульсам выбирается лишь один член с импульсом внешнего оператора. В результате для матричного элемента (4.43) получаем

$$\begin{aligned} \langle 34 | T j_\mu(x) j_\nu(x') | 12 \rangle = & (\bar{\Psi}_4 \gamma_\mu \Psi_2) (\bar{\Psi}'_3 \gamma_\nu \Psi'_1) + (\bar{\Psi}_3 \gamma_\mu \Psi_1) (\bar{\Psi}'_4 \gamma_\nu \Psi'_2) - \\ & - (\bar{\Psi}_3 \gamma_\mu \Psi_2) (\bar{\Psi}'_4 \gamma_\nu \Psi'_1) - (\bar{\Psi}_4 \gamma_\mu \Psi_1) (\bar{\Psi}'_3 \gamma_\nu \Psi'_2). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Знак "—" появляется из-за нечетности перестановки ферми-операторов.

Два члена в первой и второй скобках правой части выражения (4.47) отличаются лишь перестановкой индексов μ, ν и x, x' . После интегрирования по d^4x и d^4x' четыре члена в (4.47) дают попарно совпадающие результаты, так что матричный элемент становится равен

$$\begin{aligned} S_{fi} = & ie^2 \int \int d^4x d^4x' D_{\mu\nu}(x - x') \times \\ & \times \left\{ (\bar{\Psi}_4 \gamma_\mu \Psi_2) (\bar{\Psi}'_3 \gamma_\nu \Psi'_1) - (\bar{\Psi}_4 \gamma_\mu \Psi_1) (\bar{\Psi}'_3 \gamma_\nu \Psi'_2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Электронные волновые функции – плоские волны (4.44), поэтому выражение в фигурных скобках в (4.48) есть

$$\begin{aligned} \left\{ \dots \right\} = & (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1) e^{-i(p_2 - p_4)x - i(p_1 - p_3)x'} - \\ & - (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2) e^{-i(p_1 - p_4)x - i(p_2 - p_3)x'} = \\ = & \left\{ (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1) e^{-i[(p_2 - p_4) + (p_3 - p_1)]\xi/2} - \right. \\ & \left. - (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2) e^{-i[(p_1 - p_4) + (p_3 - p_2)]\xi/2} \right\} e^{-i(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)X}, \end{aligned}$$

где $X = (x + x')/2$, $\xi = x - x'$. Интегрирование по $d^4x d^4x'$ можно заменить интегрированием по $d^4\xi d^4X$. Интеграл по d^4X

дает δ -функцию, благодаря которой сумма 4-импульсов сталкивающихся частиц сохраняется:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4. \quad (4.49)$$

Подставляя приведенное выше выражение $\{\dots\}$ в формулу (4.48), получаем следующий результат:

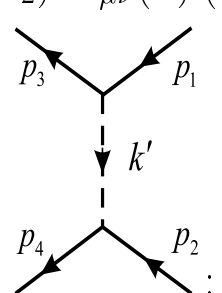
$$S_{fi} = ie^2 \left\{ (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) D_{\mu\nu}(p_4 - p_2) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1) - \right. \\ \left. - (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1) D_{\mu\nu}(p_4 - p_1) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2) \right\}. \quad (4.50)$$

Здесь

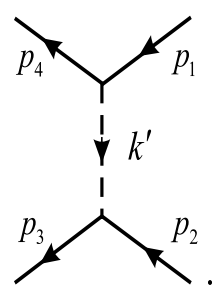
$$D_{\mu\nu}(k) = \int D_{\mu\nu}(\xi) e^{ik\xi} d^4\xi \quad (4.51)$$

есть фотонный пропагатор в импульсном представлении.

Каждый из двух членов в (4.50) может быть представлен в виде диаграммы Фейнмана:

$$ie^2 (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) D_{\mu\nu}(k) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1) =$$


$$; \quad (4.52)$$

$$ie^2 (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1) D_{\mu\nu}(k') (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_2) =$$


$$. \quad (4.53)$$

В первом случае $k = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$, а во втором $k' = p_1 - p_4 = p_3 - p_2$.

Диаграммы построены по следующему принципу: каждой входящей сплошной линии соответствует начальный электрон, выходящей – рассеянный электрон, штриховой – фотон. Точка пересечения трех линий (вершина) соответствует испусканию или поглощению электроном фотона. Входящей сплошной линии соответствует биспинорная амплитуда электрона u_α , а выходящей – $\bar{u}_\alpha$, штриховой линии сопоставляется множитель $-i D_{\mu\nu}(k)$; вершине сопоставляется матрица γ_μ . В каждой вершине суммарный импульс входящих частиц равен суммарному импульсу выходящих. Эти правила соответствия между аналитическими выражениями и графическими изображениями поправок, входящих в матрицу рассеяния, сохраняются во всех порядках теории возмущений.

Диаграммы (4.52) и (4.53) описывают процесс рассеяния электронов, при котором первый электрон, как говорят, виртуально испускает фотон, а второй поглощает его. Таким образом, во втором порядке теории возмущений взаимодействие двух электронов осуществляется посредством обмена виртуальным фотоном. Понятие "виртуальной" частицы понимается в том смысле, что в начальном и конечном состояниях ее нет.

Мы рассмотрели простейший процесс рассеяния двух электронов. Если бы мы рассматривали рассеяние электрона на позитроне, то соответствующий вклад в матрицу рассеяния определялся бы диаграммами того же типа (4.52) и (4.53), но с другой расстановкой 4-импульсов на линиях. Начальные импульсы частиц в этом случае обозначим p_- и p_+ , а конечные – p'_- и p'_+ . Направление позитронных линий меняется по отно-

шению к электронным, и, согласно Фейнману, позитрон можно рассматривать как электрон, движущийся в обратном времени. Позитронным линиям следует приписать 4-импульсы $-p_+$ и $-p'_+$.

Теперь вычислим вклад второго порядка в процессе рассеяния фотона на электроне (эффект Комптона). Пусть в начальном состоянии фотон и электрон имеют 4-импульсы k_1 и p_1 , а в конечном — k_2 и p_2 . Индексы поляризации фотона, а также проекции спина электрона для простоты будем опускать. Соответствующий элемент матрицы рассеяния распадается на произведение двух множителей, отвечающих фотону и электрону:

$$\langle 2 | T (A_\mu(x) A_\nu(x')) | 1 \rangle = \langle 0 | c_2 T (A_\mu(x) A_\nu(x')) c_1^+ | 0 \rangle, \quad (4.54)$$

$$\langle 2 | T (j_\mu(x) j_\nu(x')) | 1 \rangle = \langle 0 | a_2 T [(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) (\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi)] a_1^+ | 0 \rangle. \quad (4.55)$$

Здесь c и c^+ — операторы уничтожения и рождения фотона, а a и a^+ , как обычно, — электрона.

Вектор-потенциал электромагнитного поля разлагается по плоским волнам с коэффициентами, являющимися бозе-операторами:

$$A_\mu = \sum_k (c_k A_{k\mu} + c_k^+ A_{k\mu}^*). \quad (4.56)$$

Согласно теореме Вика,

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_2 T (A_\mu(x) A_\nu(x')) c_1^+ | 0 \rangle = \\ = \underbrace{c_2 A_\mu}_{\text{фотон}} \underbrace{A'_\nu c_1^+}_{\text{электрон}} + \underbrace{c_2 A_\mu A'_\nu c_1^+}_{\text{фотон}} = A_{2\mu}^* A'_{1\nu} + A_{1\mu} A_{2\nu}^*. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Электронный матричный элемент (4.55) расписывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (4.2.40) &= \langle 0 | \underbrace{a_2 (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}_{\text{}} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi')}_{\text{}} a_1^+ | 0 \rangle + \\
 &+ \langle 0 | \underbrace{a_2 (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)}_{\text{}} \underbrace{(\bar{\Psi}' \gamma_\nu \Psi')}_{\text{}} a_1^+ | 0 \rangle = \\
 &= i \bar{\Psi}_2 \gamma_\mu G \gamma_\nu \Psi'_1 + i \bar{\Psi}'_2 \gamma_\nu G \gamma_\mu \Psi_1.
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

Свертке электронных операторов, показанных сверху в обоих слагаемых, соответствует функция Грина электронов

$$G_{\alpha\beta}(x - x') = -i \langle 0 | T \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(x') | 0 \rangle. \tag{4.59}$$

Объединив выражения (4.57) и (4.58), запишем вклад в рассматриваемый матричный элемент матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= -ie^2 \int \int d^4x d^4x' \bar{\Psi}_2(x) \gamma_\mu G(x - x') \gamma_\nu \Psi_1(x') \times \\
 &\times \{ A_{2\mu}^*(x) A_{1\nu}(x') + A_{2\nu}^*(x') A_{1\mu}(x) \}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

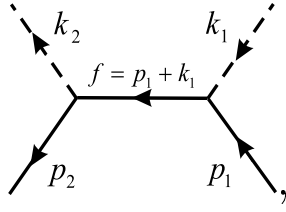
Подставив для электронных и фотонных операторов плоские волны и выделив δ -функцию за счет интегрирования по d^4x и d^4x' , получим окончательное выражение

$$S_{fi} = -ie^2 \bar{u}_2 \{ e_2^* G(p_1 + k_1) e_1 + e_1 G(p_1 - k_2) e_2^* \} u_1, \tag{4.61}$$

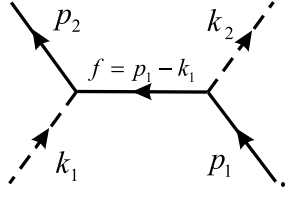
где e_1, e_2 — 4-векторы поляризации фотонов, а G — электронный пропагатор в импульсном представлении.

Два члена в этом выражении представляются следующими

диаграммами Фейнмана:

$$-ie^2 \bar{u}_2 e_2^* G(f) e_1 u_1 =$$


$$(4.62)$$

$$-ie^2 \bar{u}_2 e_1 G(f') e_2^* u_1 =$$


$$(4.63)$$

Штриховые свободные концы отвечают реальным фотонам и им сопоставляются множители e и e^* , внутренняя сплошная линия отвечает виртуальному электрону, 4-импульс которого определяется законом сохранения 4-импульса в вершинах и ей сопоставляется множитель $iG(f)$.

Общая формулировка теоремы Вика и рассмотренные примеры позволяют понять структуру вклада n -го порядка для матричных элементов матрицы рассеяния:

$$\begin{aligned} \langle f | S^{(n)} | i \rangle &= \frac{(-ie)^n}{n!} \left\langle 0 \left| \dots b_{1f} \dots a_{1f} \dots c_{1f} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \times \right. \right. \\ &\quad \times T \left\{ (\bar{\Psi}_1 A_1 \Psi_1) \dots (\bar{\Psi}_n A_n \Psi_n) \right\} c_{1i}^+ \dots a_{1i}^+ \dots b_{1i}^+ \left. \left| 0 \right\rangle \right. \\ &\quad \left. \right. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Здесь индексы $1i, 2i \dots$ нумеруют начальные частицы (отдельно позитрон, электрон, фотон); индексы $1f, 2f \dots$ – конечные частицы; индексы $1, 2 \dots$ у операторов Ψ и A означают: $\Psi_1 = \Psi(x_1)$, $A_1 = A(x_1) \dots$. Операторы $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ и $A(x)$ разлагаются по плоским волнам, и среднее по вакууму от T -

произведения этих операторов выражается через сумму членов со всеми возможными свертками. Отдельный член может быть изображен в виде графиков по следующим правилам (подробнее см. [2]):

1. n -му приближению теории возмущений отвечает диаграмма с n вершинами, в каждой из которых сходятся одна входящая и одна исходящая электронные (сплошные) и одна фотонная (штриховая) линии. В амплитуду процесса входят все диаграммы, имеющие свободные концы в числе, равном числу начальных и конечных частиц.
2. Каждой внешней входящей сплошной линии сопоставляется амплитуда начального электрона $u(p)$ или конечного позитрона $u(-p)$. Каждой исходящей сплошной линии сопоставляется амплитуда конечного электрона $\bar{u}(p)$ или начального позитрона $\bar{u}(-p)$. Каждой внешней входящей штриховой линии сопоставляется амплитуда начального фотона e_μ , а исходящей – амплитуда конечного фотона e_μ^* .
3. Каждой вершине сопоставляется 4-вектор γ_μ .
4. Каждой внутренней сплошной линии сопоставляется множитель $iG(p)$, а внутренней штриховой линии – множитель $-iD_{\mu\nu}(p)$. Тензорные индексы $\mu \nu$ совпадают с индексами матриц γ_μ и γ_ν в вершинах, соединенных штриховой линией.
5. В каждой вершине 4-импульсы пересекающихся в ней линий удовлетворяют закону сохранения энергии. Импульсы свободных концов – заданные величины. По импульсам

внутренних линий, остающихся нефиксированными после учета законов сохранения, производится интегрирование.

6. Общий множитель в диаграмме будет $(-ie)^n$.

Отметим, что фактор $1/n!$ в исходном выражении (4.64) сокращается при суммировании $n!$ членов, представляющих совокупность топологически эквивалентных диаграмм, которые различаются перестановкой импульсов, по которым ведется интегрирование (с учетом соответствующей перестановки тензорных индексов).

4.3. Точные пропагаторы полей

4.3.1. Операторы полей в гайзенберговском представлении

В предыдущем разделе мы ограничились рассмотрением первых поправок теории возмущений квантовой электродинамики. Для понимания структуры высших приближений необходимо предварительно изучить общие свойства, которыми обладают амплитуды рассеяния. Рассматриваемая теория возмущений основана на разделении гамильтониана H на две части: H_0 , который соответствует невзаимодействующему электронно-позитронному и электромагнитному полям и V – взаимодействию между ними. Это разделение вводит представление о свободных частицах, которых в реальности не существует, поскольку все частицы обоих полей находятся во взаимодействии.

По этой причине важно ввести фундаментальные характеристики частиц, определив их на основе полного гамильтониана. Изложение теории возмущений строилось с помощью опе-

раторов поля в представлении взаимодействия. Для подхода, основанного на исследовании полного гамильтониана, удобно гайзенберговское представление операторов.

В шредингеровском представлении оператор $\psi(\mathbf{r})$ от времени не зависит, а в гайзенберговском представлении (будем обозначать его $\psi(x)$) имеем

$$\psi(x) = e^{iHt}\psi(\mathbf{r})e^{-iHt}, \quad (4.65)$$

при этом волновые функции $\psi(\mathbf{r})$ от времени не зависят. В представлении взаимодействия $\psi_{int}(\mathbf{r}, t)$ зависит от времени следующим образом:

$$\psi_{int}(\mathbf{r}, t) = e^{iH_0t}\psi(\mathbf{r})e^{-iH_0t}. \quad (4.66)$$

Найдем связь между операторами $\psi(x)$ и $\psi_{int}(\mathbf{r}, t)$. Для этого допустим адиабатическое включение взаимодействия от $t = -\infty$ к конечному времени. Тогда при $t = -\infty$ оба представления – гайзенберговское и представление взаимодействия – совпадают. Соответственно совпадают и волновые функции системы Φ и Φ_{int} :

$$\Phi_{int}(t = -\infty) = \Phi. \quad (4.67)$$

В разделе 4.2 показано, что зависимость от времени волновой функции в представлении взаимодействия определяется выражением

$$\Phi_{int}(t) = S(t, -\infty) \Phi_{int}(-\infty), \quad (4.68)$$

где оператор

$$S(t_2, t_1) = T \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} V(t') dt' \right\} \quad (4.69)$$

обладает свойствами

$$S(t, t_1)S(t_1, t_0) = S(t, t_0), \quad S^{-1}(t, t_1) = S(t_1, t). \quad (4.70)$$

Сравнивая (4.67) и (4.68), находим соотношение

$$\Phi_{int}(t) = S(t, -\infty) \Phi, \quad (4.71)$$

дающее связь волновых функций в гайзенберговском представлении и представлении взаимодействия. Чтобы установить соответствующее соотношение для операторов, рассмотрим матричный элемент, записанный в обоих представлениях:

$$\langle \Phi_{int}(t) | \psi_{int}(\mathbf{r}, t) | \Phi_{int}(t) \rangle = \langle \Phi | S^{-1}(t, -\infty) \psi_{int}(\mathbf{r}, t) S(t, -\infty) | \Phi \rangle.$$

С учетом второго соотношения (4.70) получаем отсюда искомую связь операторов $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi_{int}(\mathbf{r}, t)$:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = S(-\infty, t) \psi_{int}(\mathbf{r}, t) S(t, -\infty). \quad (4.72)$$

Введем теперь точные пропагаторы для электронно-позитронного и электромагнитного полей:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') = -i \langle 0 | T \Psi_{\alpha}(x) \bar{\Psi}_{\beta}(x') | 0 \rangle, \quad (4.73)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0 | T A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') | 0 \rangle, \quad (4.74)$$

где операторы поля взяты в гайзенберговском представлении. При отсутствии взаимодействия эти пропагаторы сводятся к пропагаторам свободных частиц $G_{\alpha\beta}(x - x')$ и $D_{\mu\nu}(x - x')$, введенных ранее.

Рассмотрим сначала электронный пропагатор и распишем его, используя выражение (4.72):

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') &= \\ &= -i \langle 0 | T S(-\infty, t) \Psi_{\alpha}^{int}(t) S(t, -\infty) S(-\infty, t') \bar{\Psi}_{\beta}^{int}(t') S(t', -\infty) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Учтем, что под знаком T -произведения операторы можно переставлять (их правильное хронологическое упорядочение обеспечивается символом T автоматически). Тогда S -операторы можно сгруппировать и с помощью первого соотношения (4.70) упростить следующим образом:

$$\begin{aligned} S(t, -\infty)S(-\infty, t') &= S(t, t'), \\ S(-\infty, t) &= S(-\infty, \infty)S(\infty, t), \\ S(-\infty, -\infty) &= 1. \end{aligned}$$

В результате для (4.75) получаем компактную запись:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') = -i\langle 0|T S^{-1}\Psi_{\alpha}(t)\bar{\Psi}_{\beta}(t')S|0\rangle. \quad (4.76)$$

Введенная величина

$$S = S(\infty, -\infty) \quad (4.77)$$

называется матрицей рассеяния.

Множитель S^{-1} можно вынести из-под знака усреднения по вакууму в виде некоторого фазового множителя. Вспомним, что гайзенберговская волновая функция Φ совпадает со значением $\Phi_{int}(-\infty)$ волновой функции этого же состояния в представлении взаимодействия. Тогда

$$S\Phi_{int}(-\infty) \equiv S(\infty, -\infty)\Phi_{int}(-\infty) = \Phi_{int}(\infty).$$

Вакуум является стационарным состоянием и в нем невозможны самопроизвольные процессы рождения частиц. С течением времени вакуум остается вакуумом, и это означает, что $\Phi_{int}(\infty)$ может отличаться от $\Phi_{int}(-\infty)$ лишь некоторым фазовым множителем $e^{i\alpha}$, поэтому

$$S\Phi_{int}(-\infty) = e^{i\alpha}\Phi_{int}(-\infty) = \langle 0|S|0\rangle\Phi_{int}(-\infty).$$

Отсюда

$$\Phi_{int}^*(-\infty)S^{-1} = \langle 0|S|0\rangle^{-1}\Phi_{int}^*(-\infty),$$

и выражение (4.76) можно переписать в виде

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x-x') = -i \frac{\langle 0|T \Psi_{\alpha}^{int}(x) \bar{\Psi}_{\beta}^{int}(x') S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \quad (4.78)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для точного пропагатора электромагнитного поля:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-x') = i \frac{\langle 0|T A_{\mu}^{int}(x) A_{\nu}^{int}(x') S|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle}. \quad (4.79)$$

Два последних выражения определяют точные пропагаторы электронного и электромагнитного полей в представлении взаимодействия. В них все взаимодействие компактно собрано в S -матрицу:

$$S = T \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} V(t') dt' \right\}. \quad (4.80)$$

Разлагая S -матрицу в числителе и знаменателе формул (4.78) и (4.79) по степеням V , получим теорию возмущений для пропагаторов.

4.3.2. Ряды теории возмущений

Ряды теории возмущений для пропагаторов имеют ту же структуру, что и для матрицы рассеяния, обсуждавшейся в предыдущем разделе. В каждом порядке теории возмущений для пропагаторов может быть использована теорема Вика, так что вклад в $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{D}_{\mu\nu}$ в каждом порядке дается суммой членов, представляющих собой произведения свободных пропагаторов $G_{\alpha\beta}$, $D_{\mu\nu}$ и матриц γ_{μ} . Они могут быть изображены

в виде графиков Фейнмана, при этом правила диаграммной техники остаются прежними.

Свертка внешних операторов в формулах (4.78) и (4.79) приводит к тому, что любая диаграмма должна содержать сплошную линию для $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(p)$ и штриховую – для $\mathcal{D}_{\mu\nu}(k)$, которые несут импульс p или k соответственно. Имеются две различные ситуации. Если внешний оператор свертывается с оператором из гамильтониана взаимодействия V , то выходящая линия с импульсом p (или k) присоединяется к остальной части диаграммы, которая заканчивается входящей линией с тем же импульсом. Другая ситуация возникает, когда внешние операторы свертываются друг с другом. Тогда получается лишь одна свертка, несущая импульс p (или k).

Таким образом, в ряду теории возмущений, скажем для $\mathcal{G}_{\alpha\beta}(p)$, в числителе возникают следующие диаграммы:

$$\begin{array}{c} x \\ \leftarrow \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow \\ p \end{array} \text{---} \textcircled{a} \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \leftarrow \\ p \end{array} \begin{array}{c} x' \\ \leftarrow \\ \text{---} \end{array}, \quad \textcircled{b}, \quad (4.81)$$

где заштрихованный фрагмент представляет часть диаграммы, не содержащую внешних вершин x и x' . Диаграммы первого типа называются связными, а второго – несвязными.

Несвязные диаграммы представляют разложение матричного элемента $\langle 0|S|0\rangle$ матрицы рассеяния. Сумма всех возможных несвязных диаграмм определяет таким образом знаменатель в выражениях (4.78) и (4.79). Обозначим аналитическое выражение для связного фрагмента с индексом a как C_a , а с индексом b – как C_b . Тогда полный ряд диаграмм, возникающих в числителе выражения (4.78), символически можно

записать в виде

$$\sum_a \mathcal{G} C_a \mathcal{G} + \sum_a \mathcal{G} C_a \mathcal{G} \sum_b C_b = \sum_a \mathcal{G} C_a \mathcal{G} \left\{ 1 + \sum_b C_b \right\}. \quad (4.82)$$

Вместе с тем полный ряд для матричного элемента S -матрицы представляет собой совокупность всех диаграмм без внешних вершин, т.е.:

$$\langle 0|S|0\rangle = 1 + \sum_b C_b. \quad (4.83)$$

При делении выражения (4.82) на (4.83) происходит сокращение множителя $\langle 0|S|0\rangle$, поэтому формулы (4.78) и (4.79) следует переписать в виде:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(x - x') = -i \langle 0|T \Psi_{\alpha}^{int}(x) \bar{\Psi}_{\beta}^{int}(x') S|0\rangle_c, \quad (4.84)$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x - x') = i \langle 0|T A_{\mu}^{int}(x) A_{\nu}^{int}(x') S|0\rangle_c. \quad (4.85)$$

Здесь индекс c означает, что в ряду теории возмущений следует учитывать лишь связные диаграммы¹. Далее мы рассмотрим эти ряды для электронного и электромагнитного пропагаторов.

4.3.3. Уравнение Дайсона

Мы уже говорили, что разложение выражения (4.84) для электронного пропагатора приводит к представлению $\mathcal{G}$ -функции в виде совокупности связных диаграмм с двумя внешними электронными концами. Непосредственное вычисление вкладов в $\mathcal{G}$ -функцию вплоть до членов e^4 дает следу-

¹Индекс c является первой буквой английского слова *connected* – связный.

ющие графические представления:

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \leftarrow \text{---} = \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \\
 & + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \\
 & + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

Жирная линия в левой части равенства представляет точный пропагатор. Часть диаграммы, заключенной между двумя электронными линиями, называют собственно-энергетической частью или массовым оператором. В общем случае диаграмма для $\mathcal{G}$ -функции представляет собой пару электронных линий с различными собственно-энергетическими вставками. Полностью ряд для нее может выглядеть так:

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \leftarrow \text{---} = \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \\
 & + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} \text{---} \leftarrow \text{---} + \dots
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

Здесь заштрихованный фрагмент обозначает полную совокупность неприводимых диаграмм для массового оператора, т.е. диаграмм, неразрезаемых по электронной линии. Неприводимыми в ряду (4.86) являются диаграмма второго порядка и три последние диаграммы; напротив, первая из диаграмм четвертого порядка является приводимой и содержит две неприводимые части.

Таким образом, выпишем следующий ряд для массового

оператора iM :

$$\text{---} \circ iM \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (4.88)$$

Внешние концы не принадлежат массовому оператору и указаны на графиках для того, чтобы показать, как массовый оператор подсоединяется к другим элементам диаграмм. В этом ряду сплошной линии сопоставляется множитель iG , а штриховой $-iD$.

Графическому ряду (4.87) соответствует аналитический ряд $i\mathcal{G} = iG + (iG)(-iM)(iG) + (iG)(-iM)(iG)(-iM)(iG) + \dots$, который можно рассматривать как итерационный для уравнения

$$i\mathcal{G} = iG + (iG)(-iM)(i\mathcal{G}).$$

После сокращения на i уравнение в импульсном представлении принимает вид

$$\mathcal{G}(p) = G(p) + G(p)M(p)\mathcal{G}(p), \quad (4.89)$$

где каждая из величин есть 4×4 -матрица и биспинорные индексы опущены. Это уравнение, связывающее точный пропагатор с массовым оператором, называется уравнением Дайсона. Его можно переписать, разрешив относительно функции $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}^{-1}(p) = G^{-1}(p) - M(p). \quad (4.90)$$

С учетом выражения для пропагатора свободного электронного поля, перепишем (4.90):

$$\mathcal{G}^{-1} = \gamma p - m - M(p). \quad (4.91)$$

Здесь m – масса свободного электрона, так что $M(p)$ дает поправки к электронной массе за счет взаимодействия с электромагнитным полем. Этим оправдывается название величины $M(p)$ как массового оператора.

Займемся теперь фотонным пропагатором. Выражение (4.85) показывает, что диаграммы для поправок к фотонному пропагатору имеют два штриховых конца, представляющих пропагатор свободного электромагнитного поля. С точностью до членов e^4 графическое разложение функции $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \text{---} &= \text{---} + \text{---} \text{ (loop) } \text{---} \\
 &+ \text{---} \text{ (two loops) } \text{---} + \text{---} \text{ (box) } \text{---} + \\
 &+ \text{---} \text{ (loop with internal dashed line) } \text{---} + \text{---} \text{ (loop with internal dashed line and external segment) } \text{---} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.92}$$

Часть диаграммы, заключенная между двумя фотонными линиями, называется фотонной собственно-энергетической частью. Если она не разрезаема по штриховой линии, ее называют неприводимой. Обозначим символом $i\mathcal{P}_{\mu\nu}/4\pi$ полную сумму всех неприводимых собственно-энергетических частей. Величина $\mathcal{P}$ называется поляризационным оператором. Тогда ряд для фотонного пропагатора имеет такую же структуру, что и ряд (4.87) для электронного пропагатора, в котором сплошные линии заменены на штриховые. Ему соответствует аналитический ряд

$$\mathcal{D} = D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D \frac{\mathcal{P}}{4\pi} D + \dots, \tag{4.93}$$

и мы приходим к уравнению Дайсона для фотонного пропага-

тора:

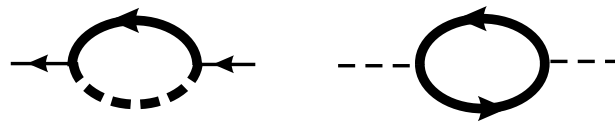
$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}(k) + D_{\mu\lambda} \frac{\mathcal{P}_{\lambda\rho}}{4\pi} \mathcal{D}_{\rho\nu}(k), \quad (4.94)$$

решение которого запишем в виде

$$\mathcal{D}^{-1} = D^{-1} - \frac{1}{4\pi} \mathcal{P}. \quad (4.95)$$

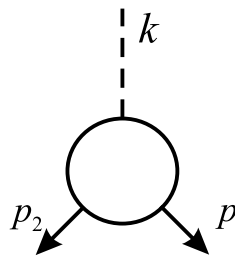
Уравнения (4.94) и (4.95) для фотонного пропагатора аналогичны уравнениям (4.89) и (4.90) для электронного.

Ряды (4.86) и (4.92) для электронного и фотонного пропагаторов можно переписать таким образом, что в правой части возникнут жирные сплошные или штриховые линии. В самом деле, в графике второго порядка в ряду (4.86) можно сделать в сплошных и штриховых линиях собственно-энергетические вставки, поэтому тонкие линии в этом графике можно заменить на жирные. То же можно проделать и в диаграмме второго порядка в ряду (4.92). Тогда некоторое бесконечное подмножество графиков из ряда (4.86) или (4.92) соберется в петлевые графики с жирными линиями:



$$(4.96)$$

Оставшаяся (бесконечная) часть рядов (4.86) и (4.92) требует введения понятия вершинной части. Это совокупность диаграмм с тремя (одним фотонным и двумя электронными) концами:



$$(4.97)$$

Их импульсы связаны законом сохранения:

$$p_1 + k = p_2. \quad (4.98)$$

Полная вершинная часть включает в себя графики

$$= \text{[Tree-level vertex]} + \text{[Loop diagrams]} \quad (4.99)$$

а также другие жирные сплошные и штриховые линии.

Можно показать, что графики в рядах (4.86) и (4.92), не вошедшие в (4.96), выражаются с помощью полной вершинной части. В результате точные собственно-энергетические части для электронного и фотонного пропагаторов формально можно представить в виде графиков:

$$= \text{[Tree-level propagator]} + \text{[Loop diagram]} , \quad (4.100)$$

$$= \text{[Tree-level propagator]} + \text{[Loop diagram]} . \quad (4.101)$$

Таким образом, точный электронный пропагатор $\mathcal{G}$ и точный фотонный пропагатор $\mathcal{D}$ выражаются посредством уравнений (4.90) и (4.95) через точную электронную и фотонную собственно-энергетическую части. Последние представляются графически диаграммами (4.100) и (4.101), содержащими точные пропагаторы и вершинную часть. Нахождение $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$

сводится к теории возмущений для вершинной части. Ее приближенное выражение после подстановки в (4.100) и (4.101) приводит к двум связанным нелинейным интегральным уравнениям, определяющим совместно с (4.90) и (4.95) точные пропагаторы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$ и их собственно-энергетические части, другими словами – массовый оператор M и поляризационный оператор $\mathcal{P}$.

Уравнения (4.100) и (4.101) в аналитическом виде записываются так:

$$M(p) = -ie^2 \int \gamma_\nu \mathcal{G}(p+k) \Gamma_\mu(p+k, p; k) \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}, \quad (4.102)$$

$$\frac{\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)}{4\pi} = ie^2 \text{Sp} \int \gamma_\mu \mathcal{G}(p+k) \Gamma_\nu(p+k, p; k) \mathcal{G}(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (4.103)$$

Биспинорные индексы в этих уравнениях опущены; шпур в (4.103) берется по биспинорным индексам от произведения матриц $\mathcal{G}\Gamma_\nu\mathcal{G}$.

Заметим, что уравнения (4.102) и (4.103), полученные здесь графически очень схематично, могут быть выведены из уравнений движения для функций $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$, определяемых соотношениями (4.73) и (4.74). В уравнениях движения появляется новая функция, зависящая от трех пространственно-временных координат:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^\mu(x_1, x_2, x_3) &= \langle 0 | T A_\mu(x_1) \Psi_\alpha(x_2) \bar{\Psi}_\beta(x_3) | 0 \rangle = \\ &= \frac{\langle 0 | T A_\mu^{int}(x_1) \Psi_\alpha^{int}(x_2) \bar{\Psi}_\beta^{int}(x_3) S | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle}. \end{aligned}$$

В импульсном представлении она выражается через функцию Γ_ν :

$$K^\mu(p_2, p_1; k) = \left\{ i\mathcal{G}(p_2) [-ie\Gamma_\nu(p_2, p_1; k)] i\mathcal{G}(p_1) \right\} [-i\mathcal{D}_{\nu\mu}(k)], \quad (4.104)$$

которая и представляет собой вершинную часть (4.87). Подразумеваются, что в нее включены все графики этого типа, причем в нее не включаются концы, которые соответствуют множителям $\mathcal{G}(p_2)$, $\mathcal{G}(p_1)$ и $\mathcal{D}(k)$, стоящим в выражении (4.104) для K^μ -функции.

4.4. Расходимости. Перенормировки

4.4.1. Рассеяние электрона на статическом заряде

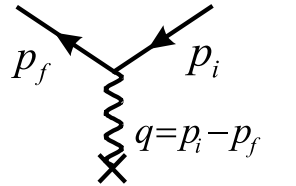
В качестве первого примера применения развитой теории возмущений рассмотрим процесс рассеяния электрона на статическом заряде, например в поле атомного ядра. В первом приближении амплитуда рассеяния электрона на фотоне равна нулю, так как в этом процессе невозможно удовлетворить одновременно законам сохранения энергии и импульса этих двух сталкивающихся частиц. Однако если фотон движется в поле статического заряда, то рассеяние его возможно.

Соответствующий элемент S -матрицы описывается выражением

$$S_{if}^{(2)} = -i \int d^4x \langle f | j_\mu(x) | i \rangle A_\mu^e(x), \quad (4.105)$$

где $A_\mu^e(x)$ – вектор-потенциал статического поля ядра, который не зависит от времени. Согласно правилам диаграммной техники, такой процесс характеризуется

диаграммой Фейнмана



$$(4.106)$$

где линия с крестом на конце представляет не фотон, изображаемый всегда прерывистой линией, а внешнее поле A_μ^e . Используя правила диаграммной техники, записываем матричный элемент (4.105) в виде

$$S_{if}^{(2)} = -e (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) A_\mu^e(q), \quad (4.107)$$

где $A_\mu^e(q)$ – четырехмерная фурье-компонента статического поля:

$$A_\mu^e(q) = \int d^4x e^{-iqx} A_\mu^e(x) = 2\pi \delta(E_i - E_f) A_\mu^e(\mathbf{q}),$$

$$A_\mu^e(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} A_\mu^e(\mathbf{r})$$

есть его пространственная часть. Последнюю можно найти из уравнения Максвелла:

$$\nabla^2 A_\mu^e(\mathbf{r}) = -j_\mu(\mathbf{r}),$$

из которого следует, что

$$A_\mu^e(\mathbf{q}) = \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} j_\mu(\mathbf{q}).$$

Выражение (4.107) перепишется в виде

$$S_{if}^{(2)} = -2\pi (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) A_\mu^e(\mathbf{q}) \delta(E_i - E_f). \quad (4.108)$$

Определим амплитуду рассеяния соотношением

$$-iM^{(1)} = -ie (\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) \frac{1}{|\mathbf{q}|^2} j_\mu(\mathbf{q}). \quad (4.109)$$

Здесь первый множитель описывает вершинную часть, а второй – фотонный пропагатор. Для статического ядра с зарядом Ze четырехмерный ток равен

$$j_4(\mathbf{r}) \equiv \rho(\mathbf{r}) = Ze \delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0,$$

так что теперь выражение (4.109) можно представить так:

$$-M^{(1)} = -ie (\bar{u}_f \gamma_0 u_i) \left(\frac{1}{|\mathbf{q}|^2} \right) (Ze). \quad (4.110)$$

Вспомним определение затравочного пропагатора фотона, $D_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2}$, и перепишем соотношение (4.110):

$$-iM^{(1)} = -(ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) (-iD_{\mu\nu}(q)) (-ij_\nu(q)). \quad (4.111)$$

В такой форме выражение для матричного элемента, представленного на диаграмме, соответствует правилам диаграммной техники.

Введем дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, определяющее вероятность рассеяния частицы в элемент телесного угла $d\Omega$. Зная амплитуду рассеяния M , можно вычислить дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/d\Omega$, которое, согласно (4.109) или (4.110), имеет следующую зависимость от угла рассеяния:

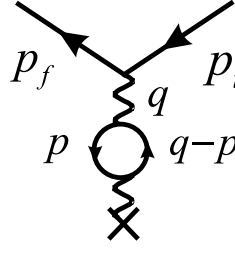
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |M|^2 \sim \frac{1}{q^4} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (4.112)$$

где угол θ входит в выражение для квадрата вектора рассеяния:

$$\mathbf{q}^2 = (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Здесь $k = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ с точностью до $m/M \ll 1$, где M – масса ядра. Мы получили таким образом формулу Резерфорда (4.112).

Рассмотрим теперь поправки высших порядков, которые принято называть радиационными поправками. Один из графиков третьего порядка имеет следующий вид:



$$(4.113)$$

Этой диаграмме соответствует выражение

$$iM^{(3)} = - (ie\bar{u}_f \gamma_\mu u_i) (-D_{\mu\nu}(q)) \times \quad (4.114)$$

$$\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left\{ (ie\gamma_{\mu'}) G(p) (ie\gamma_{\nu'}) G(q-p) \right\} (-iD_{\nu'\nu}(q)) (-ij_\nu(q)),$$

в котором $G(p)$ – электронный пропагатор.

Добавление к выражению (4.111) первого порядка поправки третьего порядка сводится к усложнению фотонного пропагатора:

$$D_{\mu\nu}(q) \rightarrow D_{\mu\nu}(q) + D_{\mu\mu'}(q) I_{\mu'\nu'}(q) D_{\nu'\nu}(q) + \dots, \quad (4.115)$$

где

$$I_{\mu\nu}(q) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left\{ (ie\gamma_\mu) \frac{i(\hat{p} + m)}{p^2 - m^2} (ie\gamma_\mu) \frac{i(\hat{q} - \hat{p} + m)}{(q-p)^2 - m^2} \right\} \quad (4.116)$$

представляет собой электронную петлю в диаграмме (4.113).

Из полученного выражения сразу видно, что в пределе $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ интеграл в (4.116) становится расходящимся, поскольку $d^4 p \sim p^3 dp$, и все выражение принимает вид $\int dp p^3/p^4$, так что поправка в (4.114) не имеет физического смысла. Такие расходимости постоянно встречаются во всех

порядках теории возмущений для элементов S -матрицы, в результате чего физически бессмысленной становится вся процедура разложения по степеням электронного заряда e . Это создавало непреодолимые трудности для квантовой электродинамики, когда она делала первые шаги.

Физической причиной расходимостей является точечный (локальный) характер взаимодействия полей в релятивистской теории. Выходом из этого тупика стала идея о необходимости перенормировки заряда электрона. В развиваемой теории заряд e характеризовал "голый" электрон, не взаимодействующий с вакуумом. На самом деле такого объекта в природе не существует, поэтому разложение матрицы рассеяния следует вести по степеням заряда не голого электрона e , а реального электрона e_R , "одетого" за счет взаимодействия с вакуумом. Величину этого заряда следует определить из экспериментов, но вычислить ее в рамках развиваемой теории невозможно. Задачей теории является перенормировка всего бесконечного ряда теории возмущений по степеням e таким образом, чтобы это разложение представить как ряд по степеням некоторого e_R , в который уже включены все расходящиеся вклады, а формально полученное разложение для e_R считать настоящим зарядом электрона и приписать ему экспериментально найденное значение. Теория, которая позволяет осуществить такую процедуру, называется перенормируемой. Квантовая электродинамика, как показало ее дальнейшее развитие, является перенормируемой. Согласно сложившимся в настоящее время представлениям, неперенормируемые квантовые теории поля считаются нефизичными.

Чтобы понять, о чем идет речь, произведем перенормировку заряда электрона в приближении, включающем поправки первого и третьего порядка для амплитуды M .

Прямое вычисление интеграла (4.116) очень сложно, и мы ограничимся представлением асимптотических результатов для больших и малых импульсов q . При рассеянии на статическом заряде электрон испытывает отдачу и $\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_f$, но энергия его при этом сохраняется, $E_i = E_f$, поэтому квадрат 4-импульса

$$q^2 = q_0^2 - \mathbf{q}^2 = -\mathbf{q}^2 < 0. \quad (4.117)$$

Вычисление показывает, что интеграл $I_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$I_{\mu\nu}(q^2) = -i \delta_{\mu\nu} q^2 I(q^2) + \dots, \quad (4.118)$$

где

$$I(q^2) = \frac{e^2}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} - \frac{2e^2}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right]. \quad (4.119)$$

Для придания определенного значения интегралу введем в первом члене (4.119) параметр обрезания $\Lambda^2 \gg m^2$ на верхнем пределе. Тогда при $(-q^2) \ll m^2$ имеем

$$I(q^2) \simeq \frac{e^2}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \frac{e^2 q^2}{15\pi m^2} + \dots, \quad (4.120)$$

где второе слагаемое происходит от второго интеграла в (4.119).

Тогда амплитуду $M^{(1)} + M^{(3)}$ можно записать при

$(-q^2) \ll m^2$ в виде

$$-iM = (ie\bar{u}_f\gamma_0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2}\right) \left[1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) - \frac{e^2}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} + \dots\right] (-iZe). \quad (4.121)$$

Полученное выражение с той же точностью перепишем в виде

$$-iM = (ie_R\bar{u}_f\gamma_0 u_i) \left(\frac{-i}{q^2}\right) \left[1 - \frac{e_R^2}{3\pi} \frac{q^2}{m^2}\right] (-iZe_R), \quad (4.122)$$

где введен перенормированный заряд:

$$e_R = e \left(1 - \frac{e^2}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}\right)^{1/2}. \quad (4.123)$$

Предположим, что величина e_R представляет собой истинный электронный заряд, т.е. экспериментально измеряемый. Тогда амплитуда рассеяния (4.122) становится конечной, при этом расходимость формально учтена в e_R , который берется из эксперимента и не подлежит вычислению в рамках рассматриваемой теории. Оказалось, что в квантовой электродинамике все расходимости, возникающие в высших порядках теории возмущений, удастся аналогичным образом спрятать в конечное число параметров, подлежащих определению из эксперимента. В настоящее время разработаны эффективные методы перенормировок для всего бесконечного ряда теории возмущений.

Физической причиной возникновения перенормированного заряда является учет флуктуаций вакуума. Действительно, как видно из диаграммы (4.113), в электромагнитном поле спонтанно возникают возбужденные электрон-позитронные пары. Они представляют собой флуктуации вакуума, взаимодействие с которыми меняет заряд исходного "голого" затравочного электрона. Учет всех флуктуаций вакуума приводит

к формированию реального заряда электрона. Мы рассмотрели лишь один пример перенормировки заряда, обусловленной эффектами виртуального рождения пар в процессах третьего порядка, но из рассмотренного примера ясна общая идея перенормировки как способа устранения расходимостей в теории возмущений.

4.4.2. Лэмбовский сдвиг

Эффекты поляризации вакуума могут экспериментально наблюдаться. Первым из такого рода эффектов был сдвиг атомных уровней электрона для состояний с различным орбитальным моментом (сдвиг Лэмба)².

Возможность такого эффекта можно увидеть, анализируя формулу (4.122) для амплитуды рассеяния электрона на ядре. Первое слагаемое в (4.122) связано с кулоновским потенциалом

$$V_0(\mathbf{r}) = -Ze_R^2 \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{|\mathbf{q}|^2} \sim -\frac{Ze_R^2}{r}. \quad (4.124)$$

Второе слагаемое в (4.122) соответствует квантовой поправке к кулоновскому потенциалу за счет рождения электрон-позитронных пар. Во втором слагаемом q^2 в числителе и знаменателе сокращается, и обратное фурье-преобразование вы-

²Особое внимание экспериментаторов привлекало исследование тонкой структуры энергетических уровней атома водорода. Это связано с тем, что атом водорода представляет собой единственную систему, для которой и уравнение Шредингера, и уравнение Дирака допускают точное решение. По этой причине опытная проверка теории атома водорода имеет крайне важное значение, ведь расхождение теории с экспериментом в этом случае не может быть отнесено за счет плохого приближения или неточности вычислений. Поэтому, когда в 1934 г. появились первые указания на то, что в противоречие с теорией уровень $2s_{1/2}$ лежит примерно на 0.03см^{-1} выше уровня $2p_{1/2}$ (Хаустон, Вильямс, Пастернак, 1934–1938 гг.), это сразу же привлекло пристальное внимание теоретиков. Долгое время, однако, оставалось неясным, реален ли этот сдвиг, поскольку вследствие доплеровского уширения линий не удавалось надежно разделить все компоненты линий H_α . Эта ситуация сохранялась вплоть до 1947 г., когда Лэмб и Ризерфорд (W.E. Lamb, R.C. Retherford, 1947–1952), используя радиоспектроскопический метод, показали, что уровень $2s_{1/2}$ действительно сдвинут относительно уровня $2p_{1/2}$ на величину 1000 МГц (примерно 0.03 см^{-1}).

ражения приводит к $\delta(\mathbf{r})$ -функции. С помощью известного соотношения $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$, представляющего собой уравнение Пуассона для единичного точечного заряда, оба вклада в (4.122) определяют пространственное поведение эффективного потенциала:

$$V(\mathbf{r}) = -Ze^2 \left(1 - \frac{e_R^2}{60\pi^2 m^2} \nabla^2 \right) \frac{1}{r} = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze_R^4}{15\pi m^2} \delta(\mathbf{r}). \quad (4.125)$$

Таким образом, рождение виртуальных электрон-позитронных пар (поляризация вакуума) приводит к модификации кулоновского потенциала на малых расстояниях: возникает дополнительное притяжение к ядру.

Рассмотрим атом водорода, $Z = 1$. Для атомного электрона в состоянии $\psi_{nl}(\mathbf{r})$, где n – главное квантовое число, l – орбитальное квантовое число, поправка к энергии за счет второго слагаемого в (4.125) определяется диагональным матричным элементом:

$$E_{nl} = \int d\mathbf{r} \psi_{nl}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_{nl}(\mathbf{r}) = -\frac{e_R^2}{15\pi m^2} |\psi_{nl}(0)|^2 \delta_{l,0}. \quad (4.126)$$

Из-за точечного характера дополнительного взаимодействия в (4.125) оно действует лишь на волновую функцию, отличную от нуля в начале координат, т.е. на s -состояние ($l = 0$). Атомные уровни в нерелятивистской теории Шредингера, учитывающей только обычное кулоновское взаимодействие электрона с ядром, вырождены по квантовому числу l , т.е. состояния с одним n и разными l имеют в этом приближении одну энергию. Согласно формуле (4.126), это вырождение частично снимается: s -уровень отделяется от уровней с $l \neq 0$. Эксперимент показывает, что уровень $2s$ сдвинут относительно уровня $2p$

на величину $+1057$ МГц, тогда как расчет по формуле (4.126) дает величину -27 МГц.

Это расхождение связано с тем, что в (4.125) учитывалась лишь поправка к кулоновскому взаимодействию, связанная с петлей из графика (4.113), а она дает лишь часть сдвига. Полный набор фейнмановских диаграмм, ответственных за лэмбовский сдвиг в рассматриваемом порядке теории возмущений $\sim e^3$, показан ниже:

а б в г

(4.127)

Все содержащиеся в этих диаграммах расходимости могут быть спрятаны в перенормировку заряда, массы и волновой функции электрона. Таким образом удастся рассчитать полную величину лэмбовского сдвига, которая прекрасно согласуется с экспериментом. При этом оказалось, что основной вклад в сдвиг связан с перенормировкой массы электрона (диаграммы (б) и (г)): величина (бесконечная) расходящихся поправок к массе свободного электрона отличается от их величины (также бесконечной) для электрона, связанного в атоме. Разность этих двух бесконечных величин конечна и вносит основной вклад в сдвиг атомных уровней.

Рассмотрим теперь эффекты, описываемые диаграммой (б). Вычисление конечной части этой диаграммы в пределе малых

импульсов $(-q^2)$ дает

$$\begin{aligned} & -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \rightarrow \\ & \rightarrow -e \bar{u}_f \left\{ \gamma_\mu \left[1 + \frac{e^2 q^2}{3\pi m^2} \left(\ln \frac{m}{m_\gamma} - \frac{3}{8} \right) \right] - \left[\frac{e^2}{2\pi 2m} i \sigma_{\mu\nu} q_\nu \right] \right\} u_i, \end{aligned} \quad (4.128)$$

где

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (4.129)$$

Выражение в первых квадратных скобках вносит некоторый вклад в лэмбовский сдвиг, поскольку этот член аналогичен по форме с (4.122).

Однако здесь мы встречаемся еще с одной расходимостью на малых импульсах, которая формально "устраняется" введением конечной массы фотона m_γ . Это так называемая инфракрасная расходимость в отличие от ультрафиолетовой расходимости на больших импульсах, рассмотренной выше. Данный тип расходимости менее серьезен, и в бесконечном ряде поправок фиктивная масса фотона m_γ сокращается. Последний член в (4.128) приводит к другому новому эффекту (наряду с лэмбовским сдвигом) в квантовой электродинамике.

4.4.3. Аномальный магнитный момент электрона

Рассмотрим последний член в (4.128). Можно убедиться, что вклад типа $\sigma_{\mu\nu} q_\nu$ описывает магнитный момент электрона $\vec{\mu} = -(e/2m)\vec{\sigma}$, который обычно записывают в виде

$$\vec{\mu} = -g \frac{e}{2m} \vec{\sigma}, \quad (4.130)$$

где $\mathbf{S} = 1/2\vec{\sigma}$ – спин электрона, а g – гиромагнитное отношение электрона; в теории Дирака $g = 2$.

Второй член в (4.128) описывает дополнительный вклад в магнитный момент электрона, который теперь описывается выражением

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \left(1 + \frac{e^2}{2\pi}\right) \vec{\sigma}, \quad (4.131)$$

что равносильно введению нового g -фактора:

$$g = 2 + \frac{e^2}{\pi}. \quad (4.132)$$

Таким образом, дополнительно к дираковскому магнитному моменту электрона возникает аномальный магнитный момент. Более точное выражение для аномального вклада в гиромагнитное отношение с точностью до членов $\sim e^6$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{g-2}{2} &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{\pi} - 0.32848 \left(\frac{e^2}{\pi}\right)^2 + (1.49 \pm 0.2) \left(\frac{e^2}{\pi}\right)^3 + \dots = \\ &= (1159655.4 \pm 3.3) 10^{-9}. \end{aligned} \quad (4.133)$$

Экспериментальное значение аномального магнитного момента электрона равно

$$\left. \frac{g-2}{2} \right|_{\text{эксп.}} = (1159657.7 \pm 3.5) 10^{-9}. \quad (4.134)$$

Вычисленные два эффекта – лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент электрона – показывают удивительно точное согласие с экспериментом, достигаемое в квантовой электродинамике. Эта точность обусловлена тем, что параметром разложения в теории возмущений является малая величина

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad (4.135)$$

благодаря которой эффекты, рассчитанные уже в первых порядках теории возмущений, находятся в блестящем согласии с экспериментом.

4.5. Примеры процессов, возникающих в первых порядках теории возмущений

4.5.1. Образование электрон-позитронных пар

Рождение электрон-позитронных пар при рассеянии электронов друг с другом или электрона с фотоном, а также двумя фотонами было открыто экспериментально и стало триумфом квантовой электродинамики. Мы рассмотрим различные варианты таких процессов для того, чтобы проиллюстрировать работу с диаграммной техникой и правила написания по диаграммам аналитических выражений для соответствующих элементов матрицы рассеяния.

Сначала рассмотрим образование электронно-позитронной пары фотоном в поле ядра. Для возможности такого процесса необходима, очевидно, энергия, не меньшая $2m$. Один фотон, даже обладающий достаточной энергией, не может, однако, образовать пару, так как при этом не могут одновременно выполняться законы сохранения энергии и импульса. Для образования пары одним фотоном необходимо присутствие дополнительной частицы, например ядра.

Образованию пары фотоном в поле ядра соответствуют две диаграммы:

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram 1: } k \text{ (wavy)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow p_- \text{ (solid)} \\
 \text{Diagram 1: } \text{vertex} \leftarrow q \text{ (wavy, marked X)} \leftarrow \text{vertex} \rightarrow -p_+ \text{ (solid)} \\
 \text{Label: } f_1 \\
 \\
 \text{Diagram 2: } q \text{ (wavy, marked X)} \rightarrow \text{vertex} \rightarrow p_- \text{ (solid)} \\
 \text{Diagram 2: } \text{vertex} \leftarrow k \text{ (wavy)} \leftarrow \text{vertex} \rightarrow -p_+ \text{ (solid)} \\
 \text{Label: } f_2 \\
 \\
 \text{Sum: } +
 \end{array}
 \quad (4.136)$$

На них p_- и p_+ обозначают 4-импульсы электрона и позитрона, k – импульс фотона, а q – импульс, характеризующий поле ядра.

Согласно правилам Фейнмана, матричный элемент этого процесса можно записать в следующем виде:

$$S_{if}^{(2)} = \frac{ie^2}{\sqrt{2\omega}} \bar{u}(p_-) \left\{ e \frac{if_1 - m}{f_1^2 + m^2} A^e(q) + A^e(q) \frac{if_2 - m}{f_2^2 + m^2} e \right\} v(-p_+). \quad (4.137)$$

Здесь $A^e(q)$ – фурье-компонента поля ядра, а

$$\begin{aligned} f_1 &= p_- - k = -p_+ + q, \\ f_2 &= -p_+ + k = p_- - q \end{aligned} \quad (4.138)$$

суть импульсы виртуального электрона.

Процессу образования пары двумя фотонами соответствуют те же две диаграммы (4.136) с той лишь разницей, что теперь оба импульса k и q принадлежат фотонам (вместо q будем теперь писать импульс k'). Такое, казалось бы, небольшое различие в виде диаграмм приводит к существенно отличному от (4.137) выражению для матричного элемента:

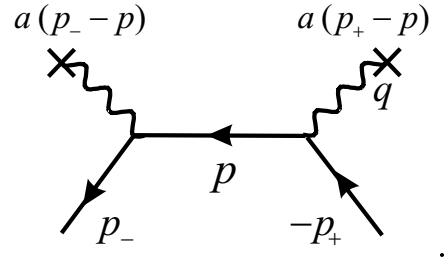
$$\begin{aligned} S_{if}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2\sqrt{\omega\omega'}} \bar{u}(p) \left\{ e \frac{if_2 - m}{f_2^2 + m^2} e' + e' \frac{if_1 - m}{f_1^2 + m^2} e \right\} v(-p_+) \times \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta(k + k' - p_+ - p_-), \end{aligned} \quad (4.139)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= -p_+ + k = p_- - k', \\ f_2 &= -p_+ + k' = p_- - k. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Вычисление матричных элементов (4.137) и (4.139) показывает, что процесс образования пары фотоном в поле ядра является много более эффективным.

Рассмотрим теперь образование пар при рассеянии быстрых заряженных частиц, например ядер с зарядами $Z_1 e$ и $Z_2 e$. Этому процессу соответствует диаграмма


(4.141)

Матричный элемент процесса равен

$$S_{if}^{(2)} = i (2\pi)^4 e^2 \bar{u}(p) \int d^4 p \frac{a(p_- - p)}{(2\pi)^4} \frac{ip - m}{p^2 + m^2} \frac{a(p_+ + p)}{(2\pi)^4} v(p_+), \quad (4.142)$$

где $a(q)$ – фурье-компонента суммарного потенциала, создаваемого обоими зарядами.

4.5.2. Аннигиляция пары

Наряду с образованием электронно-позитронных пар фотонами возможны процессы превращения пар в фотоны. Эти процессы называются аннигиляцией пары. Если электрон и позитрон являются свободными, то аннигиляция с испусканием одного фотона невозможна, так как этот процесс не допускается законами сохранения энергии и импульса. Для превращения свободной пары в фотон необходимо по крайней мере два фотона. Однако если позитрон сталкивается со свободным электроном, то возможна однофотонная аннигиляция.

Двухфотонной аннигиляции пары соответствуют две диа-

граммы:

$$+ \quad (4.143)$$

Они совпадают с диаграммами, изображающими рождение пары двумя фотонами, – процесс, обратный двухфотонной аннигиляции. Матричный элемент, описывающий двухфотонную аннигиляцию, можно записать в виде

$$S_{if}^{(2)} = \frac{ie^2}{2\sqrt{\omega\omega'}} \bar{v}(-p_+) \left\{ e \frac{if_1 - m}{f_1^2 + m^2} e' + e' \frac{if_2 - m}{f_2^2 + m^2} e \right\} u(p_-) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(p_+ + p_- - k - k'). \quad (4.144)$$

4.5.3. Процессы в третьем порядке теории возмущений

Все рассмотренные выше процессы описываются диаграммами второго порядка. В третьем порядке возникают другие превращения частиц. Рассмотрим только два. Первый процесс заключается в излучении фотона при столкновении электрона с электроном или позитроном. Необходимо рассматривать элементы матрицы рассеяния, которые связывают одно фотонное состояние с четырьмя электронными, из которых два начальных и два конечных. Очевидно, такие процессы могут появиться в третьем порядке.

Процесс излучения фотона в результате столкновения двух

из которых укажем в явном виде:

$$(4.147)$$

Остальные диаграммы могут быть получены, если поменять местами импульсы реального и виртуального фотонов, а также импульсы электронов в конечном состоянии p_2 и p_2' (p_1 – импульс электрона в начальном состоянии, p_+ – импульс позитрона).

Чтобы получить матричный элемент $S_{if}^{(3)}$ указанного процесса, достаточно в нем сделать замену:

$$p_2' \rightarrow -p_+, \quad k \rightarrow -k, \quad u' \rightarrow v(-p_+). \quad (4.148)$$

Приведенных примеров достаточно для понимания преимуществ описания процессов рассеяния частиц в терминах диаграммной техники. Такие же диаграммные методы будут использоваться в следующих главах, посвященных слабому и сильному взаимодействию частиц, где мы уже не будем детально излагать теорию возмущений для этих взаимодействий.

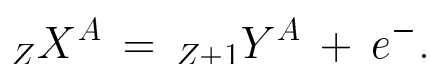
Глава 5

Слабые взаимодействия

5.1. β -распад

5.1.1. Предсказание нейтрино

История исследования слабых взаимодействий началась с изучения β -распада. Ядро химического элемента ${}_Z X^A$, (A – число нуклонов в ядре, или массовое число, Z – число протонов, т.е. порядковый номер элемента в таблице Менделеева) испускает электрон и переходит в ядро элемента в соседней справа клетке таблицы. Первоначально считалось, что процесс выглядит так:



Распределение вылетевших электронов по энергиям представляет собой непрерывную функцию $\rho(E_e)$, показанную на рис. 5.1. При этом возникают вопросы, которые, на первый взгляд, не имеют ответа.

Уже в 30-е годы XX века было известно, что ядра – квантовые системы с дискретным энергетическим спектром. При β -распаде ядро переходит с одного энергетического уровня E_a на другой уровень E_b . Казалось бы, электрон должен уносить энергию, равную разности $\varepsilon_e = E_a - E_b$ (рис. 5.2). Тогда спектр

энергий вылетающих электронов должен быть дискретный, в то время как наблюдается непрерывный спектр.

Нильс Бор даже осмелился предположить, что во взаимодействиях, ответственных за β -распад (они и были названы "слабыми"), не выполняется закон сохранения энергии. Но оказалось, что и закон сохранения момента импульса тоже не выполняется, что уже более серьезно. Действительно, в основе электронного β -распада лежит элементарный процесс распада нейтрона:

$$N^0 = P^+ + e^-, \quad (5.1)$$

причем спин нейтрона $I_N = 1/2$, спин протона $I_{P^+} = 1/2$, спин электрона также $I_{e^-} = 1/2$, поэтому при таком распаде спин не сохраняется.

Тогда Вольфганг Паули предсказал, что при β -распаде испускается еще одна частица, которая должна быть электрически нейтральна. Поскольку эта частица не "улавливалась", то у нее должна быть очень большая проникающая способность, т.е. очень малая масса. Эта "гипотетическая" частица была названа нейтрино.

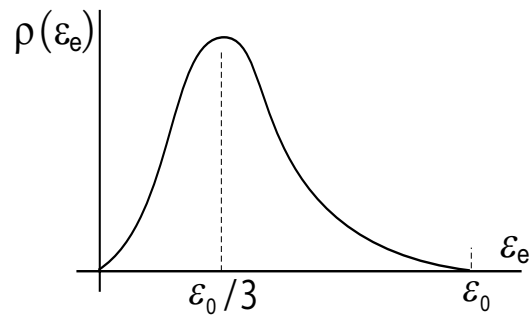


Рис. 5.1. Распределение электронов по энергиям при β -распаде

Энрико Ферми в конце 1930-х годов построил элементарную теорию β -распада. Постоянная β -распада — это вероятность распада ядра в единицу времени, т.е. вероятность перехода квантовой системы из состояния с энергией E_a в состояние с энергией E_b . Квантовая механика дает выражение для веро-

ятности перехода за единицу времени

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle b | \hat{H}_{\text{вз.}} | a \rangle \right|^2 \rho(\varepsilon_b), \quad (5.2)$$

т.е. знаменитое золотое правило Ферми. Эта формула приближенная и получается в первом порядке теории возмущений. Вероятность, даваемая формулой (5.2), зависит от угла вылета электрона из ядра. Поэтому постоянная распада λ_p получается интегрированием W по всем направлениям вылета:

$$\lambda_p = \int W d\Omega,$$

где $d\Omega$ – элемент телесного угла.

В то время, когда Ферми создавал свою теорию, вид гамильтониана слабого взаимодействия еще не был известен (не было даже предположений, чтобы его узнать). Поэтому Ферми просто посчитал, что $\left| \langle b | \hat{H}_{\text{вз.}} | a \rangle \right|^2 = |M|^2$, где M – некоторая константа, и все внимание перенес на расчет $\rho(\varepsilon_b)$ – функцию распределения по энергии конечных состояний, т.е. вылетающих электронов. Для расчета $\rho(\varepsilon_b)$ нужно определить число состояний в фазовом пространстве, приходящихся на интервал энергий от ε_b до $\varepsilon_b + d\varepsilon$.

Вычислим плотность состояний свободной релятивистской частицы. Как известно из теории относительности, ее энергия связана с импульсом как

$$\varepsilon = (m^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}. \quad (5.3)$$

Отсюда следует, что все состояния, характеризующиеся заданной величиной импульса и всевозможными его направлениями, имеют одинаковую энергию. В пространстве

импульсов, в котором каждой точке отвечает определенный вектор импульса, множество всех состояний с заданной энергией изобразится сферой с центром в нуле ($p_x = p_y = p_z = 0$). Объем в зазоре между двумя сферами радиусом p и $p + dp$ равен $4 \pi p^2 dp$. Сколько различных состояний свободного электрона приходится на этот объем?

Допустим, электрон находится внутри кубического ящика объемом $V = L^3$ (на самом деле геометрическая форма ящика не принципиальна). В силу соотношения неопределенностей Гайзенберга, наилучшая точность, с которой может быть измерен импульс, есть $(\Delta p_x)_{min} \sim 2 \pi \hbar / (\Delta x)_{max} = 2 \pi \hbar / L$.

Другими словами, не имеет физического смысла говорить о двух состояниях, импульсы которых различались бы меньше чем на $(\Delta p_x)_{min}$. Тогда в пространстве импульсов на одно состояние приходится объем $(\Delta^3 p)_{min} = (\Delta p_x)_{min} (\Delta p_y)_{min} (\Delta p_z)_{min} = (2 \pi \hbar)^3 / V$. Следовательно, на объем $4 \pi p^2 dp$ приходится

$$\rho(p) dp = \frac{4 \pi p^2 dp}{\Delta^3 p_{min}} = \frac{V 4 \pi p^2 dp}{(2 \pi \hbar)^3}$$

различных состояний. Если мы хотим перейти к функции $\rho(\varepsilon)$, то для этого достаточно лишь выразить в полученной формуле p через ε . Пользуясь (5.3), находим:

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{V}{2 \pi h^3 c^2} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2 c^2} \varepsilon d\varepsilon. \quad (5.4)$$

В нашем случае конечное состояние после β -распада – это состояние двух свободных частиц, электрона и антинейтрино

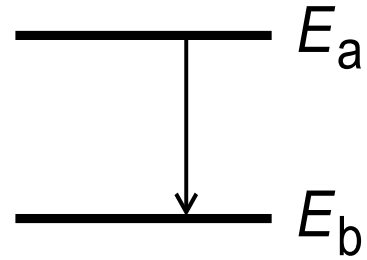


Рис. 5.2. Двухуровневая система

$\tilde{\nu}^0$, которые делят между собой энергию $\varepsilon_0 = E_a - E_b$. Функция $\rho(\varepsilon_{\text{кон}})$, которая измеряется в эксперименте и которая входит в выражение (5.2), есть произведение соответствующих плотностей состояний для электрона и антинейтрино:

$$\rho(\varepsilon_{\text{кон}}) = \rho(\varepsilon_e) \rho(\varepsilon_{\tilde{\nu}}). \quad (5.5)$$

Применяя дважды формулу (5.3) для $\rho(\varepsilon_e)$ и $\rho(\varepsilon_{\tilde{\nu}})$ с учетом того, что $\varepsilon_{\tilde{\nu}} = \varepsilon_0 - \varepsilon_e$, и пренебрегая массой антинейтрино, получаем

$$\rho(\varepsilon_{\text{кон}}) = \left(\frac{V}{2\pi h^3} \right)^2 \frac{1}{c^5} \sqrt{\frac{\varepsilon_e^2}{c^2} - m^2 c^2} \varepsilon_e (\varepsilon_0 - \varepsilon_e)^2. \quad (5.6)$$

Эта формула прекрасно описывает экспериментальную кривую на рис. 5.1.

5.1.2. Несохранение четности

В изложенном выше виде элементарная теория β -распада Ферми просуществовала до 1957 г., затем начались сюрпризы. Возникла так называемая "загадка $\tau - \theta$ ". Две частицы, τ^0 и θ^0 , распадаются по следующим схемам:

$$\begin{aligned} \tau^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^- + \pi^+, & t &\sim 10^{-10} \text{ с.} \\ \theta^0 &\rightarrow \pi^- + \pi^+, & t &\sim 10^{-8} \text{ с.} \end{aligned}$$

Сложность состояла в том, что по всем остальным свойствам обе эти частицы в точности совпадают с K^0 - мезоном. Четность π -мезонов отрицательна, для продуктов распада четности перемножаются. Получается, что в одном случае четность K^0 - мезона положительна, а в другом – отрицательна, хотя до сих пор закон сохранения четности выполнялся во всех из-

вестных случаях. Ли и Янг предположили, что в слабых взаимодействиях четность может не сохраняться.

Для проверки этого утверждения необходимо осуществить следующее. Во-первых, учесть, что в индивидуальном акте распада электрон вылетает с каким-то определенным направлением импульса (рис. 5.3). Для фиксирования этого направления необходимо выбрать систему ко-

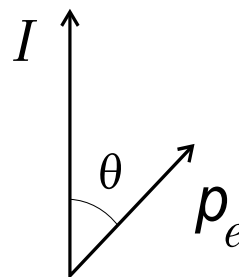
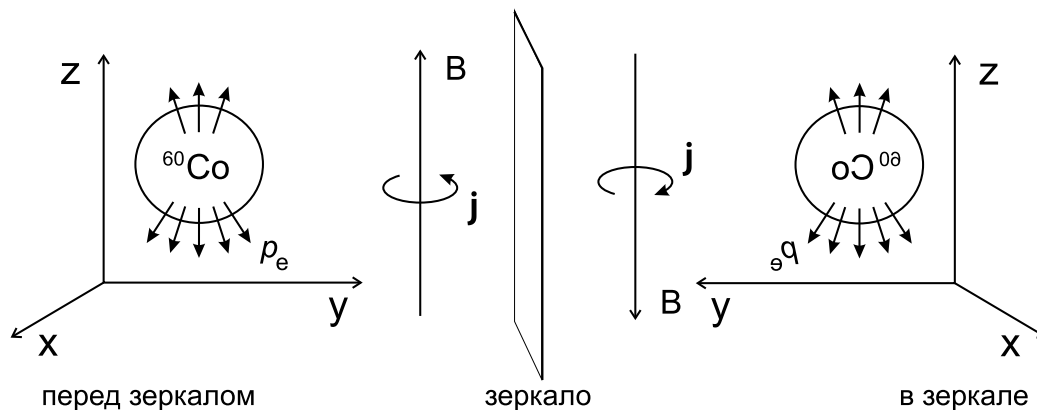


Рис. 5.3. Ориентация импульса электрона относительно спина ядра

ординат, непосредственно связанную с распадающимся ядром, например связать ее с направлением спина ядра $\mathbf{I}$. Если функция распределения по углам $f(\theta)$ не зависит от инверсии системы координат, то четность в таком процессе должна сохраняться, если же зависит – то она не сохраняется. Следовательно, гамильтониан не коммутирует с оператором инверсии. Однако во всех известных к тому времени экспериментах проверить это не представлялось возможным. Распределение вылетевших электронов по углам всегда было изотропным. Это может быть по двум причинам: либо процесс изотропен на уровне элементарного акта, т.е. $f(\theta)$ не зависит от θ , либо сами спины отдельных ядер направлены хаотически. Чтобы понять, какая из причин имеет место, необходимо наблюдать β -распад в поляризованном образце, в котором ядерные спины были бы по возможности параллельны друг другу.

Такой эксперимент был осуществлен Ву и Телегди с сотрудниками. Рассматривался образец ^{60}Co , поляризованный методом динамической поляризации ядер в сильном постоянном

Рис. 5.4. Иллюстрация нарушения четности при β -распаде

магнитном поле при низкой температуре. Распад происходит по схеме: ${}^{60}\text{Co} = {}^{60}\text{Ni} + e^- + \tilde{\nu}^0$, которая показана на рис. 5.4., где $\mathbf{p}_e$ – импульс электронов, вылетающих при β -распаде, $\mathbf{B}$ – вектор напряженности постоянного магнитного поля, θ – угол между $\mathbf{p}_e$ и $\mathbf{B}$. Эксперимент показал, что функция распределения по углам θ вылетающих электронов неизотропна:

$$f(\theta) = A - B \cos \theta,$$

(A и B – постоянные).

Чтобы убедиться, что этот процесс неинвариантен относительно инверсии системы координат, "отразим" его в зеркале, меняющем направление на противоположное той оси системы координат, которая перпендикулярна плоскости зеркала. Импульсы – векторы полярные; как их отразить в зеркале – понятно. А как отразить в зеркале магнитное поле? Напряженность магнитного поля – аксиальный вектор. Свяжем его с полярным вектором, вспомнив, что постоянное магнитное поле создается круговым током $\mathbf{j}$. Итак, выбираем правую систему координат, а зеркало располагаем в плоскости xOz . Очевидно, что в "зазеркалье" процесс выглядит по-другому: бо́льшая часть электронов будет двигаться в сторону поля.

Это видно и аналитически: при инверсии системы координат угол θ заменяется на $\theta - \pi$, а $\cos \theta$ на $-\cos \theta$.

5.1.3. Гипотеза двухкомпонентного нейтрино

Итак, в описанном выше эксперименте получено доказательство того, что в слабых взаимодействиях не выполняется закон сохранения четности. Как это можно объяснить? Электрон – хорошо изученная частица, которая участвует во множестве процессов, где четность сохраняется. По видимому, "виновато" нейтрино. Была выдвинута гипотеза "двухкомпонентного" нейтрино. Согласно теории Дирака, частица со спином $1/2$ характеризуется четырехкомпонентной волновой функцией. В слаборелятивистском пределе две компоненты относятся к решениям с положительной энергией $E > mc^2$ и соответствуют двум разным ориентациям спина относительно импульса $\mathbf{p}$ (спиральности "правая" и "левая"). Это – собственно частица. Две компоненты, относящиеся к решениям с отрицательной энергией $E < -mc^2$, характеризуют античастицу с двумя различными спиральностями. Состояния с правой и левой спиральностями изобразятся так:

$$\begin{aligned}
 &E > 0, \text{ частица} \\
 &\text{правый винт } |\Psi_1\rangle = |\uparrow_{\mathbf{p}} \uparrow_{\mathbf{s}}\rangle, \quad \text{левый винт } |\Psi_2\rangle = |\uparrow_{\mathbf{p}} \downarrow_{\mathbf{s}}\rangle. \\
 &E < 0, \text{ античастица} \\
 &\text{правый винт } |\Psi_3\rangle = |\uparrow_{\mathbf{p}} \uparrow_{\mathbf{s}}\rangle, \quad \text{левый винт } |\Psi_4\rangle = |\uparrow_{\mathbf{p}} \downarrow_{\mathbf{s}}\rangle.
 \end{aligned}$$

По гипотезе двухкомпонентного нейтрино в природе может быть только левовинтовое нейтрино, а антинейтрино – правовинтовое. Если это свойство нейтрино фундаментальное, то это значит, что нет такой системы координат, которая могла

бы обгонять нейтрино, так чтобы оно стало относительно данной системы правовинтовым. Следовательно, само нейтрино может двигаться только со скоростью света, а значит, его масса покоя должна быть нулевой.

Эта теория прекрасно объясняет результаты эксперимента Ву. Действительно, рождаясь в магнитном поле, электроны в соответствии с распределением Больцмана будут иметь преимущественное направление спина $\mathbf{s}_e$ (и связанного с ним магнитного момента) против магнитного поля. В самом деле, энергия свободного электрона в магнитном поле равна

$$E_m = \frac{|e|\hbar}{m_e c} m B_z,$$

где $m = \pm 1/2$ – спиновое магнитное число. Ясно, что наименьшую энергию будет иметь состояние с $m = -1/2$. По закону сохранения момента, спины вылетевших вместе с ними антинейтрино должны быть направлены по полю. Но антинейтрино – правовинтовое, следовательно, его импульс $\mathbf{p}_{\bar{\nu}}$ должен быть направлен также по полю. Далее ”работает” закон сохранения импульса: импульс электрона $\mathbf{p}_e$ должен быть противоположен импульсу антинейтрино $\mathbf{p}_{\bar{\nu}}$, т.е. должен быть направлен против поля !

На рис. 5.5 изображены векторы импульсов и спинов электрона и антинейтрино в процессе β -распада ”перед зеркалом”, т.е. в правой системе координат, и ”в зеркале”, т.е. в левой системе координат. Учитывая, что спины – аксиальные векторы – при инверсии отражаются так же, как и магнитное поле, получаем картинку, показанную на рис. 5.5. Как видно, в правой системе координат антинейтрино – левый винт, но по гипотезе двухкомпонентного нейтрино такого антинейтрино в природе

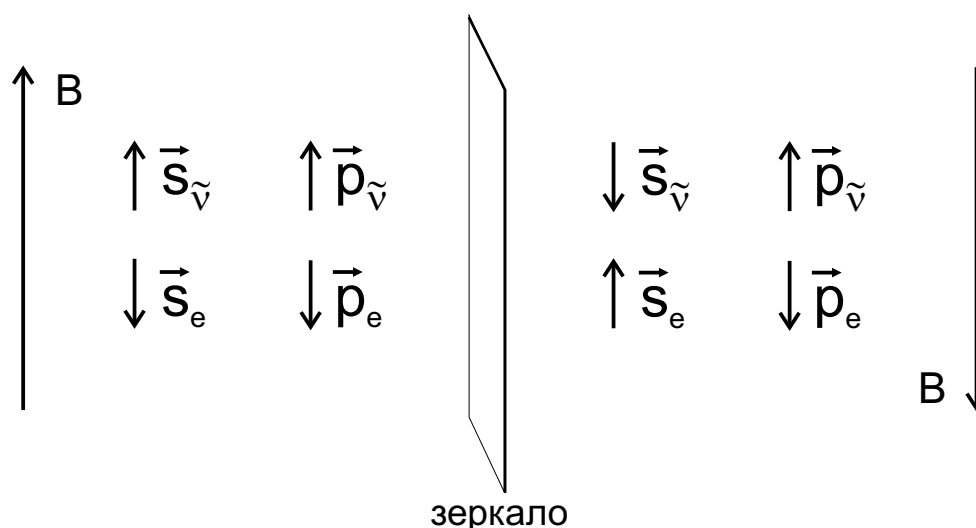


Рис. 5.5. Двухкомпонентное нейтрино, отраженное в зеркале

нет. Следовательно, не может быть и такого процесса, что свидетельствует о неинвариантности его при инверсии.

Процесс β -распада будет инвариантен относительно одновременного преобразования инверсии и зарядового сопряжения, т.е. замены частиц античастицами. Это так называемая CP -инвариантность (C – зарядовое сопряжение, P – инверсия). Позже была сформулирована CPT -теорема, утверждающая, что в природе реализуются только процессы, инвариантные относительно одновременного CPT -преобразования, где T – операция изменения направления времени, $t \rightarrow -t$. Как оказалось в действительности, относительно CP -преобразования слабое взаимодействие не является строго инвариантным.

5.2. Гамильтониан слабого взаимодействия

5.2.1. Формирование дублетов частиц

Когда мы пишем гамильтониан, то четко представляем себе, что с чем взаимодействует. С чем же взаимодействует нейтрон

или протон, испытывающий β -распад ? Напомним, что эти процессы происходят по следующей схеме:

$$N^0 = P^+ + e^- + \tilde{\nu}_e, \quad (5.7)$$

$$P^+ = N^0 + e^+ + \nu_e. \quad (5.8)$$

Попробуем по правилам алгебры симметризовать эти равенства, перенося частицы из правой части в левую с заменой их на соответствующие античастицы (или наоборот). При этом будут выполняться все законы сохранения, а предыдущие формулы примут вид

$$N^0 + \nu_e = P^+ + e^-, \quad (5.9)$$

$$P^+ + e^- = N^0 + \nu_e. \quad (5.10)$$

Если использовать интерпретацию Дирака, то можно предположить, что реальный нейтрон взаимодействует с нейтрино из фона отрицательных энергий, в результате чего нейтрино переходит в состояние с положительной энергией и одновременно меняет проекцию слабого изотопического спина, превращаясь в электрон. "Дырка" в фоне отрицательных энергий воспринимается как антинейтрино.

Действительно, в β -распаде мы имеем дело с двумя изотопическими дублетами: нуклонным и лептонным. Нуклонный дублет $\begin{pmatrix} P^+ \\ N^0 \end{pmatrix}$ имеет изотопический спин $T = 1/2$, причем для протона (P^+) z -компонента изотопического спина равна $T_z = +1/2$, для нейтрона (N^0) $T_z = -1/2$. На уровне кварков мы должны рассматривать дублет $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, так как кварковая структура протона — uud , а нейтрона — udd . Изотопический спин лептонного дублета $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$ также равен $T^L = 1/2$. Отсюда для нейтрино $T_z^L = +1/2$, для электрона — $T_z^L = -1/2$.

Таким образом, в процессе электронного β -распада происходит одновременный переход между состояниями в обоих этих дублетах с изменением z -проекции изотопического спина: $\Delta T = +1$, $\Delta T_z^L = -1$, что можно изобразить так:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \uparrow, \quad \begin{pmatrix} P^+ \\ N^0 \end{pmatrix} \uparrow, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \downarrow. \quad (5.11)$$

Стрелки рядом с символом дублета указывают направление перехода.

В позитронном β^+ -распаде процесс идет в обратном порядке: $\Delta T = -1$, $\Delta T_z^L = +1$:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \downarrow, \quad \begin{pmatrix} P^+ \\ N^0 \end{pmatrix} \downarrow, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \uparrow. \quad (5.12)$$

5.2.2. Модель Ферми

Теперь можно попытаться написать гамильтониан слабого взаимодействия, поскольку мы знаем операторы, изменяющие проекцию изоспина:

$$\begin{aligned} T_{\pm} &= T_x \pm i T_y && - \text{для "сильного" дублета,} \\ T_{\pm}^L &= T_x^L \pm i T_y^L && - \text{для "слабого" дублета.} \end{aligned}$$

Гамильтониан должен иметь вид

$$H = c \cdot (T_+ T_-^L O O^L + T_- T_+^L O^+ O^{L+}). \quad (5.13)$$

Здесь c – некоторая константа, O и O^L – операторы, составленные из дираковских операторов Ψ , $\bar{\Psi}$ для электрона и ϕ , $\bar{\phi}$ – для лептона. Гамильтониан слабого взаимодействия должен быть псевдоскаляром или скаляром. Поэтому для операторов

O , O^L существуют следующие варианты:

1. $O = \bar{\Psi} \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \phi$ – скаляр H_S ;
2. $O = \bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \phi$ или
 $O = \bar{\Psi} \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \gamma_5 \phi$ – псевдоскаляр H_P ;
3. $O = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \gamma_\mu \phi$ – скаляр H_V ;
4. $O = \bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \gamma_\mu \phi$ или
 $O = \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \gamma_\mu \gamma_5 \phi$ – псевдоскаляр H_A ;
5. $O = \bar{\phi} \gamma_\mu \gamma_\nu \Psi$, $O^L = \bar{\phi} \gamma_\mu \gamma_\nu \phi$ – скаляр H_T .

Если учесть все возможности, то в общем случае гамильтониан состоит из пяти членов:

$$H = H_S + H_P + H_V + H_A + H_T. \quad (5.14)$$

Как видим, здесь около десятка комплексных произвольных постоянных. Тщательные расчеты углового распределения и эффективных сечений слабых процессов привели к выводу, что можно ограничиться двумя из них:

$$H = H_V + H_A, \quad (5.15)$$

а все константы могут быть выражены через одну константу слабого взаимодействия (константу Ферми):

$$G = \frac{1.02 \cdot 10^{-5}}{M_p^2} = (294 \text{ ГэВ})^{-2},$$

где $M_p = 938 \text{ МэВ}$ – масса протона. Этот гамильтониан фигурирует в теории Ферми; в него входит взаимодействие ток-ток¹.

¹Напомним, что в теории Дирака ток вероятности имеет вид: $j_\mu = i \bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$.

Можно написать и гамильтониан лептон-лептонного взаимодействия для таких процессов, как

$$\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-; \nu_\mu \mu^- \rightarrow \nu_\mu \mu^-; \nu_\tau \tau^- \rightarrow \nu_\tau \tau^-; \mu^- \rightarrow e^- \nu_e \tilde{\nu}_e. \quad (5.16)$$

Гамильтониан имеет следующий вид:

$$H(x) = \frac{4G}{\sqrt{2}} \left(j_\mu^{(+)}(x) j_\mu^{(-)}(x) + j_\mu^{(0)}(x) j_\mu^{(0)}(x) \right), \quad (5.17)$$

где $\mu = 1, 2, 3, 4$,

$$j_\mu^{(+)} = \bar{\Psi}_{\nu_e}(x) \gamma_\mu^L \Psi_e(x) + \bar{\Psi}_{\nu_\mu}(x) \gamma_\mu^L \Psi_\mu(x) + \bar{\Psi}_{\nu_\tau}(x) \gamma_\mu^L \Psi_\tau(x), \quad (5.18)$$

$$\gamma_\mu^L = \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5), \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad (5.19)$$

и Ψ_i ($i = e, \nu_e; \mu, \nu_\mu; \tau, \nu_\tau$) – дираковские функции. Формула (5.18) дает выражение для ”заряженного тока”. Таким же образом вводится ток $j_\mu^{(-)}$, а также ”нейтральный ток” $j_\mu^{(0)}$. Поскольку функции Ψ и $\bar{\Psi}$ в соответствии с правилами квантования электронно-позитронного (в общем случае – спинорного) поля представляют собой сумму операторов рождения и уничтожения частиц и античастиц, то смысл, например, первого слагаемого в формуле (5.18) для $j_\mu^{(+)}$ следующий: оператор $\bar{\Psi}_{\nu_e}(x) \gamma_\mu^L \Psi_e(x)$ описывает либо рождение нейтрино ν_e и позитрона e^+ , либо уничтожение антинейтрино $\tilde{\nu}_e$ и электрона e^- , либо уничтожение $\tilde{\nu}_e$ и рождение e^+ .

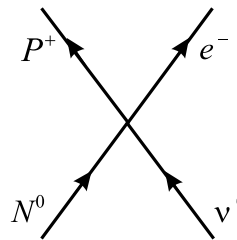
Таким образом, токи $j_\mu^{(\pm)}$ описывают процессы передачи заряда от заряженных лептонов к соответствующим нейтрино. Ток $j_\mu^{(+)}$ повышает заряд на единицу (в единицах заряда электрона), ток $j_\mu^{(-)}$ эрмитово сопряжен к $j_\mu^{(+)}$ и уменьшает заряд на единицу, нейтральный ток заряда не изменяет.

Матрица $(1+\gamma_5)/2$ является проекционным оператором, выделяющим из биспинора Ψ его "левую" компоненту, соответствующую направлению спина частицы против ее импульса.

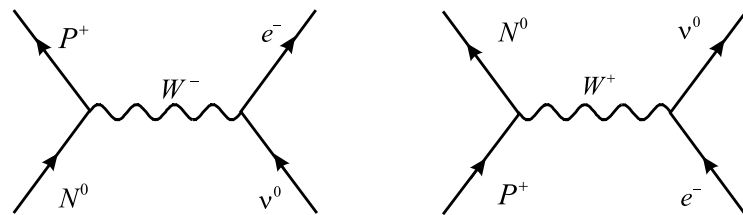
Гамильтонианы (5.15) и (5.17) описывают так называемое универсальное четырехфермионное взаимодействие.

5.2.3. Гипотеза векторных бозонов

С помощью гамильтонианов (5.15) и (5.17) построить инвариантную теорию возмущений наподобие квантовой электродинамики с графиками Фейнмана не представляется возможным. Действительно, попробуем начертить график, соответствующий процессу $N^0 + \nu_e = P^+ + e^-$:


(5.20)

Вспомним, что в КЭД в каждой вершине должны сходиться две фермионные и одна бозонная линии, в то время как в (5.20) в одной вершине сходятся четыре фермионных линии. Бозонная линия соответствует полю, посредством которого осуществляется взаимодействие между фермионами. Естественнo предположить, что и слабое взаимодействие также осуществляется с помощью некоторых полей, квантами которых являются бозе-частицы. В этом случае графики таких процессов будут выглядеть так:


(5.21)

Чтобы электрический заряд в каждой вершине сохранялся, необходимо предположить, что промежуточные бозоны $W^\pm$ должны быть заряжены. Если учесть кварковую структуру нуклона, то для β -распада можно нарисовать такую диаграмму:

$$(5.22)$$

Для других "слабых" процессов, например распада мюона, имеем следующую диаграмму:

$$(5.23)$$

Таким процессам соответствуют заряженные токи. Есть процессы и с нейтральными токами, например $\nu_e e^-$ -рассеяние:

$$(5.24)$$

где лептоны обмениваются нейтральными бозонами W^0 (Z^0).

Таким образом были предсказаны новые частицы, осуществляющие взаимодействия – промежуточные бозоны W . Исходя из радиуса слабых взаимодействий ($R \sim 10^{-15}$ см) можно оценить массу этих виртуальных бозонов с помощью соотношения неопределенностей для виртуальных процессов:

$$M_W c^2 \cdot \tau \sim \hbar,$$

где время жизни W -бозона τ связано с радиусом взаимодействия: $R \sim c \cdot \tau = \hbar/M_W c$. Отсюда следует, что $M_W \sim 100 \text{ ГэВ}$. Экспериментально W -бозоны были обнаружены в 1983 г. Их масса оказалась $\sim 80.4 \text{ ГэВ}$. Но W -бозоны – не единственные частицы, предсказанные при изучении слабых взаимодействий. Об этом речь пойдет ниже.

5.2.4. Три поколения кварков и лептонов

Рассмотрим следующие факты:

1. На первый взгляд кажется, что вероятность всех процессов должна быть примерно одинакова. Но константы взаимодействия в β -распаде и распаде со странными частицами оказываются разными, причем $G_S \ll G_\beta$, т.е. распады странных частиц подавлены. Дело обстоит так, как будто константа слабого взаимодействия G складывается следующим образом:

$$G^2 = G_\beta^2 + G_S^2, \quad (5.25)$$

а во взаимодействиях участвует суперпозиция кварков, а не один кварк:

$$d_c = d \cos \theta_c + s \sin \theta_c. \quad (5.26)$$

Здесь $\cos \theta_c$ и $\sin \theta_c$ – ”веса” этих вкладов. Угол θ_c называется углом Кабиббо. Из экспериментально определенных констант G_β и G_S следует, что $\theta_c = 15^\circ$. Поэтому $G_\beta \sim G \cos \theta_c$, а $G_S \sim G \sin \theta_c$, и вероятности процессов относятся как

$$\frac{W_S}{W_P} \sim \frac{\sin^2 \theta_c}{\cos^2 \theta_c}. \quad (5.27)$$

Итак, теперь вместо кваркового дублета $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ мы имеем дублет $\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}$.

2. Почему-то не наблюдается процесс распада s -кварка:

$$s \rightarrow d + Z^0, \quad (5.28)$$

т.е. нейтральный ток, нарушающий странность. Необходимо найти механизм подавления этой реакции. Он был открыт в 1970 г. Глэшоу, Иллиопулосом и Майани (механизм "ГИМ"). Наряду с комбинацией (5.26) есть еще ортогональная ей комбинация. Выпишем обе суперпозиции:

$$\begin{aligned} d_c &= d \cos \theta_c + s \sin \theta_c, \\ s_c &= -d \sin \theta_c + s \cos \theta_c. \end{aligned} \quad (5.29)$$

У обеих частиц $T_z = -\frac{1}{2}$, $Q = -\frac{1}{3}$. Тогда в процессе (5.28) будут участвовать обе суперпозиции. Естественно, условие нормировки исходных и новых состояний требует выполнения равенства:

$$d^2 + s^2 = d_c^2 + s_c^2. \quad (5.30)$$

Таким образом, произведение весовых множителей (амплитуд вероятностей) в суперпозиции d_c пропорционально $\cos \theta_c \sin \theta_c$, а в суперпозиции s_c — $-\cos \theta_c \sin \theta_c$. Полная же амплитуда равна сумме этих двух амплитуд:

$$\cos \theta_c \sin \theta_c - \cos \theta_c \sin \theta_c = 0.$$

Это значит, что процесс (5.28) запрещен.

Итак, теперь вместо старых кварковых дублетов имеем один дублет: $\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}$. Очевидно, что для завершенности должен быть еще один кварк с $Q = 2/3$ и $S = 0$. Это — очарованный c -кварк. Он был обнаружен в 1973 г. одновременно в трех лабораториях мира.

3. В 1975 г. были найдены новые лептоны, мюон τ^- и мюонное нейтрино ν_τ . Процессы с ними также имеют свою вероятность, поэтому, по-видимому, есть малое "подмешивание" к константе G :

$$G^2 > G_\beta^2 + G_S^2$$

с очень малым отклонением от равенства.

Мы видим, что в процессах, где в слабых взаимодействиях наряду с лептонами принимают участие и адроны, наблюдается следующая закономерность: там, где участвуют $(u\ d)$ -кварки, обязательно участвуют лептоны $(\nu_e\ e^-)$; при участии странных частиц и $(s\ s_c)$ -кварков всегда присутствуют $(\nu_\mu\ \mu^-)$ -лептоны. Что же соответствует $(\nu_\tau\ \tau^-)$ -дублету? Сопоставим кварковые и лептонные дублеты:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s_s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Тогда ответ на поставленный вопрос кажется очевидным: должно быть еще два кварка, $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$. Кварк b был найден экспериментально в 1977 г. Он имеет массу 4.3 ГэВ. Кварк t был обнаружен в 1994 г. Его масса 176 ГэВ. Итак, в настоящий момент имеем три поколения кварков и лептонов.

5.3. От теории Ферми – к единой теории электрослабого взаимодействия

5.3.1. Трудности теории Ферми

Изложенная выше модель Ферми хорошо описывает слабые распады элементарных частиц, а также рассеяние нейтрино. Однако при высоких энергиях в этой модели возникают трудности (не говоря уже о том, что в нее не включены W-бозоны).

Рассмотрим проблему на примере только электрон-нейтринных взаимодействий, лагранжиан которых запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \bar{e}(x) (i\gamma\partial - m_e) e(x) + \bar{\nu}_e(x) i\gamma\partial \nu_e(x) + \\ & + \frac{4G}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_e(x) \gamma_\mu^L e(x)) (\bar{e}(x) \gamma_\mu^L \nu_e(x)), \end{aligned} \quad (5.33)$$

куда были введены сокращенные обозначения: $\bar{\Psi}_e \equiv \bar{e}(x)$, $\bar{\Psi}_{\nu_e} \equiv \bar{\nu}_e(x)$, $\Psi_e \equiv e(x)$, $\Psi_{\nu_e} \equiv \nu_e(x)$. Первое слагаемое – лагранжиан свободного электрона, второе – лагранжиан свободного нейтрино, третье – лагранжиан электрон-нейтринных взаимодействий ($\nu_e e$); нейтрино считается безмассовым.

Теория Ферми неперенормируема, т.е. в диаграммах можно вычислять сечения процессов только в низших порядках теории возмущений, которым соответствуют диаграммы, не содержащие петель. При высоких энергиях нарушается условие унитарности S-матрицы и возникают расходимости. О расходимости ряда теории возмущений с гамильтонианом Ферми можно судить уже по тому, что константа связи $G \sim 1/M_p^2$. Отсюда следует, что безразмерный параметр, по которому проводится разложение, должен иметь вид ε^2/M_p^2 , где ε – энер-

гия. Отсюда видно, что с ростом энергии высшие члены будут расходиться.

Рассмотрим амплитуду некоторого процесса перехода $i \rightarrow f$, которая определяется следующим образом:

$$M_{if} = \frac{4G}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\nu(k') \gamma_\mu^L u_e(p)] [\bar{u}_e(p') \gamma_\mu^L u_\nu(k)]. \quad (5.34)$$

Здесь $u_\nu(k)$ и $\bar{u}_\nu(k')$ – биспинорные амплитуды нейтрино с 4-импульсом k , $u_e(p)$ и $\bar{u}_e(p')$ – биспинорные амплитуды электрона с 4-импульсом p и p' .

Дифференциальное сечение ν_e e -рассеяния $d\sigma \sim |M_{if}|^2$. Последовательные вычисления приводят к следующим результатам:

$$|M_{if}|^2 = 64 G^2 (p k)^2, \quad (5.35)$$

$$d\sigma = \frac{2G^2}{\pi^2} (p k)^2 \frac{d^3k}{k'_0} \delta[(k + p - k')^2 - m_e^2]. \quad (5.36)$$

Полное сечение $\sigma = \int d\sigma$ после интегрирования по телесному углу $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ дается выражением

$$\sigma = \frac{G^2}{\pi} \frac{[(k + p)^2 - m_e^2]^2}{(k + p)^2}. \quad (5.37)$$

Величина $(k + p)^2$ имеет смысл квадрата энергии в системе центра масс и в единицах Хэвисайда. Отсюда видно, что при высоких энергиях, когда $(k + p)^2 \gg m_e^2$,

$$\sigma \simeq \frac{G^2}{\pi} (k + p)^2, \quad (5.38)$$

и сечение неограниченно возрастает.

Можно установить и границы применимости теории Ферми. Независимость дифференциального сечения (5.36) от угла

рассеяния означает, что в рассеяние дают вклад только частицы с нулевым орбитальным моментом $l = 0$. Это обусловлено контактностью взаимодействия в фермиевском лагранжиане. Полное же сечение рассеяния представляет собой сумму парциальных сечений:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (5.39)$$

где δ_l – фаза рассеяния (фазовый сдвиг). При $l = 0$ получаем условие

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \leq \frac{4\pi}{k^2}, \quad (5.40)$$

и полное сечение (5.38) не должно превосходить σ_0 (5.40):

$$\frac{G^2}{\pi} (k+p)^2 \leq \frac{4\pi}{k^2}. \quad (5.41)$$

Полагая $(k+p)^2 \simeq 4k^2$, из (5.41) получаем оценку:

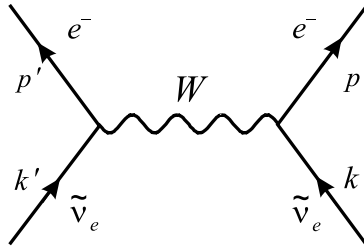
$$k^2 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{G} \simeq 500 \text{ ГэВ}. \quad (5.42)$$

Эта граница называется унитарным пределом.

5.3.2. Введение в теорию W-бозонов

Модификацию теории в области высоких энергий можно провести, используя аналогию с КЭД, заменив взаимодействие ”ток-ток” взаимодействием ”ток-промежуточный бозон”. Однако в отличие от фотонов, которые в КЭД играют роль ”промежуточных бозонов”, вновь вводимые векторные частицы должны обладать большими массами, чтобы при низких энергиях возникало эффективное контактное взаимодействие. Как уже обсуждалось ранее, этих частиц должно быть три: $W^\pm$ и W^0 .

Опять обратимся к процессу $\tilde{\nu}_e e \rightarrow \tilde{\nu}_e e$. Его амплитуде с участием W -бозонов соответствует диаграмма



$$(5.43)$$

Пусть константа связи W -бозона с лептонами будет g . Тогда по аналогии с КЭД амплитуда процесса должна иметь следующий вид:

$$M_{if} = g^2 (\bar{v}_{\nu_e} \gamma_\mu^L u_e) D^{\mu\nu}(q) (\bar{u}_e \gamma_\nu^L v_{\nu_e}). \quad (5.44)$$

Здесь v_{ν_e} – биспинорная амплитуда антинейтрино, u_e – электрона, q – 4-импульс W -бозона (при этом 4-импульс сохраняется: $(p + k)^2 = q^2$). Сомножитель $D^{\mu\nu}(q)$ есть пропагатор векторного W -бозона. Если этот массивный бозон будет описываться 4-потенциалом $W^\mu(x)$, то для него можно написать уравнение, обобщающее уравнение Максвелла для безмассовой частицы (фотона) на случай частицы с массой

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + m_W^2 W_\nu = j_\nu, \quad (5.45)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ – аналог тензора электромагнитного поля.

Для W_μ получается уравнение

$$\left[(\partial^2 + m_W^2) g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \right] W_\nu = j_\mu. \quad (5.46)$$

Уравнение для пропагатора имеет вид

$$\left[(\partial^2 + m_W^2) g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \right] D_{\nu\lambda}(x - x') = \delta_{\lambda\mu} \delta^4(x - x'). \quad (5.47)$$

Переходя в импульсное представление

$$D_{\nu\lambda}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} D_{\nu\lambda}(q), \quad (5.48)$$

получаем простое алгебраическое уравнение для $D_{\nu\lambda}(q)$:

$$\left[(-q^2 + m_W^2) + q_\mu q_\nu \right] D_{\nu\lambda}(q) = \delta_{\lambda\mu}. \quad (5.49)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \partial^2 D_{\nu\lambda}(x - x') &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (-q^2) e^{-iq(x-x')} D_{\nu\lambda}(q), \\ \partial_\mu \partial_\nu D_{\nu\lambda}(x - x') &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} q_\mu q_\nu e^{-iq(x-x')} D_{\nu\lambda}(q), \\ \delta^4(x - x') &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-x')}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5.47), получаем (5.49), откуда

$$D_{\mu\nu}(q) = -\frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_W^2}{q^2 - m_W^2}, \quad q^2 = (p + k)^2. \quad (5.50)$$

Сравнивая амплитуду M_{if} из (5.44) с амплитудой процесса контактного рассеяния (5.34), видим, что в (5.44) появляется множитель $1/q^2$, и при больших энергиях $q^2 \gg m_W^2$ он становится решающим.

Полное сечение

$$\sigma(\tilde{\nu}_e e \rightarrow \tilde{\nu}_e e) \sim \frac{g^4}{q^4}, \quad (5.51)$$

т.е. расходимость при больших энергиях устранена.

В области малых энергий $q^2 \ll m_W^2$ амплитуда (5.44) с точностью до малых поправок становится равна

$$M_{fi} \simeq \frac{g^2}{m_W^2} (\bar{v}_{\nu_e} \gamma_\mu^L u_e) (\bar{u}_e \gamma_\nu^L v_{\nu_e}). \quad (5.52)$$

В то же время амплитуда теории Ферми (5.34) для этого же процесса $\tilde{\nu}_e e \rightarrow \tilde{\nu}_e e$ равна

$$M_{fi} \simeq \frac{4G}{\sqrt{2}} (\bar{v}_{\nu_e} \gamma_\alpha^L u_e) (\bar{u}_e \gamma^{L\alpha} v_{\nu_e}). \quad (5.53)$$

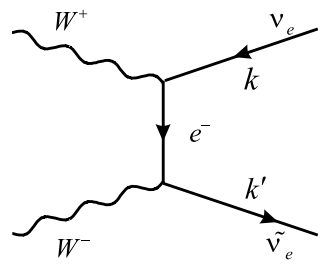
Учитывая (5.52) и (5.53), получаем связь размерной константы Ферми G с безразмерной константой g :

$$G \sim \frac{g^2}{m_W^2}.$$

В дальнейшем мы увидим, что более последовательное вычисление амплитуд приводит к соотношению

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (5.54)$$

Таким образом, введение промежуточных бозонов $W^\pm$ устраняет нарушение унитарности S -матрицы. Однако при этом трудности не заканчиваются. Возникают новые проблемы при рассмотрении процессов аннигиляции $e^+ e^- \rightarrow W^+ W^-$, $\tilde{\nu} \nu \rightarrow W^+ W^-$. Например, процессу $\tilde{\nu} \nu \rightarrow W^+ W^-$ соответствует диаграмма



$$(5.55)$$

и амплитуда этого процесса определяется через пропагатор электрона:

$$M_{fi} = g^2 \bar{v}_{\nu_e} \gamma_\mu^L \varepsilon_{(+)}^\mu \frac{k - q_+ + m_e}{(k - q_+)^2 - m_e^2} \varepsilon_{(-)}^\nu \gamma_\nu^L u_{\nu_e}, \quad (5.56)$$

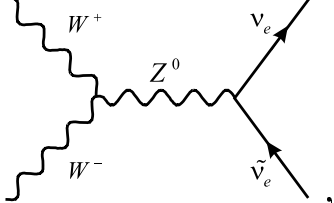
где $\varepsilon_{\pm}^{\mu}$ – 4-векторы поляризации $W^{\pm}$ -бозонов, $q_{\pm}$ – их импульсы. Такая амплитуда приводит к сечению, растущему с энергией:

$$\sigma(\tilde{\nu} \nu \rightarrow W^+ W^-) \sim \frac{g^4}{m_W^2} \frac{(q_+ + q_-)^2}{m_W^2}, \quad (5.57)$$

т.е. снова возникает расходимость при больших энергиях.

5.3.3. Введение в теорию Z^0 -бозона

Рассмотрим вместо (5.55) такой процесс:



The diagram shows a horizontal exchange of a Z^0 boson (represented by a wavy line) between two vertices. On the left, two incoming wavy lines represent W^+ and W^- bosons. On the right, two outgoing straight lines represent a neutrino ν_e and an antineutrino $\bar{\nu}_e$. The entire diagram is labeled (5.58) on the right.

т.е. введем некоторый Z^0 -бозон, непосредственно взаимодействующий с $W^{\pm}$ -бозонами. Если выбрать "удачным" образом константу связи g_Z в вершине ZW^+W^- , то можно добиться убывания амплитуды процесса (5.58) с энергией по закону $\sim 1/(q_+ + q_-)$. Наличие Z^0 -бозонов приводит к нейтральным токам.

Итак, требование сходимости сечений в слабых взаимодействиях, т.е. унитарности матрицы рассеяния, описывающей реальные процессы, привело к теоретическому предсказанию существования новых частиц: W^- , W^0 , W^+ , Z^0 .

5.4. Лагранжиан слабого взаимодействия

5.4.1. Калибровочное поле в квантовой электродинамике

Для построения лагранжиана слабых взаимодействий, где взаимодействие между лептонами осуществляется через промежуточные векторные бозоны, мы можем опираться на опыт построения квантовой электродинамики. В КЭД взаимодействие между электронами и позитронами описывается через обмен квантами электромагнитного поля – фотонами, и при построении лагранжиана взаимодействия этих полей использовалась инвариантность уравнения Дирака относительно локального калибровочного преобразования. При этом локальная инвариантность достигается введением калибровочного поля, которым и является электромагнитное поле. Можно фигурально выразиться так: электромагнитное поле существует в природе для того, чтобы обеспечить локальную калибровочную инвариантность электронно-позитронного поля.

Подкрепим эти рассуждения непосредственной проверкой локальной калибровочной инвариантности уравнения Дирака. Проведем калибровочное преобразование волновой функции Ψ :

$$\Psi'(x) = e^{ie\alpha(x)} \Psi(x), \quad (5.59)$$

где $\alpha(x)$ – некоторая функция координат, e – заряд электрона. Если $\Psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака

$$\gamma_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} + m \Psi = 0, \quad (5.60)$$

то для Ψ' получим уравнение

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \frac{\partial \Psi'}{\partial x_\mu} + m \Psi &= e^{ie\alpha(x)} \left[\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \Psi + e \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \Psi \right] = \\ &= e \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu} \right) \gamma_\mu \Psi \neq 0. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Таким образом, видим, что уравнение (5.60) не инвариантно относительно преобразования (5.59).

Однако если заменить частные производные $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ на

$$D_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} - e A_\mu(x), \quad (5.62)$$

то уравнение

$$\gamma_\mu D_\mu(x) \Psi + m \Psi = 0 \quad (5.63)$$

становится инвариантным при условии, что величина $A_\mu(x)$ преобразуется одновременно с $\Psi(x)$ следующим образом:

$$A'_\mu(x) = A_\mu + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \alpha(x). \quad (5.64)$$

Поле $A_\mu(x)$, которое есть не что иное, как вектор-потенциал электромагнитного поля, принято называть калибровочным.

Следовательно, одновременное калибровочное преобразование (5.59) волновой функции и вектор-потенциала (5.64) делает уравнение Дирака (5.63) для частицы в электромагнитном поле инвариантным. Этот результат можно сформулировать и так: требование локальной калибровочной инвариантности уравнения Дирака приводит к необходимости существования калибровочного (электромагнитного) поля и определяет минимальный лагранжиан взаимодействующих полей. Требование

калибровочной инвариантности является мощным эвристическим принципом построения лагранжиана в квантовой теории поля.

5.4.2. Калибровочное поле в слабых взаимодействиях

Применим аналогичный подход к теории слабых взаимодействий, в которой взаимодействие лептонов описывается через векторные бозоны. Сначала для простоты рассмотрим только взаимодействие электрона и электронного нейтрино.

Поскольку мы имеем дело со "слабым" дублетом (ν_e, e^-) , то можно сказать, что слабые взаимодействия инвариантны относительно вращений в пространстве слабого изотопического спина. Поворот в этом пространстве записываем как действие унитарной матрицы $\hat{U}_L$ на вектор состояния:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}' = \hat{U}_L \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

или

$$\begin{aligned} |e^- \rangle' &= c_{11} |e^- \rangle + c_{12} |\nu_e^0 \rangle, \\ |\nu_e^0 \rangle' &= c_{21} |e^- \rangle + c_{22} |\nu_e^0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Если требовать локальную инвариантность, то все коэффициенты преобразования c_{ik} должны стать функциями координат: $c_{ik} = c_{ik}(\mathbf{x})$. Поскольку преобразование во всяком случае должно быть унитарным, то $\det ||c_{ik}|| = 1$. Это условие уменьшает число независимых параметров $c_{ik}(\mathbf{x})$ до трех. Таким образом, локальную инвариантность могут обеспечить 3 компенсирующих (калибровочных) поля с квантами – бозонами W^- , W^0 , W^+ .

Если потребовать еще и фазовую локальную инвариантность этих соотношений, то появятся еще одно компенсирующее поле и связанный с ним калибровочный бозон B^0 . Из квантовой механики известно, что если существуют состояния с одинаковым зарядом и спином, то между ними может существовать и суперпозиция типа

$$c_1 B^0 \pm c_2 W^0. \quad (5.67)$$

Какой вид и какие коэффициенты должны быть в этой суперпозиции, увидим позже.

Запишем лагранжиан как сумму двух членов:

$$L = L_G + L_l, \quad (5.68)$$

где L_G – лагранжиан калибровочных полей, L_l – лагранжиан лептонов, взаимодействующих с этими полями. В соответствии со сказанным выше, должны существовать четыре разных калибровочных поля. Обозначим их так: $A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3$ – три компенсирующих поля, связанных с W -бозонами и обеспечивающие инвариантность относительно вращений в пространстве слабого изотопического спина, задаваемых оператором $u = \exp(iT_a \theta_a(x))$; B_μ – калибровочное поле, обеспечивающее инвариантность относительно преобразования $e^{ie\alpha(x)}$. Лагранжиан L_G имеет вид:

$$L_G = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon_{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 - \frac{1}{4} (\partial_\mu B_0 - \partial_\nu B_\mu)^2, \quad (5.69)$$

где g – константа связи полей, ε_{abc} – тензор Леви–Чивита ($a, b, c = 1, 2, 3$). Первое слагаемое в (5.69) представляет собой квадрат тензора калибровочного поля (или напряженно-

сти этого поля) $G_{\mu\nu}$, который должен быть инвариантен относительно преобразования u :

$$G'_{\mu\nu} = u G_{\mu\nu} u^{-1}. \quad (5.70)$$

Этому условию удовлетворяет следующее определение:

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (5.71)$$

где f_{abc} – структурные константы алгебры операторов T_a :

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (5.72)$$

Чтобы записать лагранжиан лептонов, взаимодействующих с калибровочными полями, необходимо вместо простых производных пользоваться ковариантными ("удлиненными" по правилу, аналогичному (5.62)):

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{T_a}{2} A_\mu^a + \frac{i}{2} g' B_\mu. \quad (5.73)$$

По аналогии с КЭД можно записать ²:

$$\begin{aligned} L_l = & \bar{L} i \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig \frac{T_a}{2} A_\mu^a + \frac{i}{2} g' B_\mu \right) L + \\ & + \bar{e}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' B_\mu) e_R + \bar{\nu}_R i \gamma_\mu \partial_\mu \nu_R. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Здесь $L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$ – дублет левых фермионов. В соответствии с гипотезой двухкомпонентного нейтрино правые фермионы образуют синглет e_R и взаимодействуют только с полем B (третье слагаемое в (5.74)). Поскольку имеются экспериментальные данные о существовании ненулевой массы нейтрино, то приходится добавить "на всякий случай" еще один синглет

²Введение соотношений (5.69–5.74) в данном разделе делается без вывода. В главе 6 они будут доказаны в рамках общего подхода в теории калибровочных полей, единого для электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Читателю следует временно принять их на веру и проследить, к каким следствиям они приводят.

ν_R (здесь нарушается гипотеза о двухкомпонентном нейтрино); если же этот синглет и существует, то имеет нулевые изотопический спин и гиперзаряд и движется свободно – ему соответствует последнее слагаемое в (5.74).

Далее, g – константа взаимодействия лептона с полем A_μ ; g' – константа взаимодействия лептона с полем B ; $T_{ZW} = T_2/2$ – проекция изотопического спина бозонов W с гиперзарядом $\tilde{Y}_W$. Связь между T_{ZW} и электрическим зарядом частицы дается формулой, аналогичной формуле Гелл-Манна и Нишиджимы, приведенной в главе 1:

$$T_{ZW} = Q - \frac{\tilde{Y}_W}{2}. \quad (5.75)$$

Вспомним, что в главе 1 эти величины были введены так:

$$T_Z = Q - \frac{B}{2} - \frac{S}{2} = Q - \frac{Y}{2}, \quad Y = B + S. \quad (5.76)$$

5.5. Объединение слабого и электромагнитного взаимодействий

5.5.1. Спонтанное нарушение симметрии. Механизм Хиггса

Как уже отмечалось, введенные выше калибровочные бозоны все безмассовые. Однако опыт показывает, что массы покоя бозонов W и Z составляют десятки ГэВ. Массы покоя частиц, как видно из КЭД, формируются в результате их взаимодействия с полями. Что же это за поля, взаимодействуя с которыми, бозоны W и Z приобретают массу? Ответ на этот вопрос дает механизм Хиггса.

Предположим, что вакуум $|0\rangle$ – собственное состояние га-

мильтониана $\hat{H}$, отвечающее наименьшей энергии E_{min} :

$$\hat{H} |0\rangle = E_{min} |0\rangle. \quad (5.77)$$

Если уравнения движения инвариантны относительно некоторого преобразования $\hat{U}$, то $[\hat{H}, \hat{U}] = 0$, откуда $\hat{H} \hat{U} |0\rangle = \hat{U} \hat{H} |0\rangle = E_{min} \hat{U} |0\rangle$, т.е. $\hat{U} |0\rangle$ – тоже собственное состояние гамильтониана, относящееся к тому же собственному значению энергии. Если основное состояние не вырождено, единственно возможным является равенство $\hat{U} |0\rangle = |0\rangle$. Если же имеется несколько состояний $|0\rangle_i$ с энергией E_{min} (т.е. основное состояние вырождено), то в общем случае можно записать:

$$\hat{U} |0\rangle_i = |0\rangle_k, \quad i \neq k. \quad (5.78)$$

Отсюда следует, что при инвариантности гамильтониана относительно преобразования $\hat{U}$ основное состояние (вакуум) может быть не инвариантно! Такая ситуация называется спонтанным нарушением симметрии. Если окажется, что вакуум находится в одном конкретном состоянии из числа вырожденных, то говорят о спонтанном нарушении симметрии. Примеры таких ситуаций в физических системах встречаются довольно часто: это появление намагниченности твердого тела ниже температуры Кюри (ферромагнетизм), возникновение сверхтекучего состояния в жидком гелии, сверхпроводимости в металлах и др.

Теперь вернемся к вакууму. Пусть имеется скалярное комплексное поле ϕ и его потенциал зависит от ϕ как

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^+ \phi + \frac{1}{4} \lambda (\phi^+ \phi)^2. \quad (5.79)$$

Здесь использована аналогия с ферромагнетиком, когда свободная энергия $F(M, T)$ магнетика выражается в виде разложения по степеням намагниченности (параметра порядка):

$$F(M, T) \simeq F_0 + \frac{1}{2} \mu^2(T) M^2 + \frac{1}{4} \lambda(T) M^4. \quad (5.80)$$

Коэффициент $\mu^2(T)$ меняет знак при некоторой температуре $T = T_k$. Если $\mu^2(T) > 0$, минимум свободной энергии будет при $M = 0$ (парамагнитное состояние), если $\mu^2(T) < 0$, свободная энергия имеет минимум при ненулевом M (ферромагнитное состояние). В этом случае система теряет симметрию относительно поворотов – появляется физически выделенное направление, задаваемое вектором $\mathbf{M}$. Таким образом, ферромагнитное состояние является состоянием со спонтанно нарушенной симметрией.

Рассмотрим различные варианты поведения $V(\phi)$. При $\mu^2 < 0$, $\lambda > 0$ из условия минимума $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ получаем

$$\phi_{\min}^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}, \quad \phi_{\min} = \pm \sqrt{\frac{|\mu^2|}{\lambda}}. \quad (5.81)$$

Если $\mu^2 > 0$ и $\lambda > 0$, то имеется лишь единственный минимум $\phi_{\min} = 0$. Потенциал $V(\phi)$ при положительном и отрицательном коэффициентах при квадратичном члене показан на рис. 5.6.

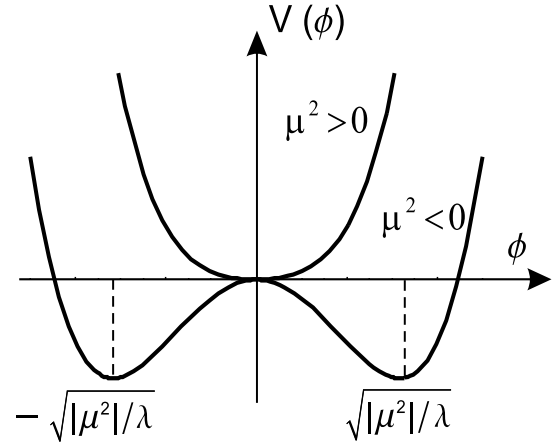


Рис. 5.6. Потенциал скалярного поля при положительном и отрицательном значениях коэффициента μ^2 в разложении (5.79)

Спонтанное нарушение симметрии вакуума приводит к появлению массы у частиц, которые взаимодействуют с введенным скалярным полем. В этом состоит механизм Хиггса. Для того чтобы он заработал, в теорию слабых взаимодействий необходимо добавить к лагранжиану (5.68) взаимодействие со скалярным полем ϕ .

5.5.2. Лагранжиан Вайнберга – Салама – Глэшоу

Итак, к лагранжиану (5.68), описывающему лептонные поля (электрон и поле нейтрино) и калибровочные поля векторных безмассовых бозонов, следует добавить лагранжиан поля Хиггса и его взаимодействие с калибровочными полями и полем лептонов. Тогда он будет состоять из четырех членов:

$$L = L_G + L_l + L_\Phi + L_{l\Phi}. \quad (5.82)$$

Здесь первые два члена даются формулами (5.69) и (5.74), третий и четвертый члены следует записать так:

$$L_\Phi = \frac{1}{2} \left| \left(\partial_\mu - i g \frac{T_a}{2} A_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \Phi \right|^2 - \frac{\mu^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (5.83)$$

К выражению (5.79) мы добавили член с длинной производной (5.73), приводящий к взаимодействию скалярного поля с калибровочными полями. Наконец, лагранжиан $L_{l\Phi}$ взаимодействия лептонов со скалярным полем запишем в виде

$$L_{l\Phi} = -f_e (\bar{e}_R \Phi^\dagger L + \bar{L} \Phi e_R) - f_\nu (\bar{\nu}_R \Phi^\dagger L + \bar{L} \Phi \nu_R). \quad (5.84)$$

Для того чтобы лагранжиан (5.84) был калибровочно инвариантен, достаточно в качестве Φ и Φ_c для вакуума принять

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ V + \eta(x) \end{pmatrix}, \quad \Phi_c = \begin{pmatrix} V + \eta(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.85)$$

Здесь Φ_c зарядово сопряжено с Φ . В выражениях (5.85) $V = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ – значение однородного скалярного поля в вакууме с нарушенной симметрией, а $\eta(x)$ учитывает его флуктуации. Это вещественное скалярное поле Хиггса.

Распишем выражение (5.84) с помощью (5.85):

$$\begin{aligned} L_{l\Phi} &= -f_e \left[\bar{e}_R (0, V+\eta) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ V+\eta \end{pmatrix} e_R \right] - \\ &- f_\nu \left[\bar{\nu}_R (V+\eta, 0) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} V+\eta \\ 0 \end{pmatrix} \nu_R \right] = \\ &= -f_e (V + \eta) (\bar{e}_R e_R + \bar{e}_L e_L) - f_\nu (V + \eta) (\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R). \end{aligned} \quad (5.86)$$

Так как для любого биспинора

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_R, \bar{\Psi}_L),$$

имеем

$$\bar{\Psi}\Psi = \bar{\Psi}_R \Psi_R + \bar{\Psi}_L \Psi_L,$$

лагранжиан $L_{l\Phi}$ принимает следующий вид:

$$L_{l\Phi} = -f_e V \bar{e}e - f_e \bar{e} \eta e - f_\nu V \bar{\nu}\nu - f_\nu \nu \eta \nu. \quad (5.87)$$

Из (5.87) следует, что члены $-f_e V \bar{e}e$ и $-f_\nu V \bar{\nu}\nu$ аналогичны массовому слагаемому $-m\bar{\Psi}\Psi$ в лагранжиане электронно-

позитронного поля из предыдущих глав. Таким образом, лептоны приобретают массы

$$m_e = f_e V; \quad m_\nu = f_\nu V. \quad (5.88)$$

Они также взаимодействуют с хиггсовским скалярным полем $\eta(x)$ и константы связи равны f_e и f_ν .

Если теперь преобразовать лагранжиан L_Φ скалярного поля, взаимодействующего с калибровочными полями (5.83), и выполнить действия по возведению в квадрат ковариантной производной $D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - i g \frac{T_a}{2} A_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \Phi$, то, отбрасывая несущественную постоянную, получаем:

$$\begin{aligned} L_\Phi = & \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2 \eta^2 - \lambda V \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \\ & + \frac{1}{8} (V + \eta)^2 \left[g^2 A_\mu^{(1)2} + g^2 A_\mu^{(2)2} + g^2 A_\mu^{(3)2} + g' B_\mu^2 - 2gg' B_\mu A_\mu^{(3)} \right]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

Второе слагаемое в (5.89) показывает, что поле Хиггса η приобрело массу. Действительно, лагранжиан скалярного бесспинового поля, приводящий к уравнению Клейна–Гордона, имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^2 \right). \quad (5.90)$$

Член $m^2 \phi^2$ появляется в случае, если бозоны имеют массу m . Сравнивая (5.90) и (5.89), видим, что бозоны Хиггса (в нашем случае $\phi \equiv \eta$) имеют массу

$$m_\eta = \sqrt{2} \mu. \quad (5.91)$$

5.5.3. Введение Z -бозона

Лагранжиан (5.89) необходимо диагонализировать. Для этого введем лептонные комбинации:

$$\begin{aligned} A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_\mu^0 \sin \theta_W, \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_W + W_\mu^0 \cos \theta_W. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Здесь θ_W – угол Вайнберга, который вводится в теорию как параметр (вспомним, что при обсуждении калибровочной инвариантности слабых взаимодействий уже говорилось о том, что должна существовать суперпозиция состояний W^0 - и B^0 -бозонов). После диагонализации выражение в квадратных скобках в (5.89) преобразуется:

$$g^2 (A_\mu^b)^2 + g'^2 B_\mu^2 - 2gg' B^\mu A_\mu^3 = (g^2 + g'^2) Z_0^2 + g^2 (A_\mu^{(1)2} + A_\mu^{(2)2}), \quad (5.93)$$

при этом исключение билинейных членов достигается при выборе угла Вайнберга в виде

$$\operatorname{tg} \theta_W = \frac{g'}{g}; \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}; \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (5.94)$$

Подставляя (5.93) в (5.89), получаем

$$\begin{aligned} L_\Phi &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} \mu_\eta^2 \eta^2 - \lambda V \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4 + \\ &+ \frac{1}{8} (V + \eta)^2 \left[g^2 (W_\mu^+ W_\mu^- + W_\mu^- W_\mu^+) + (g^2 + g'^2) Z_\mu^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Здесь вместо $g^2 (A_\mu^{(1)2} + A_\mu^{(2)2})$ введены поля

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2). \quad (5.96)$$

Сравнивая выражение в квадратных скобках в (5.95) с лагранжианом для массивной частицы со спином 1, приходим к

выводу, что поля $W_\mu^\pm$ и Z_μ приобрели массы:

$$m_W = \frac{1}{2}g V; \quad m_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 + g'^2}V = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (5.97)$$

Таким образом, поля $W_\mu^\pm$ описывают $W^\pm$ -бозоны, а Z_μ – Z -бозоны.

Важно отметить, что комбинация A_μ из (5.92) не входит в лагранжиан взаимодействия с полем Хиггса и, следовательно, не имеет массы: $M_A = 0$. В дальнейшем мы увидим, что эта суперпозиция ведет себя как фотон, т.е. квант электромагнитного поля.

Действительно, преобразуем теперь лептонную часть лагранжиана L_l из (5.74), вводя поля $W_\mu^\pm$, Z_μ и используя преобразование Вайнберга:

$$\begin{aligned} A_\mu^3 &= A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W, \\ B_\mu &= A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W, \end{aligned} \quad (5.98)$$

получаем такой лагранжиан:

$$\begin{aligned} L_l &= \bar{\nu}_e i (\gamma_\mu \partial_\mu) \nu_e + \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\bar{\nu}_e \gamma_\mu^L \nu_e) Z_\mu + \\ &+ \bar{e} i \gamma_\mu (\partial_\mu + i g \sin \theta_W A_\mu) e + \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\bar{e} \gamma_\mu^L e) Z_\mu + \\ &+ g \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W} (\bar{e} \gamma_\mu e) Z_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_e W_\mu^+ \gamma_\mu e_L + \bar{e}_L W_\mu^- \gamma_\mu \nu_e). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Обратим внимание на третье слагаемое в этом лагранжиане:

$$\bar{e} i \gamma_\mu (\partial_\mu + i g \sin \theta_W A_\mu) e. \quad (5.100)$$

Здесь $\bar{e}$ и e – электронные биспиноры; $\partial_\mu + i g \sin \theta_W A_\mu$ – ковариантная производная для электрона, взаимодействующего с полем A_μ . Поскольку это поле обеспечивает локальную калибровочную инвариантность и не имеет массы, приходится

сделать вывод о том, что это – электромагнитное поле, или фотон. Но связь электрона с электромагнитным полем хорошо известна: константой связи является заряд электрона e (не путать с обозначением для биспинора e !). Следовательно, получаем связь констант g , g' и угла Вайнберга с электрическим зарядом:

$$e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W. \quad (5.101)$$

Таким образом, это соотношение объединяет электромагнитное и слабое взаимодействия в единое электрослабое взаимодействие. Остальные слагаемые характеризуют взаимодействия лептонов друг с другом и калибровочными полями.

5.5.4. Полный лагранжиан электрослабого взаимодействия

Через поля $W_\mu^\pm$, Z_μ можно переписать и часть лагранжиана L_G , описывающую взаимодействие полей $W_\mu^\pm$, Z_μ и A_μ между собой.

Полный лагранжиан Вайнберга–Салама–Глэшоу описывает взаимодействия ”всех со всеми” и содержит 13 членов:

$$L = L_A + L_Z + L_{WA} + L_{WZA} + L_\nu + L_{eA} + L_{e\nu W} + \\ + L_{\nu Z} + L_\eta + L_{\eta e} + L_{\eta\nu} + L_{\eta W} + L_{\eta Z}. \quad (5.102)$$

Здесь L_A , L_Z , L_ν – лагранжианы свободных полей, все остальные индексы указывают, что с чем взаимодействует.

Выпишем ряд отдельных членов этого лагранжиана:

$$L_A = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2, \quad (5.103)$$

$$L_Z = -\frac{1}{4} (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^2, \quad (5.104)$$

$$L_\nu = \tilde{\nu} (i\gamma\partial - m_\nu) \nu, \quad (5.105)$$

– лагранжианы свободного электромагнитного, Z -бозонного и нейтринного полей соответственно;

$$L_{WA} = -\frac{1}{2} |D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+|^2 + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \\ - ie (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) W_\mu^+ W_\nu^- \quad (5.106)$$

– лагранжиан $W^\pm$ -бозонного поля, взаимодействующего с электромагнитным полем A . Наконец, выпишем еще лагранжианы взаимодействия электрона и Z -бозона, а также нейтрино и Z -бозона:

$$L_{eZ} = \frac{g}{\cos \theta_W} \bar{e} \left(\frac{1}{2} \gamma_\mu^L - \sin^2 \theta_W \gamma_\mu \right) e Z_\mu, \quad (5.107)$$

$$L_{\nu Z} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} (\bar{\nu}_e \gamma_\mu^L \nu_e) Z_\mu. \quad (5.108)$$

Оставшиеся члены лагранжиана, учитывающие взаимодействие с полем Хиггса, либо уже обсуждались, либо не понадобятся в дальнейшем.

Благодаря спонтанному нарушению симметрии поля Хиггса, $W^\pm$ - и Z -бозоны приобретают массу. Поле векторных бозонов взаимодействует с электромагнитным полем.

5.5.5. Заряженные и нейтральные токи

В связи с введением в теорию угла Вайнберга (5.92) и новыми понятиями об едином электрослабом взаимодействии, можно по-новому преобразовать выражения для токов.

Прежде всего запишем электромагнитный ток лептонов. Если для биспинорных амплитуд лептонов $\psi_e(x)$, $\psi_\mu(x)$, $\psi_\tau(x)$ ввести сокращенные обозначения $e(x)$, $\mu(x)$, $\tau(x)$, то лептонный электромагнитный ток будет иметь следующий вид:

$$j_\mu^{em} = -\bar{e}(x) \gamma_\mu e(x) - \bar{\mu}(x) \gamma_\mu \mu(x) - \bar{\tau}(x) \gamma_\mu \tau(x). \quad (5.109)$$

Тогда гамильтониан электромагнитного взаимодействия запишем так:

$$\hat{H}_{em} = e \int d^3x j_\mu^{em}(x) A_\mu(x). \quad (5.110)$$

Слабые лептонные токи имеют ту особенность, что в них присутствуют лишь левые компоненты биспиноров, т.е. те, которые соответствуют состоянию частицы, когда ее спин направлен против импульса. Кроме того, в этом токе должна быть отражена структура слабого взаимодействия. Выделить из биспинора ψ его "левую" компоненту ψ_L можно с помощью проекционного оператора $(1 + \gamma_5)/2$:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi. \quad (5.111)$$

Действительно, подставляя $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ в уравнение Дирака

$$(\gamma_\mu p_\mu - m) \psi = 0, \quad (5.112)$$

получаем два уравнения:

$$p_0 \varphi - (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \chi = m \varphi, \quad (5.113)$$

$$-p_0 \chi + (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \varphi = m \chi, \quad (5.114)$$

что можно переписать как

$$\varphi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{p_0 - m} \chi \simeq (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \chi, \quad (5.115)$$

$$\chi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{p_0 + m} \varphi \simeq (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \varphi, \quad (5.116)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|p|$. Таким образом, $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ (\vec{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \varphi \end{pmatrix}$. Действуя на это выражение оператором $(1 + \gamma_5)/2$, где $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, получаем

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \varphi_L \\ -\varphi_L \end{pmatrix} + O\left(\frac{m}{\varepsilon}\right), \quad (5.117)$$

где спинор

$$\varphi_L = \frac{1 - \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \varphi \quad (5.118)$$

является, как видим, собственной функцией оператора $\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}$, соответствующей собственному значению -1 :

$$(\mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}) \varphi_L = -\varphi_L. \quad (5.119)$$

Следовательно, с точностью до m/ε , где $\varepsilon \sim p_0$, биспинор ψ_L (5.117) есть собственная функция оператора спиральности $\mathbf{n} \cdot \vec{\Sigma} \equiv \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, отвечающая состоянию с левой спиральностью:

$$(\mathbf{n} \cdot \vec{\Sigma}) \psi_L = -\psi_L + O(m/\varepsilon). \quad (5.120)$$

Аналогично можно показать, что компонента

$$\psi_R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi \quad (5.121)$$

соответствует правополяризованной частице:

$$(\mathbf{n} \cdot \vec{\Sigma}) \psi_R = \psi_R + O(m/\varepsilon). \quad (5.122)$$

Рассмотрим теперь структуру выражения для слабых токов, в которое, как было сказано, входят только левые компоненты. Заряженный ток $j_\mu^{(+)}$, передающий заряд электрона, меняет электрон на нейтрино. Такой оператор должен иметь вид

$$j_\mu^{(+)} = \bar{\psi}_e T_e^+ \gamma_\mu^L \psi_e + \bar{\psi}_\mu T_\mu^+ \gamma_\mu^L \psi_\mu + \bar{\psi}_\tau T_\tau^+ \gamma_\mu^L \psi_\tau. \quad (5.123)$$

Здесь $T_a^\pm = \frac{1}{2}(T_{1a} \pm iT_{2a})$, где $a = (e, \mu, \tau) \equiv (1, 2, 3)$ – компоненты изотопического спина лептонов. Ток $j_\mu^{(-)}$ уменьшает заряд на единицу, меняя нейтрино на электрон. Эти токи эрмитово сопряжены, поэтому из (5.123) следует:

$$j_\mu^{(-)} = \bar{\psi}_e T_e^- \gamma_\mu^L \psi_e + \bar{\psi}_\mu T_\mu^- \gamma_\mu^L \psi_\mu + \bar{\psi}_\tau T_\tau^- \gamma_\mu^L \psi_\tau. \quad (5.124)$$

Оба тока представляют собой $(\pm)$ -компоненты вектора изотопического спина:

$$j_\mu^{(a)} = \sum_l \bar{\psi}_l \frac{T_a}{2} \gamma_\mu^L \psi_l, \quad j^{(\pm)} = \frac{1}{2} (j^{(1)} \pm j^{(2)}). \quad (5.125)$$

Введем явные выражения для изотопических дублетов лептонов:

$$\psi_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \psi_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \psi_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (5.126)$$

Заметим, что в (5.18) функции ψ_e , ψ_μ и ψ_τ были выписаны уже с учетом (5.126), так как в них входят $\psi_{\nu_e} \equiv \nu_e$, $\psi_e \equiv e$ и т.д.

Теперь напомним с учетом (5.126) нейтральный ток $j_\mu^{(3)}$, не меняющий электрический заряд:

$$\begin{aligned} j_\mu^{(3)} &= \sum_l \bar{\psi}_l \frac{T_3}{2} \gamma_\mu^L \psi_l = \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\nu}_e \gamma_\mu^L \nu_e - \bar{e} \gamma_\mu^L e + \bar{\nu}_\mu \gamma_\mu^L \nu_\mu - \bar{\mu} \gamma_\mu^L \mu + \bar{\nu}_\tau \gamma_\mu^L \nu_\tau - \bar{\tau} \gamma_\mu^L \tau]. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Отметим, что $T_3/2 = +1$ для верхних лептонов в дублетах (5.126) и $T_3/2 = -1$ — для нижних.

В соответствии с теорией электрослабого взаимодействия нейтральный ток лептонов $j_\mu^{(0)}$ состоит из линейной комбинации (5.127) и электромагнитного тока (5.109). Это следует из полного лагранжиана Вайнберга–Салама–Глэшоу, где сумму двух слагаемых (5.107) и (5.108), соответствующих взаимодействию электрона с Z -бозоном и нейтрино с Z -бозоном, можно представить так:

$$L = L_{eZ} + L_{\nu Z} = - (g / \cos \theta_W) Z_\mu j_\mu^{(0)}, \quad (5.128)$$

где

$$j_\mu^{(0)} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu^L \nu_e - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu^L e + \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma_\mu e \equiv \quad (5.129)$$

$$\equiv j_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}. \quad (5.130)$$

Итак, нейтральный ток имеет следующий вид:

$$j_\mu^{(0)} = j_\mu^{(3)} - \sin^2 \theta_W j_\mu^{\text{э.м.}}. \quad (5.131)$$

Подчеркнем, что в отличие от заряженного тока, он содержит как левые, так и правые компоненты. В этом можно убедиться, перегруппировав слагаемые в (5.131) и (5.109):

$$j_\mu^{(0)} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma_\mu^L \nu_e + \left(\sin^2 \theta_W - \frac{1}{2} \right) \bar{e} \gamma_\mu^L e + \sin^2 \theta_W \bar{e} \gamma_\mu^R e, \quad (5.132)$$

$$\gamma_\mu^R = \frac{\gamma_\mu (1 - \gamma_5)}{2}. \quad (5.133)$$

Далее мы увидим, что этот факт надежно подтвержден экспериментом.

Напомним еще раз, что рассматриваемые в этой главе спиноры в представлении вторичного квантования являются операторами рождения и уничтожения:

e – оператор уничтожения электрона и рождения позитрона,
 $\bar{e}$ – оператор рождения электрона и уничтожения позитрона,
 ν_e – оператор уничтожения нейтрино и рождения электронного антинейтрино,

$\bar{\nu}_e$ – оператор рождения нейтрино и уничтожения электронного антинейтрино.

Аналогичный смысл имеют операторы μ , $\bar{\mu}$, ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, τ , $\bar{\tau}$, ν_τ , $\bar{\nu}_\tau$.

5.6. Экспериментальное подтверждение теории единого электрослабого взаимодействия

5.6.1. Открытие нейтральных токов

Теория электрослабого взаимодействия была создана С. Вайнбергом, А. Саламом и Ш. Глэшоу в 1960-е годы. В этой теории, как было сказано выше, рассматриваются взаимодействия векторных бозонов с заряженными и нейтральными токами.

В 1973 г. был экспериментально открыт новый тип слабых процессов: процессы, обусловленные взаимодействием нейтральных токов. Нейтральные токи не меняют электрические заряды участвующих в них лептонов и кварков, например

$$\bar{\nu}_\mu \nu_\mu; \quad \bar{e} e; \quad \bar{u} u; \quad \bar{d} d \quad (5.134)$$

(здесь токи обозначены символически, на самом деле они имеют вид (5.109) и т.д.). Наблюдаемые в опыте нейтральные токи истинно нейтральны: они не меняют не только заряды, но и другие квантовые числа, т.е. переводят лептоны или кварки в самих себя. Их называют диагональными (недиагональными были бы, например, $\bar{d}s$, или $\bar{e}\mu$, или $\bar{u}s$, но их в природе нет). Нейтральные токи, следовательно, не меняют и ароматов частиц – в этих процессах и кварки не могут изменить свой цвет. Именно поэтому нейтральные токи и были обнаружены так поздно – лишь через 75 лет после открытия β -распада. Нейтральные токи не могут проявляться в таких распадах частиц, где меняется аромат лептонов или кварков. При распадах с сохранением аромата слабое взаимодействие нейтральных токов не может конкурировать с электромагнитным взаимодействием.

ем, поскольку последнее более интенсивное.

Впервые нейтральные токи наблюдали в 1970-х годах в нейтринных экспериментах на больших ускорителях, где высокоэнергетические пучки нейтрино, проходя через мишень, приводили к реакции

$$\nu_\mu + P \rightarrow \nu_\mu + P + \pi^+ + \pi^-. \quad (5.135)$$

В этой реакции нейтрино "встряхивает" протон, взаимодействуя с одним из кварков: $(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) (\bar{u} u)$ или $(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) (\bar{d} d)$. Вероятности этих реакций оказались примерно такими же, что и для реакций с заряженными токами:

$$\nu_\mu + N \rightarrow \mu^- + P + \pi^+ + \pi^-. \quad (5.136)$$

Здесь участвуют заряженные токи типа $(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) (\bar{d} u)$. Так же как и заряженные токи, нейтральные обнаружили нарушение зеркальной симметрии. Именно по нарушению симметрии в 1978 г. был открыт нейтральный электронный ток $(\bar{e} e)$. Обнаружить его было гораздо сложнее, чем нейтринный ток, так как искать надо было на фоне более сильного электромагнитного взаимодействия электронов.

Сначала было найдено исключительно слабое вращение плоскости поляризации лазерного луча в парах атомарного висмута. Это вращение явно P -нечетное, так как если бы была полная зеркальная симметрия атомов висмута, то ни левое, ни правое направления вращения не имели бы места, и плоскость поляризации сохраняла свою ориентацию. Если бы P -четность сохранялась, то атом висмута был бы зеркально симметричен. Отсюда напрашивается вывод, что эта небольшая "закрученность" атома висмута вызвана слабым P -нечетным взаимодействием атомарных электронов с ядром.

Вскоре, в 1979 г., стали известны выполненные на электронном ускорителе эксперименты по рассеянию пучка продольно поляризованных электронов на дейтериевой мишени. Пусть $\sigma^-(\pm)$ – сечение рассеяния электрона со спином, параллельным (антипараллельным) импульсу. Экспериментально наблюдалась асимметрия

$$A = \frac{\sigma^-(+) - \sigma^-(-)}{\sigma^-(+) + \sigma^-(-)} \simeq 0.01 \%. \quad (5.137)$$

Для мюонов аналогичное отношение в 100 раз больше вследствие большей массы μ^- -мезона:

$$B = \frac{\sigma^-(+) - \sigma^-(-)}{\sigma^-(+) + \sigma^-(-)} \simeq 1 \%. \quad (5.138)$$

Здесь $\sigma^\pm$ – сечения для мюонов с различными электрическими зарядами.

Эксперименты подтвердили, что в согласии с теорией нейтральные токи имеются у всех лептонов и кварков. У всех нейтрино нейтральные токи такие же левоспиральные, как и заряженные. У других частиц нейтральные токи содержат как левоспиральную (L_μ), так и правоспиральную (R_μ) компоненты. Поскольку фотон в соответствии с (5.92) и (5.98) является суперпозицией несимметричных по поляризации бозонов B^0 и W^0 , то и в процессах, обусловленных чисто электромагнитными взаимодействиями, наблюдается слабая асимметрия, что и следует из (5.137) и (5.138).

Итак, открытие нейтральных токов в 1973–1979 гг. стало внушительным подтверждением теории электрослабого взаимодействия. И неудивительно, что в 1979 г. Вайнберг, Салам и Глэшоу были удостоены Нобелевской премии. Можно ска-

зять, "авансом", так как до открытия W - и Z -бозонов оставалось еще 4 года. Прежде чем говорить об этом эпохальном событии, подведем итог и посмотрим, что следует из теории электрослабого взаимодействия и что может быть измерено экспериментально.

1. Отношение заряда электрона к "слабому" заряду и отношение "слабых" зарядов друг к другу:

$$\frac{e}{g} = \sin \theta_W; \quad \frac{g'}{g} = \operatorname{tg} \theta_W. \quad (5.139)$$

Если ввести безразмерный заряд $\alpha_W = g^2/\hbar c$ по аналогии с безразмерным электрическим зарядом (постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$), то отношение

$$\frac{\alpha}{\alpha_W} = \sin^2 \theta_W. \quad (5.140)$$

Итак, экспериментально измеряемая величина – угол Вайнберга θ_W – находится путем измерения нейтральных токов. Численное значение величины (5.140) равно $\sin^2 \theta_W = 0.21$ (подробнее об измерении угла Вайнберга будет рассказано ниже). Подставляя это значение в (5.139), получаем:

$$\alpha_W \simeq 1/30, \quad (5.141)$$

т.е. "слабый" заряд больше электрического, ведь $\alpha = 1/137$! Если бы W -бозоны были безмассовыми, как фотоны, то это взаимодействие проявлялось бы сильнее электромагнитного.

Далее, из связи констант Ферми G_F и g следует

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{2m_W^2}. \quad (5.142)$$

Зная численное значение $G_F = (294 \text{ ГэВ})^{-2}$ и экспериментально найденную величину $\sin^2 \theta_W$, можно предсказать массу W -бозона:

$$m_W = \left(\frac{g^2 \sqrt{2}}{8G_F} \right)^{1/2} = \left(\frac{8 G_F \sin^2 \theta_W}{\sqrt{2} \alpha^2 \hbar c} \right)^{-1/2} = 81.4 \text{ ГэВ}. \quad (5.143)$$

2. Масса Z -бозона связана с m_W формулой (5.97), откуда следует, что

$$m_Z = m_W / \cos \theta_W = 91.6 \text{ ГэВ}. \quad (5.144)$$

3. Нейтральный ток для частицы с электрическим зарядом Q имеет вид

$$j^0 = \pm \frac{1}{2} L_\mu - (L_\mu + R_\mu) Q \sin^2 \theta_W. \quad (5.145)$$

Здесь L_μ и R_μ – лево- и правоспиральные токи; знак $+$ в первом слагаемом соответствует "верхним" лептонам и кваркам (5.126):

$$\bar{\nu}_{eL} \nu_{eL}, \quad \bar{\nu}_{\mu L} \nu_{\mu L}, \quad \bar{\nu}_{\tau L} \nu_{\tau L}, \quad \bar{u}_L u_L, \quad \bar{c}_L c_L, \quad \bar{t}_L t_L, \quad (5.146)$$

а знак $-$ соответствует "нижним" лептонам и кваркам:

$$\bar{e}_L e_L, \quad \bar{\mu}_L \mu_L, \quad \bar{\tau}_L \tau_L, \quad \bar{d}_L d_L, \quad \bar{s}_L s_L, \quad \bar{b}_L b_L. \quad (5.147)$$

Из (5.145) видно, что вероятности процессов с нейтральными токами по-разному зависят от соотношения между левой и правой компонентами тока для частиц с разными электрическими зарядами. Это различие однозначно определяется значением $\sin^2 \theta_W$.

Эксперимент показал, что нейтральные токи нейтрино ($Q_\nu = 0$), электронов и мюонов ($Q_e = Q_\mu = -1$) и кварков

($Q_u = +2/3$, $Q_d = -1/3$) описываются приведенным в (5.145) выражением для тока, если

$$\sin^2 \theta_W \simeq 0.22. \quad (5.148)$$

На рис. 5.7 и 5.8 представлены примеры некоторых слабых токов. Графики Фейнмана соответствуют процессам, обусловленным обменом виртуальными Z -бозонами между реальными частицами.

5.6.2. Открытие W - и Z - бозонов

Предсказанные массы W -бозона и Z -бозонов ($m_W = 81.4$ ГэВ и $m_Z = 91.6$ ГэВ), настолько велики, что до начала 1980-х годов ни одна лаборатория в мире не обладала источниками энергии, достаточной для рождения таких частиц при столкновении каких-либо частиц в ускорителях. В 1981 г. в ЦЕРНе был запущен протон-антипротонный коллайдер, в котором протоны с энергией 270 ГэВ сталкивались с антипротонами той же энергии. Коллайдер достиг нужной интенсивности осенью 1982 г., и в январе 1983 г. К. Руббиа сообщил о наблюдении первых W -бозонов (этот эксперимент известен под названием UA1).

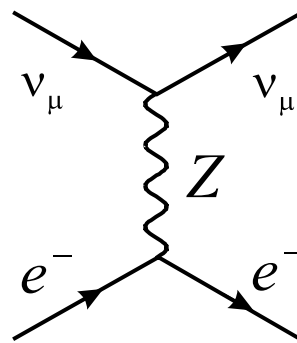
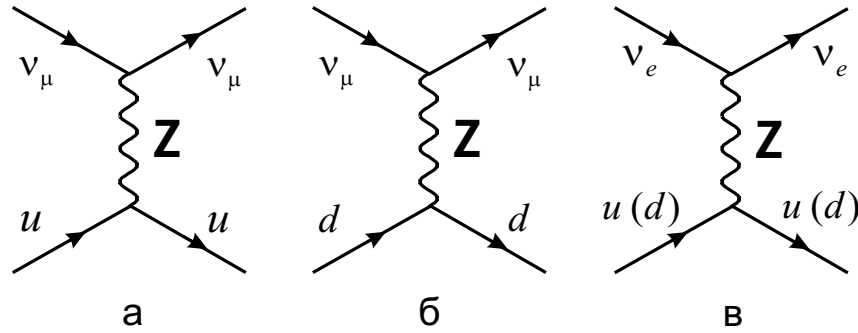
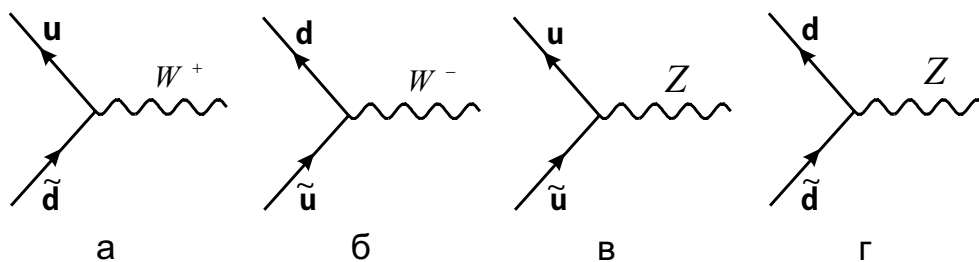


Рис. 5.7. Рассеяние мюонного нейтрино электроном

Рассмотрим, как происходит рождение промежуточных бозонов (рис. 5.9, 5.10). Взаимодействие кварков осуществляется путем обмена бозе-частицами — глюонами. Быстрый протон

Рис. 5.8. Рассеяние мюонного и электронного нейтрино на u - и d -кварках

представляет собой пучок кварков и глюонов. Примерно половину импульса несут кварки, половину – глюоны. Антипротон состоит из антикварков и глюонов. При столкновении протона с антипротоном один из кварков q и один из антикварков $\tilde{q}$ могут превратиться в промежуточный бозон. При этом возможны варианты, представленные на рис. 5.9. Остальные кварки в этих процессах активного участия не принимают, однако, лишившись своих спутников, претерпевших лобовое столкновение, они фрагментируют (рассыпаются) в адроны. При этом образуются две адронные струи: одна продолжает путь исходного протона, другая – антипротона. Этот процесс изображен на рис. 5.10. Как детектируется этот промежуточный бозон? Время его жизни, согласно стандартной теории, составляет $\sim 3 \cdot 10^{-25}$ с. За это время он не успевает "выбраться" из "толпы свидетелей" его рождения – кварков и антикварков. Рапа-

Рис. 5.9. Рождение W^+ -бозона (а), W^- -бозона (б), Z -бозона при столкновении кварка и антикварка (в, г)

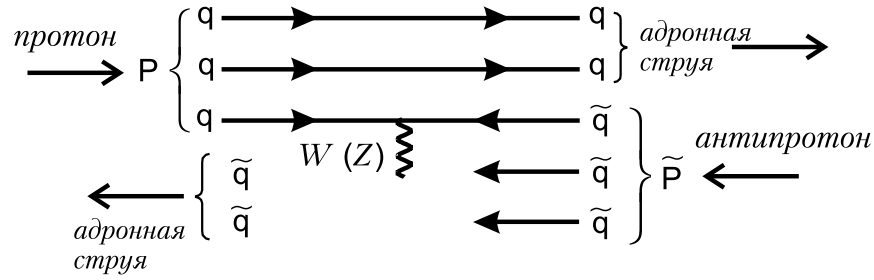


Рис. 5.10. Рождение промежуточного бозона (W^+ или Z) при столкновении протона и антипротона. Оставшиеся кварки образуют 2 адронные струи

даясь, W - или Z -бозоны могут иногда очень весомо заявить о себе. Если бозоны распадаются на кварк и антикварк, то отличить эти струи от адронов, родившихся за счет сильных взаимодействий, очень трудно. Зато распады W - и Z -бозонов на лептоны практически не заглушаются никаким фоном:

$$W^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \quad W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e, \quad Z^0 \rightarrow e^+ e^-. \quad (5.149)$$

В этих случаях электроны и позитроны вылетают под большими углами по отношению к сталкивающимся пучкам P и $\tilde{P}$.

Экспериментальные установки, в которых наблюдались W - и Z -бозоны, уникальны. Они сочетают гигантские размеры с ювелирной точностью.

5.6.3. Времена жизни частиц

С помощью лагранжиана Вайнберга–Салама–Глэшоу можно вычислить сечение любого процесса:

$$\sigma \sim |M_{fi}|^2.$$

Измеряемые зависимости $\sigma(\varepsilon)$ сечения от энергии демонстрируют характерные резонансные особенности (рис. 5.11), при-

Таблица 5.1. Измеренные и предсказанные значения масс векторных бозонов (m_Z, m_W), угла Вайнберга, времени жизни Γ_Z Z -бозона и ширины резонансов, связанных с рождением векторных бозонов в процессах столкновений $e\tilde{e}, b\tilde{b}$.

Величина	Измерение	Теория
$m_Z, \text{ГэВ}$	91.187 ± 0.007	Свободный параметр
$\Gamma_Z, \text{ГэВ}$	2.492 ± 0.007	2.493 ± 0.001
$\Gamma_{e\tilde{e}}, \text{МэВ}$	83.33 ± 0.007	83.74 ± 0.03
$\Gamma_{b\tilde{b}}, \text{МэВ}$	373 ± 9	376.4 ± 0.2
$\Gamma_{had}, \text{МэВ}$	1737 ± 6.7	1741 ± 4
$m_W, \text{ГэВ}$	80.41 ± 18	80.23 ± 0.02
m_W/m_Z	0.8813 ± 0.0041	0.8798 ± 0.0002
$\sin^2 \theta_W$	0.2242 ± 0.0042	0.2259 ± 0.0003

чем ширина линии Γ связана со временем жизни частицы как

$$\tau \sim \hbar/\Gamma.$$

Таким образом можно вычислить времена жизни или вероятности распада частиц, обусловленные слабыми взаимодействиями.

В заключение приведём таблицу, где для сравнения приведены измеренные и предсказанные теорией величины (табл. 5.1).

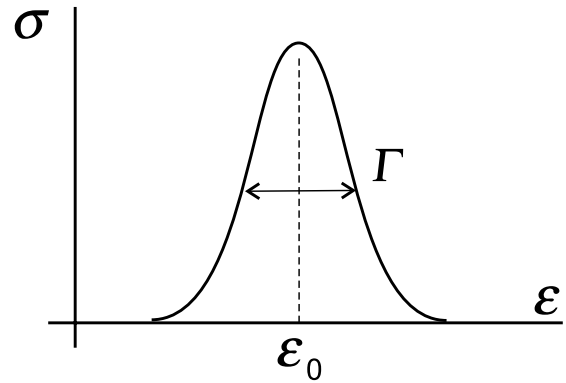


Рис. 5.11. Сечение слабого процесса, свидетельствующее о рождении частицы с конечным временем жизни

Глава 6

Сильные взаимодействия

6.1. Основные положения квантовой хромодинамики

6.1.1. Феноменологический подход

Зарядом по отношению к сильному взаимодействию является цвет. Как уже отмечалось в главе 1, таких цветов должно быть три. Будем называть их "красным" (R), "синим" (B), "зеленым" (G). Цветовые заряды кварков могут "сокращаться". Взаимное сокращение будет полным для системы трех кварков, все цвета которых разные. Такая конфигурация является устойчивой, или "белой", нейтральной по цвету. Цветовые поля кварка и антикварка также сокращаются. Комбинации трех кварков образуют барионы, кварка и антикварка – мезоны. Так, волновая функция протона (кварковая комбинация $u u d$) представляет собой суперпозицию

$$\begin{aligned} \Psi_P = \frac{1}{\sqrt{6}} & (\psi_u^R \psi_u^B \psi_d^G + \psi_u^R \psi_u^G \psi_d^B + \psi_u^G \psi_u^R \psi_d^B + \\ & + \psi_u^B \psi_u^R \psi_d^G + \psi_u^G \psi_u^R \psi_d^B + \psi_u^B \psi_u^G \psi_d^R), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где ψ_u и ψ_d – волновые функции u - и d -кварков, а верхний индекс обозначает соответствующие цветовые состояния.

Аналогично, для π^+ -мезона имеем

$$\Psi_{\pi^+} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_u^R \psi_{\tilde{d}}^{\tilde{R}} + \psi_u^G \psi_{\tilde{d}}^{\tilde{G}} + \psi_u^B \psi_{\tilde{d}}^{\tilde{B}} \right). \quad (6.2)$$

Здесь $\psi_{\tilde{d}}$ – волновая функция антикварка $\tilde{d}$, несущего цветовой "антизаряд".

Первым теоретиком, предсказавшим существование трех разных цветов у кварков и описавшим роль динамической цветовой симметрии, был Иохиро

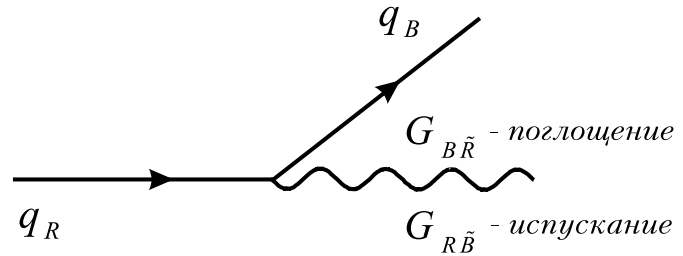


Рис. 6.1. Испускание и поглощение глюона кварком

Намбу¹. Его работа появилась в 1966 г. Прошло 42 года, и в 2008 г. Намбу получил за нее Нобелевскую премию. Объяснением такой неторопливости общественного научного сознания могут служить только развитые в последующие десятилетия методы КХД, позволившие получить поразительные результаты, объясняющие экспериментальные данные, и предсказания, в последующем блестяще подтвержденные опытом.

Взаимодействие между кварками в соответствии с положениями квантовой теории поля осуществляется безмассовыми частицами со спином 1 – глюонами (G). Испуская или поглощая глюоны, кварки меняют цвет. Таким образом, каждый глюон должен быть тоже заряжен по цвету.

¹Несколько ранее аналогичные идеи высказал Н. Боголюбов с сотрудниками.

Кроме того, он должен нести в себе еще и антицвет, чтобы нейтрализовать цвет кварка, поглотившего его, и придать ему новый цвет, который несет глюон. Этот процесс иллюстрирует рис.6.1. Здесь q_R – ”красный” кварк, q_B – ”синий”.

Таблица 6.1. Превращения кварков при испускании и поглощении глюонов

Кварк	q_R	q_B	q_G
q_R	$G_{R\tilde{R}}$	G_{RB}	G_{RG}
q_B	G_{BR}	$G_{B\tilde{B}}$	G_{BG}
q_G	G_{GR}	G_{GB}	$G_{G\tilde{G}}$

Если ”красный” кварк q_R испускает ”синий-антикрасный” глюон $G_{B\tilde{R}}$, то он превращается в ”синий” q_B . В зависимости от того, поглощается или испускается глюон, один из двух индексов недиагональных глюонов означает соответствующий антицвет и должен быть снабжен тильдой, например либо $G_{R\tilde{B}}$, либо $G_{\tilde{R}B}$.

Комбинация $G_{R\tilde{R}} + G_{B\tilde{B}} + G_{G\tilde{G}}$ цвета не имеет, но создает ”уравнение связи” между глюонами. Это выражение следует понимать как суперпозицию волновых функций глюонов в трех разных состояниях: например $G_{R\tilde{R}}$ здесь – волновая функция глюона, несущего одновременно красный и антикрасный цвет. Такой глюон не изменяет цвет кварка ни при поглощении, ни при испускании. Аналогичный смысл имеют слагаемые $G_{B\tilde{B}}$ и $G_{G\tilde{G}}$. Итак, для осуществления цветового взаимодействия между тремя кварками необходимо $3 \times 3 - 1 = 8$ независимых глюонов (табл. 6.1).

6.1.2. Глюонное поле

К этому же выводу можно прийти, рассматривая сильные взаимодействия с точки зрения локальной калибровочной инвариантности. Можно сказать, что сильные взаимодействия

инвариантны относительно вращений в трехмерном "цветовом" пространстве. Потребовав локальную калибровочную инвариантность, приходится ввести компенсирующие поля, амплитудами которых являются элементы матрицы поворота в трехмерном пространстве:

$$\begin{aligned} |R\rangle' &= a_{11}(x)|R\rangle + a_{12}(x)|B\rangle + a_{13}(x)|G\rangle, \\ |B\rangle' &= a_{21}(x)|R\rangle + a_{22}(x)|B\rangle + a_{23}(x)|G\rangle, \\ |G\rangle' &= a_{31}(x)|R\rangle + a_{32}(x)|B\rangle + a_{33}(x)|G\rangle. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Матрица поворота унитарна. Из условия унитарности следует одно уравнение связи между девятью элементами $a_{ik}(x)$. Таким образом, остается восемь независимых компенсирующих калибровочных полей, квантами которых и являются глюоны. Унитарная цветовая симметрия в пространстве трех цветов описывается группой $SU(3)$.

Наличие зарядов у виртуальных частиц, переносящих сильное взаимодействие, приводит к результатам, прямо противоположным результатам КЭД, где фотон электрически нейтрален и поэтому не может в свою очередь испускать фотоны. Но глюон может испускать глю-

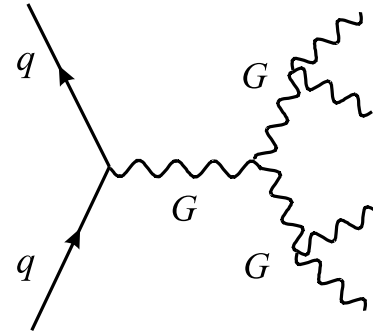


Рис. 6.2. Процессы испускания глюонов глюонами

он, и рост глюонного поля самоусиливается по мере удаления от источника. Возможны, следовательно, диаграммы, в вершинах которых сходятся три глюонные линии (рис. 6.2).

При этом "голый" заряд глюона первоначально малой величины катализирует появление облака виртуальных частиц, увеличивающих его мощность. Происходит "антиэкранировка"

(в отличие от экранировки электрического заряда в КЭД, при которой он уменьшается с расстоянием).

В связи с антиэкранировкой становится теоретической необходимостью "невылетание" кварков, или конфайнмент. С уменьшением расстояния между кварками их цветовые заряды, напротив, уменьшаются, и они ведут себя практически как свободные частицы. Это так называемая асимптотическая свобода, за открытие которой трое физиков – Д. Гросс, Х.Д. Политцер и Д. Вильчек – были удостоены в 2005 г. Нобелевской премии.

Асимптотическая свобода объясняет, почему внутри адрона кварки практически не взаимодействуют между собой, и становятся понятны результаты экспериментов по рассеянию фотонов с высокой энергией на протонах, которые были проведены Дж. Фридманом, Г. Кендаллом и Р. Тейлором, получившими в 1990 г. Нобелевскую премию за эту работу. Подробнее об этих экспериментах будет сказано далее.

Теории, в которых обнаружена асимптотическая свобода, были названы неабелевыми калибровочными, или теориями Янга–Миллса. Они представляют собой обобщение квантовой электродинамики. В них постулируется существование нескольких типов зарядов и связывающей их симметрии. Так, в КХД вместо одного-единственного заряда мы имеем дело с тремя цветами и соответственно вместо одного фотона появляется семейство восьми цветных глюонов.

Концепция цветовых полей позволяет понять, как формируется масса адронов. На первый взгляд кажется странным, что масса, скажем, протона, во много раз больше суммарной

массы входящих в него кварков (u -кварка – $m_u \simeq 5$ МэВ, d -кварка – $m_d \simeq 7$ МэВ, протона – $m_p \simeq 938$ МэВ). Для объяснения данного факта нам придется обратиться к знаменитой формуле Эйнштейна, которую запишем так:

$$m = \frac{E}{c^2}. \quad (6.4)$$

В таком виде это уравнение дает возможность объяснить происхождение массы в терминах энергии. Действительно, масса вещества набирается практически полностью из энергии – энергии кварков и безмассовых глюонов, которые являются составляющими для протонов и нейтронов, а следовательно, и для атомных ядер. По-видимому, это происходит следующим образом.

Наращивание антиэкранирующих облаков вокруг кварков не может продолжаться беспредельно, так как для этого потребовалась бы бесконечная энергия. Цветовой заряд, угрожающий развитием такого сценария, должен быть скомпенсирован. Он может быть сокращен как антикварком (тогда они образуют мезон), так и парой кварков с дополняющими цветами (в этом случае получается барион). В обоих случаях полное сокращение цветовых зарядов произойдет, если все необходимые кварки расположатся в одной точке пространства. Однако чем меньше область локализации, тем больше энергия этой частицы. Из соотношения неопределенностей Гайзенберга видно, что кинетическая энергия зависит от радиуса локализации как $E \sim 1/R^2$. Итак, для минимизации энергии цветового поля необходимо свести заряды в одну точку, а для минимизации кинетической энергии следует держать источник этого поля размытым.

Стабильные конфигурации основаны на различных компромиссах между этими двумя факторами. В каждой конфигурации отлична от нуля будет и энергия поля, и энергия, возникающая при локализации. Именно таким образом, согласно (6.4), и возникает масса. Устойчивые конфигурации представляют собой наблюдаемые частицы с различными массами, а метастабильные конфигурации соответствуют массивным частицам с конечным временем жизни.

6.2. Лагранжиан КХД и теория возмущений

6.2.1. Калибровочное поле сильных взаимодействий

Теперь следует построить калибровочно инвариантный лагранжиан сильных взаимодействий, инвариантный относительно преобразований (6.3).

В квантовой механике преобразование волновых функций (или векторов состояний в гильбертовом пространстве) осуществляется унитарными операторами вида $U = e^{-iG_\alpha\alpha}$, где α – параметр преобразования, G_α – эрмитов оператор. Таким образом, преобразованная волновая функция ψ' связана с исходной соотношением

$$\psi' = e^{-iG_\alpha\alpha} \psi. \quad (6.5)$$

Если это преобразование поворота на некоторый угол, то G_α является оператором углового момента ². В базисе собственных векторов оператора z -компоненты момента оператору G_α будет соответствовать матрица, имеющая ту же размерность, что и базис. Например, в случае поворотов в двумерном пространстве слабого изотопического спина, формализм которого

²Точнее, оператором его проекции на ось поворота.

идентичен формализму обычного спина $S = 1/2$, операторы G_α будут изображаться матрицами Паули. Совокупность всех преобразований, осуществляемых двумерными матрицами с теми же перестановочными соотношениями, что у матриц Паули, составляет унимодулярную группу $SU(2)$. Напомним эти перестановочные соотношения:

$$[S_l, S_m] = i\hbar\epsilon_{lmn}S_n \iff [\sigma_l, \sigma_m] = 2i\hbar\epsilon_{lmn}\sigma_n, \quad (6.6)$$

где $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ – векторный оператор спина, индексы l, m, k принимают значения x, y, z (или 1, 2, 3).

В нашем случае сильных взаимодействий преобразование происходит в трехмерном пространстве, базисными векторами которого являются состояния $|R\rangle, |B\rangle, |G\rangle$, и операторам G_α , следовательно, должны соответствовать матрицы размерности 3×3 с теми же перестановочными соотношениями. Совокупность всех таких преобразований составляет унимодулярную группу $SU(3)$. Операторы G_α называются генераторами группы. Если некоторая квантовая система инвариантна относительно преобразования группы $SU(3)$, то ее генераторы должны коммутировать с лагранжианом этой системы (теорема Вигнера).

В нашем случае оператор преобразования в (6.5) имеет вид

$$U = e^{-iT_a\theta_a(x)}, \quad (6.7)$$

где θ_a – параметры группы, $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ – генераторы группы. Состояния ψ являются векторами в трехмерном пространстве цветовых состояний:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_B \\ \psi_G \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

(вместо волновых функций можно оперировать соответствующими векторами состояний в гильбертовом пространстве: $\psi_R \rightarrow |R\rangle$, $\psi_B \rightarrow |B\rangle$, $\psi_G \rightarrow |G\rangle$). Векторы ψ образуют базис фундаментального представления группы $SU(3)$.

Компоненты кваркового спинора ψ зависят от трех индексов:

$$\psi = \psi_{\alpha f c}(x). \quad (6.9)$$

Здесь $\alpha = 1, 2, 3, 4$ – спинорный индекс (кварк – дираковская частица со спином $I = 1/2$); f – ароматический индекс ($f = u, d, s, c, t, b$); c – цветовой индекс ($c = R, B, G$).

Калибровочное поле имеет восемь составляющих A_μ^a , где $a = 1, 2, 3, \dots, 8$, μ – четырехмерная координата. Для обеспечения калибровочной инвариантности лагранжиана КХД относительно преобразований (6.7) в него должны входить ковариантные (“длинные”) производные:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - igT_a A_\mu^a, \quad (6.10)$$

где g – константа связи.

В качестве генераторов группы $SU(3)$ выберем матрицы Гелл-Манна размерности 3×3 , в которые в качестве блоков входят двумерные матрицы Паули. Они удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad (6.11)$$

где f_{abc} – так называемые структурные константы группы (для углового момента $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$ – антисимметричный тензор Леви-Чивита).

Как отмечалось в связи с уравнением (6.7), матрицы T_a удобно представить в виде $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$. Для группы $SU(3)$ мат-

рицы λ_a имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Мы видим, что если в первых четырех матрицах убрать нулевые строки и столбцы, то оставшиеся двумерные блоки будут матрицами Паули.

Калибровочно инвариантный лагранжиан КХД должен иметь вид

$$L = -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^2)^2 + \bar{\psi}(i\gamma_\mu D_\mu - m)\psi.\tag{6.13}$$

Первый член представляет энергию глюонного поля, при этом тензор глюонного поля

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c.\tag{6.14}$$

Вид $G_{\mu\nu}$ определяется из условия инвариантности данного тензора относительно преобразования (6.7) и поэтому закон его преобразования был таким же, как и закон преобразования для длинной производной D_μ :

$$D'_\mu = U D_\mu U^{-1}; \quad G'_{\mu\nu} = U G_{\mu\nu} U^{-1}.\tag{6.15}$$

Второе слагаемое в (6.13) представляет собой диагональный по сортам кварков (ароматов) член и состоит из суммы лагранжиана свободного кварка:

$$\bar{q}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)q, \quad (6.16)$$

где m – масса одного кварка, q и $\bar{q}$ – спиноры, относящиеся к этому кварку. Условию (6.15) удовлетворяет следующее определение:

$$G_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu], \quad (6.17)$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a T_a; \quad A_\mu = A_\mu^a(x) T_a. \quad (6.18)$$

Действительно, удлиненная производная преобразуется по закону

$$D'_\mu = U (\partial_\mu - ig A_\mu) U^{-1} = \partial_\mu - ig A'_\mu, \quad (6.19)$$

где

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}. \quad (6.20)$$

С учетом (6.19) и (6.20) имеем

$$\begin{aligned} G'_{\mu\nu} &= D'_\mu A'_\nu - D'_\nu A'_\mu = \\ &= U D_\mu U^{-1} \left[U \left(A_\nu + \frac{i}{g} \partial_\nu \right) U^{-1} \right] - U D_\nu U^{-1} \left[U \left(A_\mu + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1} \right] = \\ &= U (D_\mu A_\nu) U^{-1} - U (D_\nu A_\mu) U^{-1} + U \left(-ig A_\mu \frac{i}{g} \partial_\nu + ig A_\nu \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1} = \\ &= U \{ D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \} U^{-1} = U G_{\mu\nu} U^{-1}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Теперь подставляем (6.18) в (6.17):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a T_a &= \partial_\mu A_\nu^a T_a - \partial_\nu A_\mu^a T_a - ig [A_\mu^b T_b, A_\nu^c T_c] = \\ &= \partial_\mu A_\nu^a T_a - \partial_\nu A_\mu^a T_a - ig A_\mu^b A_\nu^c [T_b, T_c] = \\ &= \partial_\mu A_\nu^a T_a - \partial_\nu A_\mu^a T_a - ig (i f_{abc}) A_\mu^b A_\nu^c T_a. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Отсюда видно, что из (6.22) действительно следует (6.14).

Лагранжиан кварк-глюонного взаимодействия имеет вид

$$g \left(\bar{q} \gamma_\mu A_\mu^a \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q \right). \quad (6.23)$$

После возведения в квадрат тензора глюонного поля получаем квадратичный по глюонному полю член без учета их взаимодействия

$$-\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2,$$

кубическое по глюонному полю слагаемое, учитывающее самовзаимодействие глюонов:

$$-\frac{1}{2} g f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c = -g f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c, \quad (6.24)$$

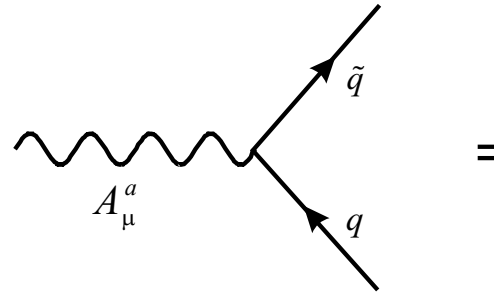
и, наконец, член четвертого порядка, описывающий также самовзаимодействие глюонов:

$$-\frac{1}{4} g^2 f_{abc} f_{ade} A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e. \quad (6.25)$$

6.2.2. Теория возмущений

Подобно тому, как это делалось в КЭД, можно построить для КХД теорию возмущений, разлагая S-матрицу по степеням взаимодействия кваркового и глюонного полей. При этом отдельным элементам амплитуд можно сопоставить следующие графики Фейнмана.

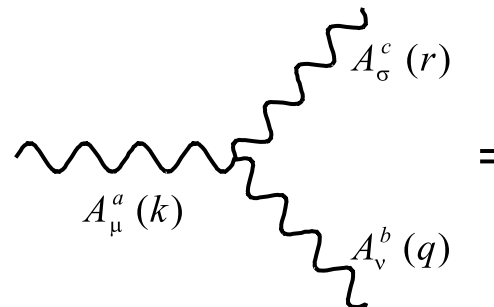
Вершины: Кварк-глюонная вершина и соответствующая ей амплитуда:



$$= -ig \gamma_\mu \frac{\lambda_a}{2} (2\pi)^4 \delta \left(\sum k \right). \quad (6.26)$$

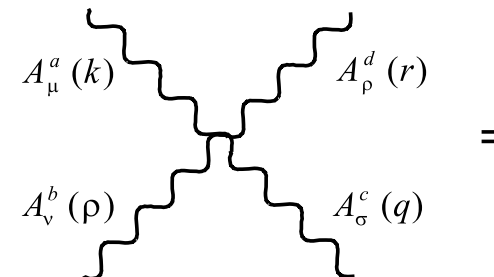
Множитель $\delta(\sum k)$ обеспечивает выполнение закона сохранения импульса.

Тройная глюонная вершина:



$$= ig f_{abc} [g_{\mu\nu}(k - q)_\sigma + g_{\nu\sigma}(q - r)_\mu + g_{\sigma\mu}(r - k)_\nu] (2\pi)^4 \delta \left(\sum k \right). \quad (6.27)$$

Четырехглюонная вершина:



$$= -ig^2 [f_{abe} f_{cde} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) + f_{ace} f_{bde} (g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) + f_{ade} f_{cbe} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma})]. \quad (6.28)$$

Для получения выражений (6.27) и (6.28) операторы глюонного поля следует разложить по плоским волнам:

$$A_\mu^a(x) = \sum_k \left(c_\mu^a(k) a_\mu^a(k) e^{-ikx} + (c^+)_\mu^a a_\mu^{*a}(k) e^{ikx} \right), \quad (6.29)$$

где c_μ^a и c_μ^{+a} – бозе-операторы соответственно уничтожения и рождения глюона с перестановочными соотношениями

$$[c_\mu^a(k), c_\nu^{+b}(k')] = g_{\mu\nu} \delta_{ab} \delta_{kk'}, \quad (6.30)$$

$$[c_\mu^a(k), c_\nu^b(k')] = [c_\mu^{+a}(k), c_\nu^{+b}(k')] = 0. \quad (6.31)$$

Заметим, что среднее по вакууму $|0\rangle$ от произведения $c_\mu^a(k) c_\nu^{+b}(k')$ равно:

$$\begin{aligned} \langle 0 | c_\mu^a(k) c_\nu^{+b}(k') | 0 \rangle &= \\ &= \langle 0 | [c_\mu^a(k), c_\nu^{+b}(k')] | 0 \rangle - \langle 0 | c_\nu^{+b}(k') c_\mu^a(k) | 0 \rangle = g_{\mu\nu} \delta_{ab} \delta_{kk'}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

поскольку $c_\mu^a(k) | 0 \rangle = 0$.

Например, для вершины (6.27) средняя по вакууму амплитуда получится, если в интеграл

$$- \int d^4x \langle 0 | c_\mu^a(k) c_\nu^b(q) c_\sigma^c(r) i g f_{a'b'c'} (\partial_{\mu'} A_{\nu'}^{a'}) A_{\mu'}^{b'} A_{\nu'}^{c'} | 0 \rangle \quad (6.33)$$

подставить разложения (6.29) и учесть, что плоские волны $e^{\pm ikx}$ ортогональны:

$$\int d^4x e^{i(k-q)x} = (2\pi)^4 \delta(k - q). \quad (6.34)$$

Аналогично можно вычислить пропагаторы свободного поля кварков и глюонов. Пропагатору кварка соответствует линия

виртуальных глюонных пар) и прямое глюонное самодействие. Применение формализма S-матрицы в КХД подобно тому, как проводятся вычисления в КЭД, где для получения важных результатов обычно достаточно ограничиться несколькими первыми приближениями, кажется на первый взгляд проблематичным. До открытия асимптотической свободы ожидалось, что квантовая теория поля должна нарушаться при достаточно высоких энергиях, и при перенормировке должны появляться ошибки. В асимптотически свободной теории это не так. Уменьшение эффективной константы связи при увеличении энергии означает, что на малых расстояниях нет необходимости во введении какого-либо аналога фундаментальной длины.

6.3. Решеточная хромодинамика

6.3.1. Решеточная модель для сильных взаимодействий

До сих пор мы изучали вопросы КХД на основе теории возмущений, которая позволяет вычислить вероятности различных процессов с участием адронов с помощью графиков Фейнмана. Наиболее актуальные проблемы – невылетание (конфайнмент) кварков и спектр масс адронов – не могут быть решены на основе теории возмущений, поскольку требуют суммирования бесконечных рядов диаграмм. Так как в этих условиях невозможно получить аналитические результаты, требуется численное решение уравнений КХД. Эта задача сама по себе представляет серьезную проблему.

Дело в том, что уравнения КХД, следующие из лагранжиана сильных взаимодействий, представляют собой систему

нелинейных дифференциальных уравнений. Чтобы перевести точную задачу на уровень численного решения, необходимо перейти от континуального представления к дискретному, заменяя непрерывное четырехмерное пространство решеткой, в узлах которой задаются квантовые поля глюонов и кварков, а вне узлов решетки никаких полей нет. Такой подход получил название решеточной хромодинамики. Уравнения КХД на решетке допускают получение численных решений, позволяющих вычислить массы адронов и описать конфайнмент кварков. Следует заметить, что такие расчеты весьма трудоемки и требуют больших вычислительных ресурсов.

Переход от уравнений КХД к решеточной модели осуществляется заменой производных на конечные разности, и эта процедура неоднозначна. Тем не менее разработан ряд вариантов дискретизации КХД, дающих весьма разумное описание сильных взаимодействий.

На практике задача сводится к вычислению континуальных интегралов вида

$$Z = \int e^{-S[\varphi(x)]} D\varphi(x), \quad (6.38)$$

которые представляют производящий функционал для пропагаторов полей, а Z – точный аналог статистической суммы. Здесь $S[\varphi(x)]$ является действием, зависящим от полного набора полей (кварковых и глюонных), совокупность которых мы обозначили $\varphi(x)$. Действие представляет собой интеграл по времени от лагранжиана. В решеточной модели континуальный интеграл (6.38) заменяется многомерным интегралом

по переменным $\varphi(s)$, заданным на решетке:

$$Z = \int \prod_s d\varphi(s) e^{-S[\varphi(s)]}. \quad (6.39)$$

В этом случае действие $S[\varphi(s)]$ является функционалом от полей $\varphi(s)$, в котором производные заменяются конечными разностями.

Интеграл в (6.39) по фермионным полям кварков вычисляется аналитически, поскольку действие квадратично по этим полям. Интегрирование по бозевским глюонным полям производится численно методом Монте-Карло.

Каков должен быть размер ячейки в решетке? Если мы хотим описать, скажем, нуклон с точностью до 10%, то в качестве параметра решетки нужно взять по крайней мере $1/10$ от размера нуклона. Следовательно, минимальная решетка должна включать порядка $L \sim 10$ шагов, а число узлов в этой решетке $X = L^4 \sim 10^4$, где L – длина ребра четырехмерного гиперкуба в единицах постоянной решетки a . Для описания мезона – более ”рыхлого” объекта – следует выбрать $L = 100$, так что объем $V = 100^4$. При расчетах на такой решетке приходится вычислять интегралы по калибровочным полям кратности $32L^4$, а интеграл по фермионным полям сводится к вычислению детерминантов от матриц размерности $12L^4 \times 12L^4$. Для выполнения этих вычислений потребуется около 100 дней работы суперкомпьютера производительностью 1 терафлоп. Такова цена расчетов в решеточной КХД.

6.3.2. Вычисление масс адронов

Важнейшим результатом численных расчетов в решеточной КХД является вычисление масс адронов. При этом входящими параметрами в расчетах служат массы кварков, составляющих данный адрон, и константа связи α_s . Решение уравнений КХД в этом случае определяет массу адрона. Замечательным результатом этих исследований стал тот факт, что масса адронов много больше массы составляющих его кварков. Так, 99% массы протона происходит не от массы трех кварков ($u u d$), а от энергии глюонных полей, существующих внутри объема этой составной частицы. Энергия E полей порождает массу, которая описывается соотношением Эйнштейна: $m = E/c^2$.

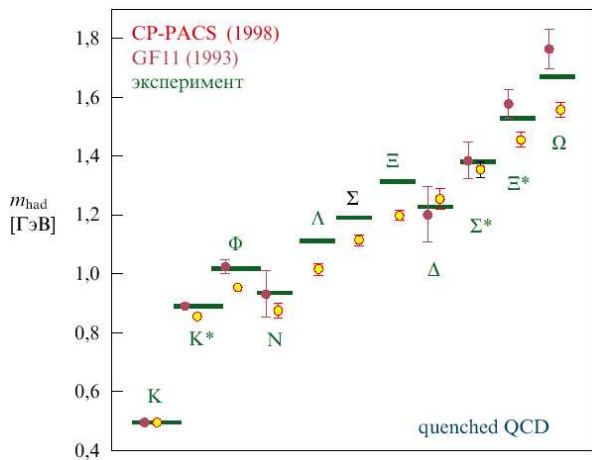


Рис. 6.3. Сравнение наблюдаемых масс адронов со спектром масс, полученным численным интегрированием уравнений КХД на решетке

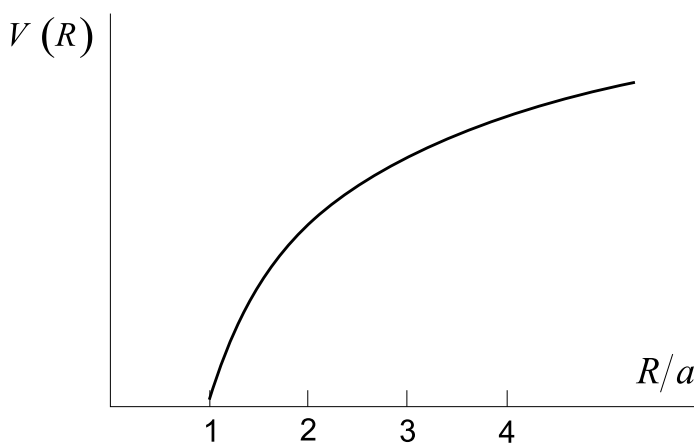
Следует иметь в виду, что состояния полей внутри протона (как и любого адрона) очень сложные. В вакууме внутри составной частицы постоянно происходит рождение и уничтожение кварк-антикварковых пар подобно тому, как в квантовой электродинамике в вакууме постоянно рождаются вирту-

альные электрон-позитронные пары, с которыми взаимодействуют реальные электроны, приобретая таким образом массу. Итак, в составной частице, кроме составляющих ее кварков, которые принято называть валентными, существуют быстро возникающие и тут же аннигилирующие кварк-

антикварковые пары. Следует учитывать взаимодействие валентных кварков с виртуальными парами, и это имманентно содержится в уравнениях КХД, включая и ее решеточную модель.

Учет только валентных кварков, содержащихся в глюонном поле, позволяет вычислить массу адрона с точностью до 10%, учет "моря" флуктуаций виртуальных пар кварков и антикварков требует колоссального увеличения компьютерных ресурсов, зато повышает точность вычисления масс до нескольких процентов.

Вычисленные значения масс представлены на рис. 6.3. Видно, что их реальный спектр описывается достаточно хорошо. Наибольшие несовпадения объясняются необходи-



мыми приближениями. При этом в суперкомпьютер была заложена лишь информация о лагранжиане КХД.

Рис. 6.4. Потенциал взаимодействия кварков, рассчитанный в решеточной модели КХД

6.3.3. Потенциал взаимодействия кварков

В рамках решеточной КХД вычисляется потенциал взаимодействия кварков. Он хорошо описывается суперпозицией кулоновского потенциала и линейно растущего потенциала, опи-

сывающего свойство конфайнмента на больших расстояниях:

$$V(R) = \frac{C}{R} + K R. \quad (6.40)$$

Типичный результат таких вычислений показан на рис. 6.4, где приводится потенциал, действующий между двумя статическими кварками и вычисленный на решетке $V = 32^4$ с ребром $a = 0.05 \cdot 10^{-13}$ см. Сплошной линией показана подгонка к выражению (6.40). Видно, что линейный рост $V(R)$ имеет место на расстояниях $R > 0.25 \cdot 10^{-13}$ см, а при малых R (наименьшее $R = a$) потенциал очень мал. Таким образом, результат, показанный на рис. 6.4, демонстрирует и конфайнмент, и асимптотическую свободу.

6.3.4. Структура глюонного поля в адроне

Решеточные вычисления дают возможность визуализировать картину флуктуаций полей КХД в вакууме.

На рис. 6.5 представлен моментальный снимок спонтанных флуктуаций полей глюонов. Здесь показано распределение плотности топологического заряда, дающей типичный вклад в функциональный интеграл.

На рис. 6.6 показано итоговое распределение энергии, образовавшейся в результате появления и исчезновения пары кварк-антикварк. Вычисляя энергию этих полей и аналогичных полей, произведенных другими возмущениями, оказывается возможным предсказать массы адронов. Можно сказать, что эти поля и есть адроны.

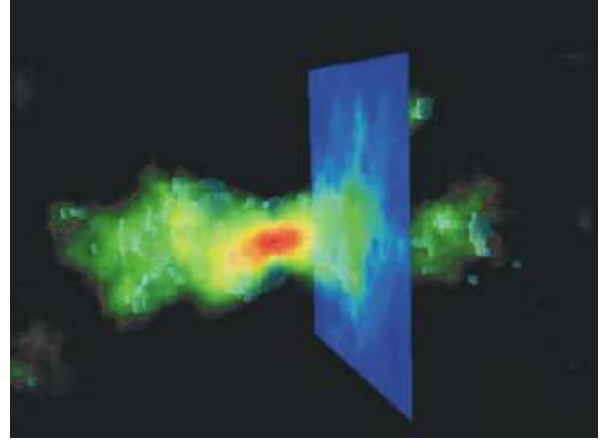
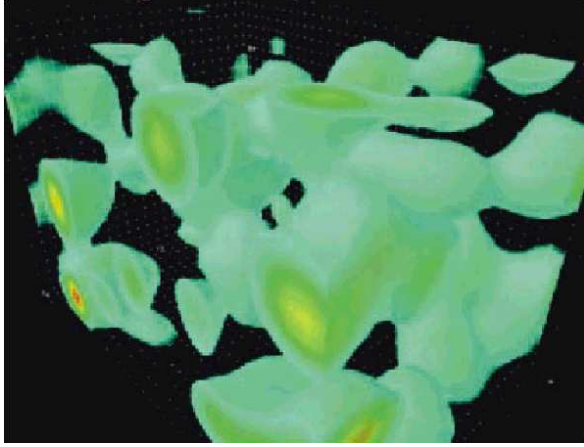


Рис. 6.5. Моментальный снимок спонтанных флуктуаций полей глюонов, вычисленных из решеточной КХД

Рис. 6.6. Пространственное распределение энергии, образовавшейся в результате появления и исчезновения пары кварк-антикварк

6.4. Экспериментальные доказательства положений и результатов квантовой хромодинамики

6.4.1. Реальность кварков

В экспериментах по рассеянию нуклонов на нуклонах, нуклонов на антинуклонах и нуклонов на мезонах всегда наблюдается следующее соотношение между сечениями:

$$\frac{\sigma(N, N) + \sigma(N, \tilde{N})}{2\sigma(N, \pi)} = \frac{3}{2}. \quad (6.41)$$

Здесь $\sigma(N, N)$ – полное сечение рассеяния нуклона на нуклоне, $\sigma(N, \tilde{N})$ – нуклона на антинуклоне и $\sigma(N, \pi)$ – нуклона на мезоне (например π -мезоне).

Это соотношение хорошо объясняется с точки зрения кварковой структуры адронов. Действительно, пусть сечение кварка на кварке будет $\sigma(q, q)$, а кварка на антикварке – $\sigma(q, \tilde{q})$. Тогда при столкновении нуклона с нуклоном произойдут столкновения между кварками, показанные на рис. 6.7. По-

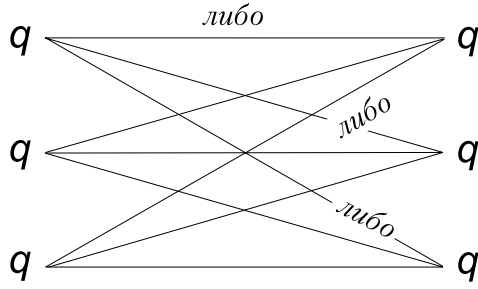


Рис. 6.7. Кварковые модели столкновения нуклона с нуклоном

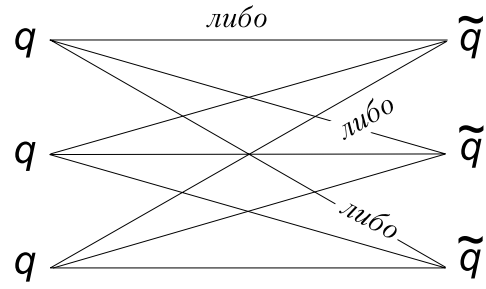


Рис. 6.8. Кварковые модели столкновения нуклона с антинуклоном

сколько вероятности всех (q, q) -столкновений складываются, должно быть $\sigma(N, N) \sim 9 \sigma(q, q)$. Аналогично получаем, что $\sigma(N, \tilde{N}) \sim 9 \sigma(q, \tilde{q})$ (см. рис. 6.8).

При столкновении нуклона и мезона имеем другой набор элементарных процессов (рис. 6.9). Здесь будет три столкновения кварка с кварком и три – кварка с антикварком, откуда $\sigma(N, \pi) \sim 3 \{ \sigma(q, q) + \sigma(q, \tilde{q}) \}$.

Подставляя соответствующие сечения в (6.41), получаем:

$$\frac{9 \{ \sigma(q, q) + \sigma(q, \tilde{q}) \}}{6 \{ \sigma(q, q) + \sigma(q, \tilde{q}) \}} = \frac{3}{2}. \quad (6.42)$$

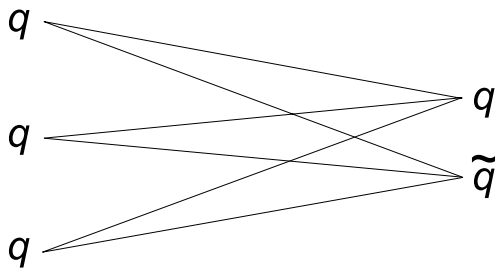


Рис. 6.9. Кварковые модели столкновения нуклона с мезоном

То, что кварки имеют именно те электрические заряды, которые приписываются им в КХД, и существуют именно в трех цветовых состояниях, образуя "аромат", подтверждают эксперименты

на электронно-позитронных коллайдерах. На рис. 6.10 приведены диаграммы процессов, которые могут при этом происходить.

Сечение каждого из этих процессов пропорционально сумме квадратов электрических зарядов получающихся частиц; отношение сечения процесса (а) к сечению процесса (б) равно

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{любые адроны})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_q Q_q^2. \quad (6.43)$$

Здесь Q_q – электрический заряд кварка в единицах абсолютного заряда электрона, суммирование проводится по всем сортам кварков (ароматам). Эксперимент показывает, что в области энергий до 3 ГэВ это соотношение близко к $R = 2$, а далее оно растет до $11/3$ и остается постоянным в интервале 4 – 40 ГэВ (рис. 6.11). Подсчитаем R с учетом того, что при низких энергиях могут рождаться только u , d и s -кварки:

$$R = 3(Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2) = 3\left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2.$$

Масса c -кварка $m_c \simeq 1.3$ ГэВ, и при повышении энергии столкновения возможно появление c -кварка. В этом случае

$$R = 2 + 3Q_c^2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}.$$

С повышением энергии появляется вклад b -кварка с массой $m_b \simeq 5$ ГэВ, и соотношение становится следующим:

$$R = 3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} = \frac{11}{3}. \quad (6.44)$$

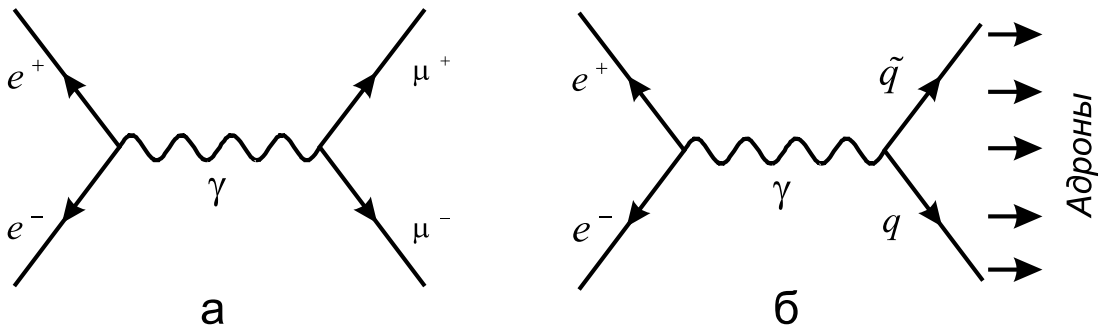


Рис. 6.10. Процессы, возникающие при столкновении электронов и позитронов

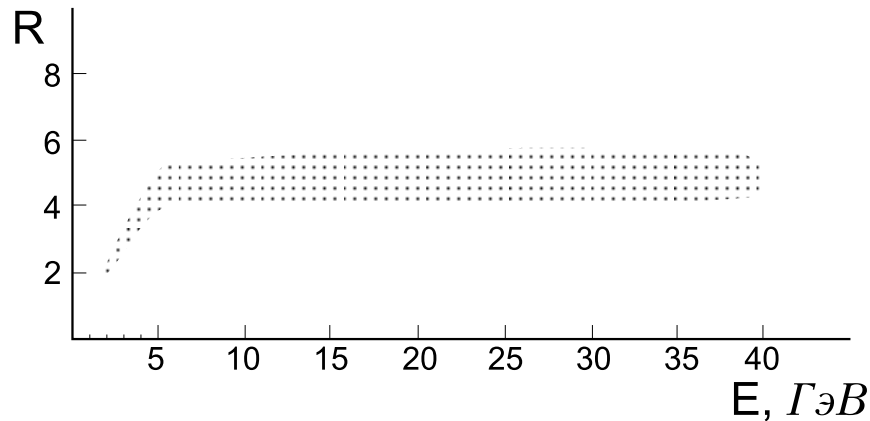


Рис. 6.11. Величина R (6.43) в зависимости от энергии E сталкивающихся электронов и позитронов

Дальнейшее изменение этого соотношения в сторону повышения нужно ожидать при появлении t -кварка. К моменту получения результатов измерений (6.44) t -кварк не был обнаружен, так как масса его очень велика и составляет $m_t \simeq 160$ ГэВ.

6.4.2. Кварки видны в связанном состоянии

В 1969 г. Дж. Фридман, Г. Кендалл, Р. Тейлор и их коллеги (г. Стэнфорд) на линейном ускорителе направили фотоны с высокой энергией на протоны и обнаружили, что рассеяние происходит на трех точечных объектах со спином $1/2$ и движущихся так, как если бы они были свободными частицами. Эти эксперименты и дали толчок к последующему развитию теории асимптотической свободы. Сначала эти частицы были названы *партонами*, затем из анализа сечений их свойства были идентифицированы со свойствами кварков. По своему значению этот эксперимент встает в один ряд с опытом Э. Резерфорда по рассеянию α -частиц, который установил размеры атомного ядра.

В опытах Резерфорда α -частицы рассеивались на ядрах атомов золота. То, что они рассеивались именно на объ-

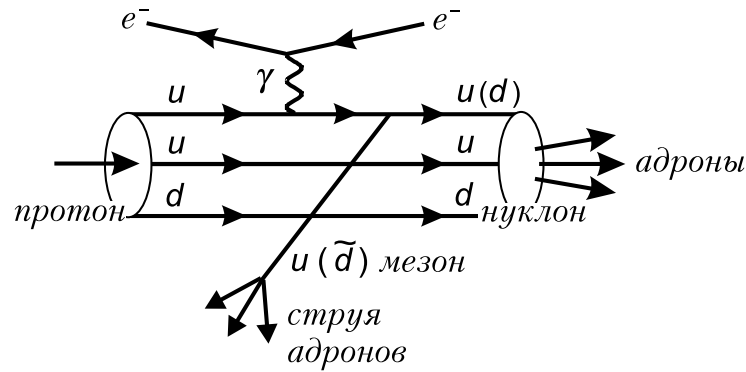


Рис. 6.12. Образование адронных струй при столкновении протона и электрона

екте размером $\sim 10^{-13}$ см, много меньшем размера атома $\sim 10^{-8}$ см, доказало появление α -частиц, рассеянных на большие углы; некоторая их доля имела углы рассеяния, близкие к π . Из сравнения выведенной Резерфордом формулы для сечения рассеяния с экспериментом следует, что на расстояниях порядка $\sim 10^{-13}$ см еще справедлив закон Кулона. Такая же картина наблюдалась и в экспериментах Фридмана, Кендалла и Тейлора: рассеяние фотонов происходит так, как будто бы между этими тремя точечными объектами нет сильного взаимодействия, а имеет место обычный закон Кулона.

6.4.3. Кварковые и глюонные струи

Как говорилось выше, вследствие конфайнмента свободные кварки существовать не могут. Однако если сфокусировать внимание не на отдельных адронах, а на потоке энергии и импульса, то кварки и глюоны можно наблюдать экспериментально.

Когда налетающая на протон частица (e^- , ν^0 , $\tilde{p}$) имеет большую энергию (~ 100 ГэВ), она "вытягивает" кварк из протона, "резинка" растягивается и рвется. В этом месте освободившаяся энергия рождает много кварков, антикварков и глюонов

и происходит следующее: один из антикварков объединяется с вылетевшим – мы видим мезон; одновременно кварк, парный этому антикварку, занимает место выбитого. Возникающие при этом адроны создают струю, движущуюся в направлении, которое определяется законом сохранения импульса. Эта струя и материализует выбитый кварк.

На рис. 6.12 изображены электрон, движущийся справа налево, и протон, движущийся слева направо. Электрон выбивает из протона u -кварк, который после того, как стягивающая их "резинка" рвется, продолжает движение в направлении импульса, переданного ему электроном. Освобождаемая при этом энергия "резинки" предстает в виде большого числа кварков и антикварков (виртуальные кварки и антикварки из флуктуаций вакуума обретают реальную энергию). Один из остающихся кварков (u или d) занимает место выбитого, и новый барион продолжает движение со своим импульсом, сопровождаемый струей адронов, сформировавшихся из кварков и антикварков; с выбитым же кварком объединяется антикварк $\bar{u}$ или $\bar{d}$ (оставшийся без пары). Так образуются мезон и струя других адронов, движущихся в направлении выбитого кварка.

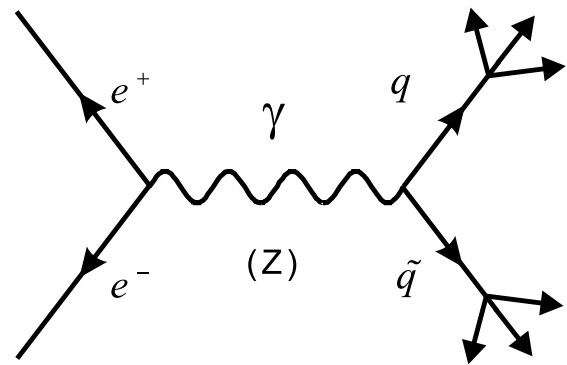


Рис. 6.13. Струи, порождаемые кварком и антикварком при аннигиляции электрона и позитрона

Струи наблюдаются и при электрон-позитронной аннигиляции, происходящей с испусканием фотона или Z -бозона,

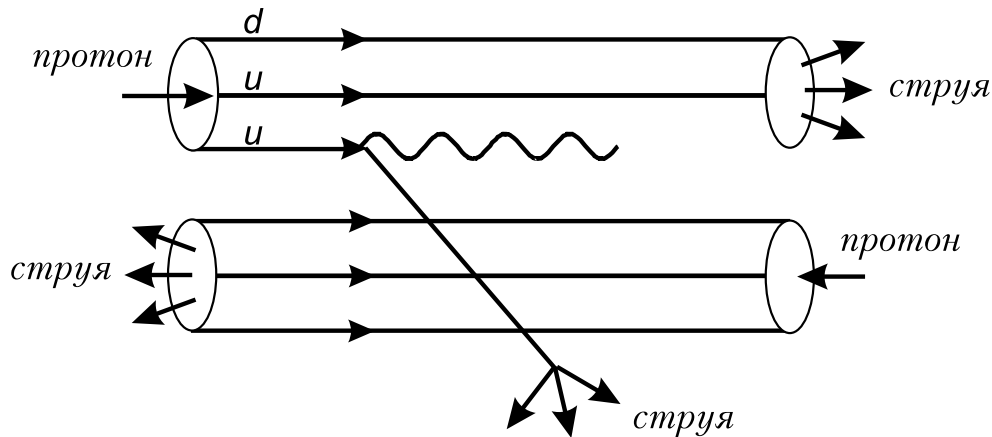


Рис. 6.14. Трехструйные процессы, наблюдаемые при рассеянии протона на протоне

которые превращаются в кварк и антикварк, движущиеся в противоположных направлениях с большими скоростями. В дальнейшем они превращаются в пучки адронов, т.е. в струи. Кварк создает струю, движущуюся в его направлении, аналогично антикварк создает струю, движущуюся в противоположном направлении (рис. 6.13) – это двухструйный процесс.

На рис. 6.14 показаны трехструйные процессы, наблюдаемые при рассеянии протона на протоне. В экспериментах, проводимых в ЦЕРНе на большом электронно-позитронном коллайдере, в большинстве случаев наблюдались двухструйные процессы; в 10% случаев происходит жесткое излучение, сопровождаемое испусканием глюона в каком-то другом направлении. В этом случае регистрируются три струи. В 1% случаев наблюдаются четыре струи. Диаграмма трехструйного процесса с глюоном показана на рис. 6.15, а на рис. 6.16 приведена его фотография. Эти три струи материализуют кварк, антикварк и глюон. Относительные вероятности событий с различным числом струй, и распределение по углам, указывающим направление струй и распределение по энергиям для разных событий могут быть предсказаны количественно. Эти пред-

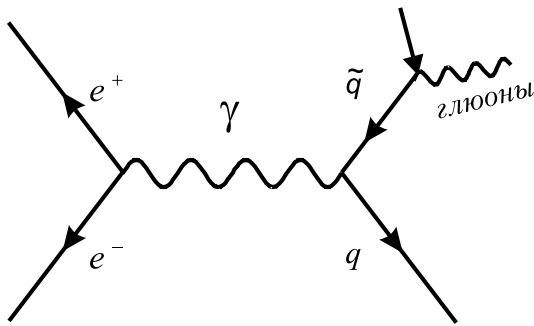


Рис. 6.15. Процесс с образованием глюонной струи

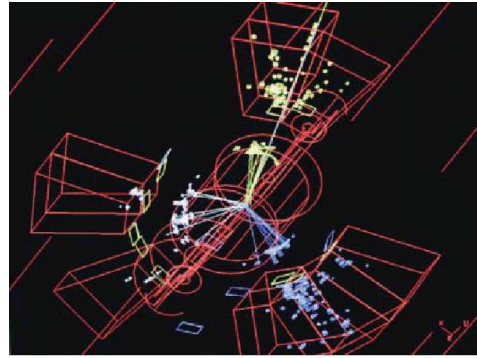


Рис. 6.16. Три струи, образовавшиеся при электрон-позитронной аннигиляции при высоких энергиях, наблюдавшиеся в ЦЕРНе

сказания, отражающие общие принципы, связывающие кварки и глюоны, являются определяющими для КХД и хорошо согласуются с обширным экспериментальным материалом.

6.4.4. Зависимость константы связи сильного взаимодействия α_s от энергии

В этом вопросе проявляется большой успех пертурбативной КХД. Многие эксперименты, выполненные при различных энергиях, подтвердили предсказательную силу КХД, причем каждый из них соответствовал своей константе связи. Как уже говорилось, заряд кварка антиэкранируется виртуальными глюонами, что приводит к увеличению заряда с увеличением расстояния, а также к уменьшению константы связи сильного взаимодействия α_s . В силу принципа неопределенности (меньшим расстояниям соответствуют большие импульсы и энергии, и наоборот), от расстояния, а значит, от энергии, должна зависеть и константа связи α_s . На рис. 6.17 приведены данные разнообразных экспериментов по зависимости константы связи от энергии, а также теоретическая кривая.

Чтобы вычислить эффективную константу связи $\alpha_s(Q)$, зависящую от импульса Q , необходимо просуммировать вклады

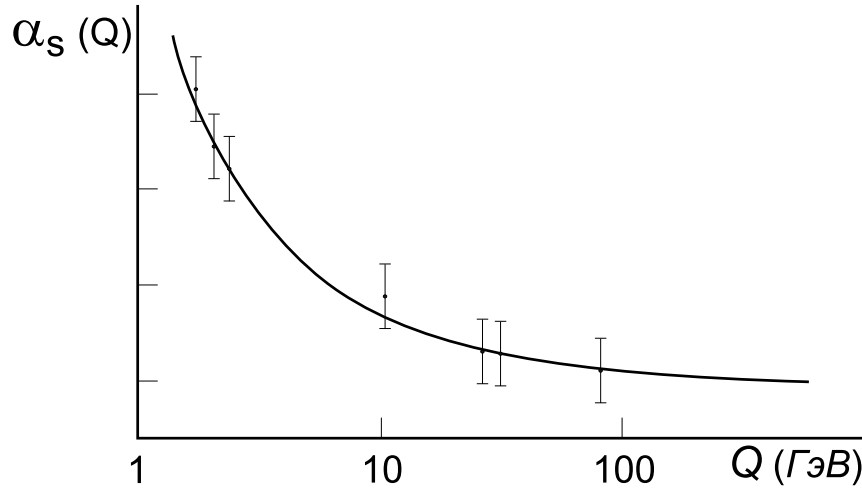
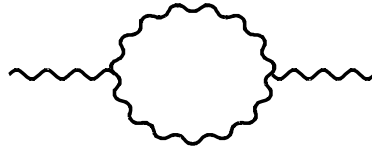


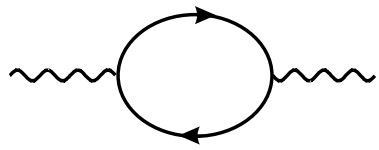
Рис. 6.17. Зависимость константы сильного взаимодействия $\alpha_s(Q)$ от обратной длины Q по данным многочисленных экспериментов. Сплошная линия – теоретическая кривая

от вакуумных процессов, приводящих к поляризации вакуума, обусловленной глюон-глюонным и глюон-кварковым взаимодействиями. В простейшем – однопетлевом – приближении этим вкладам соответствуют диаграммы глюон-глюонного



(6.45)

и кварк-глюонного взаимодействия:



(6.46)

В результате сложных вычислений уже в однопетлевом приближении получается выражение для экранированной константы связи КХД:

$$\alpha_s^2(Q^2) = \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}. \quad (6.47)$$

Здесь n_f – число типов кварков (в природе $n_f = 6$), μ – постоянный параметр, имеющий размерность массы. Из этой фор-

мулы видно, что с ростом импульса Q , переданного кварками, а следовательно, с уменьшением расстояния между ними эффективная константа связи не растет, а падает. Это и есть асимптотическая свобода. При достаточно малых Q , т.е. на больших расстояниях между кварками, эффективная константа связи становится большой, что и приводит к конфайнменту – невылетанию кварков, которое называют еще ”инфракрасным пленением”.

Интересно заметить, что если в некотором мире количество кварков различных типов было бы $n_f > 16$, то эффективная константа связи вела бы себя противоположным образом – так же, как это имеет место в КЭД.

Глава 7

Великое объединение

7.1. Группы симметрии фундаментальных взаимодействий

7.1.1. Непрерывные группы Ли и их представления

Все рассмотренные выше фундаментальные взаимодействия – электромагнитное, слабое и сильное – имеют внутреннюю симметрию, которая характеризуется определенной группой непрерывных преобразований. Такие группы называют группами Ли. Мы уже встречались с группами $U(1)$, $SU(2)$ и $SU(3)$, которые характеризуют перечисленные выше взаимодействия и являются группами Ли. Символ U означает унитарность преобразований группы (unitary), S говорит о том, что элементы группы (их матрицы) имеют единичный определитель, а цифровой индекс в символе $SU(N)$ обозначает число измерений векторного пространства, в котором действуют элементы группы. В списке групп $SU(N)$ особую роль в физике элементарных частиц играют группы с $N = 2, 3$, как мы видели в предыдущих главах, и $N = 5$, как увидим ниже при рассмотрении проблемы Великого объединения.

Все элементы группы Ли являются функциями $g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$

параметров θ_a , ($a = 1, 2, \dots, n$), принимающих непрерывный ряд значений в пределах замкнутой области. Например, элемент группы поворотов в плоскости $U(1)$ параметризуется углом φ , взятым из интервала $[0, 2\pi]$. Эта группа абелева: все ее элементы коммутируют¹. Примером неабелевой группы является $SU(2)$. Ее элементы представляются матрицами 2×2 с комплексными числами, поэтому каждая матрица определяется восемью комплексными числами. Из условия унитарности следуют четыре уравнения, связывающие матричные элементы. Единичность определителя является еще одним условием. В итоге остается три независимых числа, которыми параметризуются элементы группы $SU(2)$, и произвольный элемент можно записать в виде

$$g = \exp \left(i \sum_{a=1}^3 \tau_a \theta_a \right), \quad (7.1)$$

где τ_a – матрицы Паули.

Группа $SU(3)$ действует в пространстве размерности 3 (физическая реализация – цветовая симметрия, где вектор состояния трехкомпонентный, по числу цветов). Вообще группа $SU(N)$ действует в пространстве N -компонентных векторов, и можно показать, что для нее число независимых параметров есть $N^2 - 1$. Следовательно, для $SU(3)$ это число есть 8, поэтому любой элемент группы можно представить в виде

$$g = \exp \left(i \sum_{a=1}^8 T_a \theta_a \right), \quad (7.2)$$

¹В самом деле, результат последовательных преобразований поворота относительно одной и той же оси, очевидно, не зависит от порядка, в котором они производятся. Этого нельзя сказать, если повороты производятся вокруг разных осей.

где T_a – генераторы группы, определенные в разделе 6.2.

В общем случае элемент группы $SU(N)$ представим так:

$$g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = \exp \left(i \sum_{a=1}^n T_a \theta_a \right), \quad (7.3)$$

где T_a – генераторы группы, число которых $n = N^2 - 1$.

Таким образом, бесконечное множество всевозможных элементов непрерывной группы может быть задано конечным числом генераторов. В частности, для группы $SU(5)$, характеризующей объединение всех трех фундаментальных взаимодействий, число генераторов равно 24. Забегая вперед, отметим, что это означает наличие 24 калибровочных полей, которые должны входить в теорию Великого объединения.

Можно показать, что законы группового умножения требуют выполнения следующих соотношений для генераторов

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^n f_{abc} T_c, \quad (7.4)$$

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0. \quad (7.5)$$

Последнее соотношение есть просто алгебраическое тождество Якоби. Величины f_{abc} называются структурными константами группы Ли. Из соотношений (7.4) и (7.5) вытекают следующие соотношения для структурных констант

$$f_{abc} = -f_{bac}, \quad (7.6)$$

$$\sum_{l=1}^n (f_{abl} f_{lcd} + f_{bcl} f_{lad} + f_{cal} f_{lbd}) = 0. \quad (7.7)$$

Структурные константы полностью задают группу Ли. Наиболее простой вид алгебра Ли имеет для абелевой группы. В

этом случае, очевидно, все структурные константы равны нулю.

Алгебра Ли группы $SU(2)$ задается перестановочными соотношениями ее генераторов. В качестве таковых в выражении (7.1) были взяты матрицы Паули, для которых условие (7.4) принимает вид

$$[\tau_a, \tau_b] = i \sum_{c=1}^3 \varepsilon_{abc} \tau_c, \quad (7.8)$$

так что структурными константами для нее являются компоненты единичного антисимметричного тензора Леви–Чивиты.

7.1.2. Принцип калибровочной инвариантности

В главах по электромагнитному, слабому, электрослабому и сильному взаимодействиям было показано, что наиболее успешным подходом к изучению фундаментальных взаимодействий является выяснение их симметрии, что в итоге приводит к принципу локальной калибровочной инвариантности.

В настоящем параграфе подведем итоги рассмотренному выше и приведем общие принципы построения калибровочно инвариантных теорий независимо от того, какие взаимодействия при этом имеются в виду. Общие идеи во всех этих теориях одинаковы: для того чтобы физическая система была инвариантна относительно некоторого локального калибровочного преобразования, необходимо вводить калибровочные компенсирующие поля, обеспечивающие эту инвариантность.

Унитарные операторы, производящие соответствующие преобразования, имеют вид

$$U = e^{iT_a \theta_a(x)}. \quad (7.9)$$

Количество генераторов T_a определяется группой симметрии. Все генераторы удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.4) и тождеству (7.5). Волновая функция преобразуется по правилу

$$\psi'(x) = e^{iT_a \theta_a(x)} \psi(x). \quad (7.10)$$

Ковариантная ("длинная") производная записывается в виде

$$D_\mu = \partial_\mu - i g A_\mu(x), \quad (7.11)$$

где

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T_a, \quad (7.12)$$

и по двойному индексу идет сумма по всем калибровочным полям (в случае дираковской частицы – это электромагнитное поле, для слабых взаимодействий – поля W- и Z- бозонов, для сильных взаимодействий – поля 8 глюонов).

Калибровочно инвариантный лагранжиан конструируется исходя из требования, чтобы и D_μ , и напряженности компенсирующих полей $G_{\mu\nu}^a$ имели одинаковые трансформационные свойства относительно преобразований симметрии:

$$D'_\mu = e^{iT_a \theta_a(x)} D_\mu e^{-iT_a \theta_a(x)}, \quad (7.13)$$

$$G'_{\mu\nu} = e^{iT_a \theta_a(x)} G_{\mu\nu} e^{-iT_a \theta_a(x)}. \quad (7.14)$$

Для иллюстрации того, как работает эта схема, приведем уже рассмотренный ранее пример лагранжиана теории сильного взаимодействия. Калибровочно инвариантный лагранжиан имеет вид

$$L = -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi} (i\gamma_\mu D_\mu - M) \psi. \quad (7.15)$$

Первый член описывает лагранжиан калибровочного поля с тензором напряженности

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (7.16)$$

Таким образом, лагранжиан (7.15) содержит удлиненные (ковариантные) производные D_μ и нелинейные добавки в тензоре напряженности полей. Именно они обеспечивают инвариантность лагранжиана.

В случае неабелевой группы симметрии калибровочные поля были впервые введены Янгом и Миллсом (для группы $SU(2)$), поэтому такие поля называют полями Янга–Миллса. Рассмотренные в предыдущих главах компенсирующие поля в теории слабых (группа $SU(2)$) и сильных (группа $SU(3)$) взаимодействий являются полями Янга–Миллса.

Построенные таким образом калибровочно инвариантные лагранжианы для каждого типа взаимодействий приведены в соответствующих главах. Применение этих лагранжианов в общем формализме S-матрицы позволяет получать конкретные результаты, о которых рассказано выше. Они составляют так называемую стандартную модель.

7.1.3. Стандартная модель

Основные положения стандартной модели следующие.

Слабое и электромагнитное взаимодействия объединяются в электрослабое взаимодействие, калибровочная группа которого

$$SU(2) \otimes U(1). \quad (7.17)$$

При высоких энергиях эта симметрия проявляется в ненарушенном виде. $W^\pm$ - и Z^0 -бозоны приобретают массы только

тогда, когда энергия становится ниже определенного порога (~ 100 ГэВ); фотоны при этом остаются безмассовыми. Слабое и электромагнитное взаимодействия становятся различными только при меньших энергиях.

Цветовому взаимодействию в КХД соответствует ненарушенная $SU(3)$ -калибровочная симметрия. Цветовые взаимодействия ограничены только кварковым сектором. Поэтому генераторы группы $SU(3)$ коммутируют с генераторами группы $SU(2) \otimes U(1)$.

Итак, в основе стандартной модели лежит прямое произведение групп

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1). \quad (7.18)$$

В стандартной модели фермионы разделены на 3 поколения (или семейства). Их образуют "верхние" кварки u, c, t с электрическим зарядом $Q = 2/3$ и тремя видами цветовых зарядов ($f = R, G, B$). Другое семейство образуют "нижние" кварки d, s, b с зарядом $Q = -1/3$, которые также несут цвет и могут образовывать состояния суперпозиции d', s', b' :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = U_{KM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

где U_{KM} – матрица *Кобаяши–Маскавы*

$$U_{KM} = \begin{pmatrix} u_{ud} & u_{us} & u_{ub} \\ u_{cd} & u_{cs} & u_{cb} \\ u_{td} & u_{ts} & u_{tb} \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Элементы этой матрицы выражаются через некоторые углы (в частности углы Эйлера). Мы уже встречались с элементами

этой матрицы в случае суперпозиции только двух кварков d и s , которые связывал угол Каббибо θ_c :

$$\begin{aligned} d' &= \cos \theta_c d + \sin \theta_c s, \\ s' &= -\sin \theta_c d + \cos \theta_c s. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Поскольку кварки участвуют и в слабых взаимодействиях, "левые" частицы (их спин антипараллелен импульсу) собраны в дублеты, "правые" частицы (со спином, параллельным импульсу) образуют синглеты:

$$(u_f)_R, (d_f)_R, (c_f)_R, (s_f)_R, (t_f)_R, (b_f)_R, (e^-)_R, (\mu^-)_R, (\tau^-)_R; \quad (7.22)$$

$$\begin{pmatrix} u_f \\ d'_f \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c_f \\ s'_f \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t_f \\ b'_f \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L. \quad (7.23)$$

Лептоны представлены здесь только экспериментально наблюдаемыми состояниями, поэтому в этой совокупности частиц отсутствуют правое нейтрино и левое антинейтрино.

Важная задача современной физики состоит в определении следующих свободных параметров стандартной модели: константы связи — e , g_s , $\sin \theta_W$; массы бозонов — m_W , m_B ; массы лептонов — m_e , m_μ , m_τ ; массы кварков — m_u , m_d , m_s , m_c , m_t , m_b ; параметры Кобаяши–Масакавы u_{KM} — три угла θ_i и фаза δ . Через перечисленные величины можно выразить m_Z , g и g' . Нейтрино предполагается безмассовым.

В основе стандартной модели лежат следующие базисные положения:

- Не существует переходов между лептонами и кварками, лептонами и антилептонами, кварками и антикварками.

Эти утверждения выражаются в законах сохранения барионного заряда B и лептонного заряда L .

- Каждое поколение содержит только известные экспериментально левые нейтрино и правые антинейтрино. Нейтрино – безмассовые частицы.
- Слабое взаимодействие чисто "левополяризованное", что нарушает закон сохранения четности; слабые токи имеют (V-A)-структуру.
- Константы связи g , g' и g_s – свободные параметры.
- Заряд протона в точности равен заряду позитрона, хотя лептонный и кварковый секторы не связаны между собой.

Стандартная модель предсказывает:

- Стабильность протона.
- Запрет безнейтринного двойного β -распада.

7.2. Объединение электрослабых и сильных взаимодействий

7.2.1. Асимптотическое поведение констант связи

Идея построения единой теории взаимодействий занимала физиков с начала XX в. начиная с Эйнштейна. Однако первые попытки оказались неудачными, было еще "рано", так как отсутствовал необходимый экспериментальный материал, да и сам аппарат теоретической физики был развит недостаточно.

Наиболее перспективным оказался путь поисков симметрии и калибровочной инвариантности основных уравнений и соотношений. Основная идея большого объединения состоит в том,

что сильное, слабое и электромагнитное взаимодействия представляют собой различные проявления одного фундаментального взаимодействия, характеризуемого одной безразмерной константой связи $\alpha_{\text{объед}}$ и определенной симметрией. Изложенная выше стандартная модель дает общее описание электрослабых и сильных взаимодействий, но не объединяет все три взаимодействия, так как для этого необходимо, чтобы три различные константы связи были получены из единственной фундаментальной константы. Для этого группа симметрии G новой теории должна включать в себя прямое произведение:

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \in G \quad (7.24)$$

и быть простой, т.е. неразложимой на некоммутирующие компоненты (в стандартной модели $SU(3)$ и $SU(2) \otimes U(1)$ взаимно независимы и коммутируют друг с другом).

Теперь обратимся к константам связи рассматриваемых трех взаимодействий. Как обсуждалось выше, вакуумные процессы, т.е. флуктуации полей и связанная с ними поляризация вакуума, приводят к экранированию зарядов, являющихся источниками этих полей.

В КЭД поляризация вакуума возникает вследствие взаимодействия фотонов с виртуальными $e^+ e^-$ -парами, которые всегда присутствуют в вакууме; при этом вакуум реагирует так же, как диэлектрик, – ”затравочный” заряд оказывается окруженным поляризационным зарядом противоположного знака, т.е. уменьшается с увеличением расстояния от него. Пробный заряд будет воспринимать величину этого эффективного заряда в зависимости от расстояния до него: эффективный заряд будет возрастать по мере приближения к нему в результате

ослабления эффекта экранировки, что будет происходить на очень малых расстояниях, т.е. при больших импульсах и очень высоких энергиях.

В случае КХД происходит антиэкранирование, т.е. эффективный цветовой заряд растет с увеличением расстояния до него. Это происходит вследствие того, что переносчики цветового взаимодействия – глюоны – несут цветовой заряд и, следовательно, сами могут служить источниками поля. Аналогичная ситуация, хотя и в меньшей мере, появляется и в слабых взаимодействиях, так как переносчики этих взаимодействий – W - и Z -бозоны – также несут слабый заряд.

В калибровочных теориях зависимость эффективной константы связи от квадрата модуля 4-импульса Q^2 задается уравнением

$$\frac{dg^2(Q^2)}{d(\ln Q^2)} = b g^4(Q^2) + O(g^6), \quad (7.25)$$

где

$$b = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11}{3}C - \frac{4}{3}T \right). \quad (7.26)$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\frac{1}{g^2(Q^2)} = \frac{1}{g^2(Q_0^2)} + b \ln \frac{Q_0^2}{Q^2}, \quad (7.27)$$

где Q_0 – произвольная точка отсчета. Параметры C и T зависят от калибровочной группы и состава частиц в мультиплете. Но уже из (7.25) видно, что если $b < 0$, то эффективный заряд с ростом энергии (уменьшением расстояния) будет уменьшаться (антиэкранировка), а при $b > 0$ – увеличиваться (экранировка). Первый случай реализуется для сильных и

слабых взаимодействий, второй – для электромагнитного. В предыдущей главе эта зависимость для сильных взаимодействий представлена формулой (6.47).

Введем безразмерные константы, характеризующие три типа взаимодействия

$\alpha_s = \frac{g_s^2}{\hbar c}$ – эффективная константа сильного взаимодействия;

$\alpha_W = \frac{g^2}{\hbar c}$ – эффективная константа слабого взаимодействия;

$\alpha_e = \frac{e^2}{\hbar c}$ – эффективная константа электромагнитного взаимодействия.

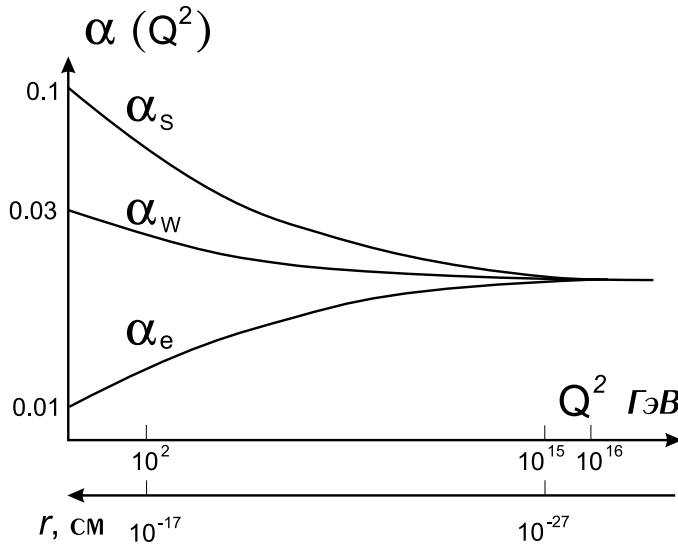


Рис. 7.1. Зависимость безразмерных констант связи α от энергии

Зависимость этих констант от энергии (или от обратного расстояния) представлена на рис. 7.1. Эти кривые получены на основе уравнений (7.25)–(7.27) для экстраполяции экспериментально известных зависимостей констант связи при низких энергиях в область вы-

соких энергий. Видно, что функции $\alpha_s(Q^2)$, $\alpha_W(Q^2)$ и $\alpha_e(Q^2)$ действительно сближаются и, наконец, в области $Q^2 \sim 10^{15} - 10^{16}$ ГэВ сливаются. Это служит важным доказательством существования единого взаимодействия. Точку, соответствующую $Q^2 \sim 10^{15}$, можно назвать m_X – массой объединения ($Q^2 = m_X^2$), или температурой объединения, $T_X \sim m_X$ (все величины даны в ГэВ), характерные расстояния при этом $r \sim 1/m_X$. Однако энергия объединения, при ко-

торой происходит переход от ненарушенной $SU(3)$ симметрии сильных взаимодействий к спонтанно нарушенной симметрии, лежит в области $10^{15} - 10^{16}$ ГэВ, т.е. далеко за пределами возможностей земных ускорительных установок.

7.2.2. Обобщенная $SU(5)$ -симметрия и структура мультиплетов

Слияние всех констант при высоких энергиях позволяет думать, что введенные ранее изотопические дублеты – три кварковых и три лептонных:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}, \quad (7.28)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix},$$

образуют три поколения мультиплетов, в каждый из которых входят и кварки, и лептоны

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \\ \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \\ \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \\ \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (7.29)$$

Отсюда следует, что кварки и лептоны, входящие в один мультиплет, могут переходить друг в друга. Такие переходы должны осуществляться посредством бозонов, которым было дано название X и Y (как мы увидим ниже, для возможных совместимых с законами сохранения заряда переходов между кварками и лептонами необходимо существование двух типов бозонов с электрическими зарядами $Q_X = 4/3$ и $Q_Y = 1/3$).

Теперь обратимся к симметрии этого единого взаимодействия. Простейшей реализацией этой модели, согласно требованию (7.24), является $SU(5)$ -модель, поскольку

$$SU(5) = SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1), \quad (7.30)$$

и группа $SU(5)$ уже не может быть разложена на некоммутирующие независимые части.

Модели Великого объединения имеют общее название GUT-модели (от англ. Great Unification Theory). Группа $SU(5)$ – наименьшая приемлемая в данном случае простая группа. Она имеет два неприводимых представления: пентуплет и декуплет. В них надо разместить следующие фермионы (рассмотрим пока лишь первое поколение): $u_G, u_R, u_B, d_G, d_R, d_B, e^-, e^+, \nu_e$ и их античастицы, и учесть, что каждый кварк может быть ”правым” и ”левым”; то же относится и к электрону. Только нейтрино – ”левое”, а антинейтрино – ”правое”. Размещение частиц по мультиплетам происходит по следующим правилам: в них должны входить либо только левые, либо только правые частицы; суммарный электронный заряд мультиплета должен быть равен нулю (суммарный заряд – это по существу суммарная z -проекция изотопического спина, которая вследствие общего вывода теории углового момента, в частности и спина, равна сумме магнитных квантовых чисел мультиплета, т.е. нулю). Ниже приведены примеры ”левых” мультиплетов:

$$(5)_L = \begin{pmatrix} \tilde{d}_R \\ \tilde{d}_B \\ \tilde{d}_G \\ e^- \\ \nu \end{pmatrix}_L, \quad (10)_L = \begin{pmatrix} 0 & u_R & -\tilde{u}_B & -u_G & -d_G \\ -\tilde{u}_R & 0 & \tilde{u}_G & -u_B & -d_B \\ \tilde{u}_B & -\tilde{u}_G & 0 & -u_R & -d_R \\ u_G & u_B & u_R & 0 & -e^+ \\ d_G & d_B & d_R & e^+ & 0 \end{pmatrix}_L. \quad (7.31)$$

Правые мультиплеты строятся аналогично, но в отличие от левых производится операция зарядового сопряжения, т.е. все

частицы заменены на античастицы и наоборот:

$$(5)_R = \begin{pmatrix} d_R \\ d_B \\ d_G \\ e^+ \\ \tilde{\nu} \end{pmatrix}_R, \quad (10)_R = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{u}_R & -u_B & -\tilde{u}_G & -\tilde{d}_G \\ -u_R & 0 & u_G & -\tilde{u}_B & -\tilde{d}_B \\ u_B & -u_G & 0 & -\tilde{u}_R & -\tilde{d}_R \\ \tilde{u}_G & \tilde{u}_B & \tilde{u}_R & 0 & -e^- \\ \tilde{d}_G & \tilde{d}_B & \tilde{d}_R & e^- & 0 \end{pmatrix}_R. \quad (7.32)$$

Следующие два поколения размещаются аналогично. Эти пен-туплет и декуплет являются базисами неприводимых представлений группы $SU(5)$.

Преобразования симметрии группы $SU(5)$ заключаются во всевозможных поворотах в пространстве пяти состояний. Поскольку требуется, чтобы симметрия была локальной, то все частицы должны переходить друг в друга с излучением или поглощением безмассового калибровочного бозона. Подсчитаем, сколько должно быть калибровочных бозонов.

Например, антикварк $\tilde{d}_R$ может превратиться в антикварк $\tilde{d}_B$, испустив глюон; электрон e^- превращается в электронное нейтрино ν_e , испустив W -бозон; антикварк $\tilde{d}_R$ может перейти в электрон e^- , испустив сверхтяжелый бозон $X_R^{4/3}$, а антикварк $\tilde{d}_i$ ($i = R, B, G$) – в электронное нейтрино ν_e с испусканием бозона $Y_i^{1/3}$. Перебрав таким образом все переходы, придем к выводу, что модель содержит 24 калибровочных поля: фотон, восемь глюонов, соответствующих переходам между кварками различных цветов, $W^\pm$ -бозоны и Z^0 -бозон, соответствующие переходам трех цветных кварков в нейтрино и обратно, и, наконец, шесть $X_i^{4/3}$ -бозонов, осуществляющих переходы кварков в электрон.

Теперь обсудим, как приобретают массу эти калибровочные бозоны. Пока температура выше $T_X \sim m_X$ (а такая ситуа-

ция реализуется в ранней Вселенной), в единице объема содержится $T_X^3 \sim m_X^3$ частиц, и, следовательно, среднее расстояние между частицами $\bar{r}$ меньше, чем $1/m_X$. При этом все три взаимодействия характеризуются единой константой связи $\alpha_{\text{объед}} = \alpha_s = \alpha_X = \alpha_e$, которая зависит от расстояния между частицами, т.е. от их энергии и температуры. Все фермионы и калибровочные бозоны при $T > T_X$ являются безмассовыми. При достижении температуры T_X хиггсовские поля, нейтральные по всем зарядам, "конденсируются" подобно водяным капелькам в перегретом паре, охлажденном до критической температуры. Происходит фазовый переход, образуется новый вакуум. При этом SU(5)-симметрия модели спонтанно нарушается, понижаясь до отдельных симметрий SU(3) – сильного и SU(2)⊗U(1) – электрослабого взаимодействий. Одновременно приобретают массу бозоны X и Y , а единая константа связи расщепляется на α_s и α_X, α_e .

Когда температура падает до $T_X \sim m_X$, происходит второй фазовый переход, образуется конденсат нейтральных хиггсовских полей из пентуплета, симметрия снижается до SU(2) и U(1), и все частицы – $W^\pm, Z^0$, кварки и лептоны – приобретают массу.

7.2.3. Лагранжиан SU(5)-модели

Как можно увидеть из состава пентуплета, возможны переходы *кварк–лептон* с нарушением барионного и лептонного зарядов. Этим переходам будут соответствовать следующие ниже графики.

Процесс

A Feynman diagram representing a particle interaction. On the left, two solid lines with arrows pointing upwards represent incoming u -quarks. These lines meet at a vertex. From this vertex, a wavy line representing an $X^{4/3}$ boson extends to the right. At a second vertex, this boson decays into two particles: an anti- d quark ($\tilde{d}$) and a positron (e^+). The $\tilde{d}$ quark is represented by a solid line with an arrow pointing downwards, and the e^+ is represented by a solid line with an arrow pointing upwards.

(7.33)

описывает взаимодействие двух u -кварков, при котором испускается $X^{4/3}$ -бозон, распадающийся на антикварк $\tilde{d}$ и позитрон. В другом процессе

A Feynman diagram representing a particle interaction. On the left, two solid lines with arrows pointing upwards represent incoming particles: a u -quark and a d -quark. These lines meet at a vertex. From this vertex, a wavy line representing a $Y^{1/3}$ boson extends to the right. At a second vertex, this boson decays into two particles: an anti- u quark ($\tilde{u}$) and a positron (e^+). The $\tilde{u}$ quark is represented by a solid line with an arrow pointing downwards, and the e^+ is represented by a solid line with an arrow pointing upwards.

(7.34)

взаимодействуют u - и d -кварки, в результате испускается $Y^{1/3}$ -бозон, который затем распадается на антикварк $\tilde{u}$ и позитрон. При взаимодействии u - и d -кварков возможны процессы, при которых испускается $Y^{1/3}$ -бозон, который распадается на антикварк $\tilde{d}$ и электронное антинейтрино $\tilde{\nu}_e$:

A Feynman diagram representing a particle interaction. On the left, two solid lines with arrows pointing upwards represent incoming particles: a u -quark and a d -quark. These lines meet at a vertex. From this vertex, a wavy line representing a $Y^{1/3}$ boson extends to the right. At a second vertex, this boson decays into two particles: an anti- d quark ($\tilde{d}$) and an electron antineutrino ($\tilde{\nu}_e$). The $\tilde{d}$ quark is represented by a solid line with an arrow pointing downwards, and the $\tilde{\nu}_e$ is represented by a solid line with an arrow pointing upwards.

(7.35)

7.2.4. Распад протона

Одно из важных предсказаний $SU(5)$ -модели – распад протона. Такой процесс может идти, например, по каналу $p \rightarrow e^+ \pi^0$. Действительно, в результате взаимодействия кварков внутри протона возможны следующие варианты:

$$P \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow u \\ u \longrightarrow \tilde{u} \\ d \longrightarrow e^+ \end{array} \right\} \pi^0 \quad . \quad (7.36)$$

Здесь u -кварк превращается в антикварк $\tilde{u}$, испуская $X^{4/3}$ -бозон; d -кварк, поглощая этот бозон, превращается в позитрон e^+ . Кварки u и $\tilde{u}$ образуют мезон π^0 . Возможен другой процесс:

$$P \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow u \\ d \longrightarrow \tilde{u} \\ u \longrightarrow e^+ \end{array} \right\} \pi^0 \quad . \quad (7.37)$$

Здесь d -кварк испускает $Y^{1/3}$ -бозон и превращается в антикварк $\tilde{u}$; u -кварк, поглощая $Y^{1/3}$ -бозон, становится позитроном. Возможен и такой вариант:

$$P \left\{ \begin{array}{l} d \longrightarrow d \\ u \longrightarrow \tilde{d} \\ u \longrightarrow e^+ \end{array} \right\} \pi^0 \quad . \quad (7.38)$$

В этом случае два u -кварка распадаются на антикварк $\tilde{d}$ и позитрон, возникает $X^{4/3}$ -бозон и опять образуется π^0 -мезон.

Наконец, возможен процесс с испусканием $Y^{1/3}$ -бозона:

$$P \left\{ \begin{array}{l} u \longrightarrow u \\ d \longrightarrow \tilde{u} \\ u \longrightarrow e^+ \end{array} \right\} \pi^0 \quad (7.39)$$

Вычисление вероятностей данных процессов при не слишком высоких энергиях может быть проведено так же, как и в случае теории Ферми β -распада для 4-фермионного взаимодействия. Это взаимодействие ток-ток с лагранжианом:

$$L_{GUT} = \frac{4}{\sqrt{2}} g_{GUT} \left\{ \left(\bar{u}_L \gamma_\mu u_L \right) \left(\bar{e}_L^+ \gamma_\mu d_L \right) + \right. \quad (7.40)$$

$$\left. + \left(\bar{u}_L \gamma_\mu u_L \right) \left(\bar{e}_R^+ \gamma_\mu d_R \right) + \left(\bar{u}_L \gamma_\mu u_L \right) \left(\bar{\nu}_L \gamma_\mu d_R \right) + \text{э.с.} \right\}.$$

Здесь первое слагаемое соответствует графику (7.34) для левого дублета, второе – графику (7.34) для правого дублета, третье слагаемое описывает диаграммы типа (7.35) и т.д.

Аналогично теории электрослабого взаимодействия, учитывая промежуточные бозоны, введем константу связи g_5 , которая связана с константой g_{GUT} так же, как константа Ферми с константой слабого взаимодействия g :

$$\frac{g_{GUT}}{\sqrt{2}} = \frac{g_5^2}{8m_X} = \frac{g_5^2}{8m_Y}. \quad (7.41)$$

Из-за большой массы $m_X c^2 \sim 10^{15}$ ГэВ взаимодействие, переносимое виртуальным бозоном, очень короткодействующее:

$$R \sim \frac{\hbar}{m_X c} \sim 10^{-29} \text{ см}. \quad (7.42)$$

Так как размер нуклона порядка 10^{-13} см, кварки на таких расстояниях друг от друга, как 10^{-29} см будут находиться

исключительно редко. Поэтому рассмотренные выше процессы должны происходить с очень малой вероятностью. Оценка этой вероятности получается так же, как и в теории электро-слабого взаимодействия: между токами появляются пропагаторы X - и Y -бозонов, которые и дают основной вклад в амплитуду соответствующего процесса:

$$A \sim \frac{1}{q^2 c^2 - m_X^2 c^4}. \quad (7.43)$$

Поскольку переданный импульс q мал по сравнению с массой калибровочных бозонов, то можно считать, что

$$A \sim \frac{1}{m_X^2 c^4}. \quad (7.44)$$

Если ввести безразмерную константу

$$\alpha_5 = \frac{g_5^2}{4\pi \hbar c \varepsilon_0}, \quad (7.45)$$

(ε_0 – так называемая диэлектрическая проницаемость вакуума), то амплитуда a будет иметь вид

$$A \sim \frac{\alpha_5}{m_X^2 c^4}, \quad (7.46)$$

что фактически совпадает с эффективной константой (7.41), поскольку вероятность интересующего нас процесса пропорциональна A^2 (сечение процесса рождения и распада промежуточного X - или Y -бозона). При этом ширину распада Γ можно получить из соображений размерности: Γ должна иметь размерность энергии и быть пропорциональна вероятности A^2 . Если в качестве энергетического масштаба взять массу покоя протона, то приходится считать, что Γ выражается так:

$$\Gamma \sim \alpha_5^2 \frac{m_p^5 c^2}{m_X^4}. \quad (7.47)$$

Из соотношения неопределенности для энергии и времени $\Gamma \cdot \tau \sim \hbar$, где τ – время жизни, получаем выражение для времени жизни протона:

$$\tau_p = \frac{\hbar}{\Gamma} \sim \hbar \frac{m_X^4}{\alpha_5^2 m_p^5 c^2}. \quad (7.48)$$

Учитывая, что $\alpha_5(m_X^2) = 0.024$ и $m_X c^2 \sim 10^{15}$ ГэВ, получаем $\tau_p = 5.3 \cdot 10^{30 \pm 1.4}$ лет.

7.2.5. Основные положения и предсказания SU(5)-модели

Перечислим их:

- Модель содержит только два известных экспериментально нейтрино: ν_L и $\tilde{\nu}_R$.
- Должно быть точное равенство зарядов протона и позитрона, так как они принадлежат к одному и тому же мультиплету.
- Электрический заряд $\tilde{d}$ кварка должен быть равен $1/3$, так как суммарный электрический заряд пентуплета должен быть равен нулю.
- Барионный заряд B и лептонный заряд L по отдельности не сохраняются, однако сохраняется их разность $B - L$.
- Константы связи g_e , g_w , g_s могут быть получены из универсальной константы связи g_5 .
- В точке объединения модель предсказывает значение для угла Вайнберга:

$$\sin \theta_W = \frac{3}{8} = 0.375. \quad (7.49)$$

- Одно из основных предсказаний модели – распад протона. Среднее время жизни протона $\tau_p = 5.3 \cdot 10^{30 \pm 1.4}$ лет.

7.3. Модели, выходящие за пределы SU(5)

7.3.1. Недостаточность SU(5)-модели. Модель SO(10)

Минимальная SU(5)-модель устанавливает верхний предел времени жизни протона для канала распада $p \rightarrow e^+ \pi^0$: $\tau_p < 8 \cdot 10^{30}$ лет, в то время как экспериментально установленное ограничение составляет $\tau_p > 10^{32}$ лет. Однако кроме этого факта, имеются и "идеологические" мотивы для модернизации модели: размещение фермионов не в одном, а в двух мультиплетах; введение трех параллельных семейств мультиплетов; для приобретения масс кварками и лептонами приходится вводить взаимодействие между мультиплетами фермионов и хиггсовских бозонов со специально подобранными константами.

Исследования и расчеты показывают, что достаточно незначительного расширения состава модели, чтобы увеличить время жизни протона до 10^{33} и даже до 10^{34} лет. Например, калибровочная группа SO(10) является другим кандидатом на роль GUT-симметрии:

$$G = \text{SO}(10); \quad \text{SU}(5) \in \text{SO}(10); \quad (7.50)$$

SO(10) – простая группа, содержащая SU(5) в качестве подгруппы. В этой модели содержатся дополнительные бозоны (в SU(5) их 24), которые приводят к преобразованию элементов из пентуплета $(5)_L$ в элементы декуплета $(10)_L$ и обратно. Все фермионы в этой модели принадлежат одному мультиплету.

Таблица 7.1. Состав частиц SO(10)-мультиплета

ν_L	$\tilde{d}_G$	$\tilde{d}_R$	$\tilde{d}_B$	u_B	u_R	u_G	e^+
e^-	$\tilde{u}_G$	$\tilde{u}_R$	$\tilde{u}_B$	d_B	d_R	d_G	$\tilde{\nu}_L$

Это – 16-плет, в которой входят пять элементов пентуплета, 10 – декуплета и добавлен еще один элемент, который идентифицируется с правым партнером – известным экспериментально левым нейтрино (табл. 7.1). Поскольку мультиплет чисто левый, в него входит ”левое” антинейтрино, т.е. античастица ”правого” нейтрино. Правое нейтрино не принимает участия ни в одном из SU(5)-взаимодействий, но участвует в еще более слабом взаимодействии, осуществляемом новыми SO(10)-бозонами. Эти правые $W_R^\pm$ -бозоны должны быть очень тяжелыми. Из анализа различных экспериментов (двойной безнейтринный β -распад, анализ $K^0 \tilde{K}^0$ -систем, взрывы сверхновых) для них получена оценка

$$m_{W_R} \geq 23 \text{ ТэВ}/c^2. \quad (7.51)$$

Таким образом, SO(10) является лево-право – симметричной моделью; она содержит механизмы, которые приводят к нарушению не только лептонного заряда L и барионного B , но и их разности (напомним, что в SU(5)-модели $B - L$ сохраняется). Именно последнее делает возможным безнейтринный двойной β -распад. Время жизни протона увеличивается за счет появления дополнительных переходов из пентуплета в декуплет, не приводящих к изменению барионного числа, что в целом уменьшает вклад переходов с изменением этого числа, т.е. приводящих к распаду протона.

7.3.2. Суперсимметрия (SUSY)

При построении моделей Великого объединения необходимо соблюдать следующий принцип: в качестве низкоэнергетического предела должны естественно и правильно следовать уже известные изученные модели, т.е. $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$.

На данном этапе оказалось "неохваченным" гравитационное взаимодействие. Оправданием этого может служить то обстоятельство, что в обычных условиях гравитационное взаимодействие исключительно слабое. В случае нерелятивистских частиц энергия гравитационного притяжения двух частиц определяется формулой Ньютона:

$$U(r) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (7.52)$$

где G_N – гравитационная постоянная (константа Ньютона), m_1 , m_2 – массы частиц, r – расстояние между ними. В единицах CGS имеем

$$G_N = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}. \quad (7.53)$$

Сравним энергию гравитационного притяжения двух электронов, находящихся друг от друга на расстоянии 1 см, с энергией их кулоновского отталкивания e^2/r и энергией слабого взаимодействия между лептонами, характеризуемой константой Ферми G_F :

$$\frac{e^2}{r} \simeq 2.5 \cdot 10^{-19} \text{ эрг}, \quad (7.54)$$

$$\frac{G_N m_e^2}{r} \simeq 6.67 \cdot 10^{-62} \text{ эрг}, \quad (7.55)$$

$$\frac{G_F}{\text{см}^3} \simeq 2.5 \cdot 10^{-19} \text{ эрг}. \quad (7.56)$$

Как видим, гравитационное взаимодействие для медленных (нерелятивистских) частиц на много порядков слабее даже слабого взаимодействия. Однако по мере увеличения энергии потенциальная энергия гравитационного взаимодействия растет как E^2 , поскольку массы частиц растут с энергией линейно. При $E \sim 10^{18}$ ГэВ гравитационное взаимодействие превосходит кулоновское, а при $E \sim 10^{19}$ ГэВ и прицельных расстояниях $r \sim \hbar c/E \simeq 10^{-33}$ см становится по-настоящему сильным.

Поэтому следует ожидать, что при таких энергиях должно произойти объединение перечисленных трех взаимодействий и взаимодействия гравитационного. Это и будет модель Великого объединения, или супергравитации. Объединение гравитации с остальными взаимодействиями порождает особенность, которой не было при объединении трех других. Рассмотренные ранее преобразования симметрии касались только внутренних характеристик (степеней свободы) частиц и не затрагивали их пространственно-временных перемещений. Все преобразования, входящие в группы SU(2), SU(3), SU(5), производятся в пространстве изотопического спина. Естественно, никакими вращениями в изотопическом пространстве нельзя передвинуть частицу из одной пространственной точки в другую.

Гравитация, как известно, связана с пространственно-временными преобразованиями, которые описываются операциями сдвига и вращения в четырехмерном пространстве. В новой теории эти преобразования необходимо объединить с преобразованиями внутренней симметрии так, что-

бы одни переходили в другие. При этом необходимо, чтобы пространственно-временные преобразования не изменяли внутреннего состояния частиц, но некоторая последовательность преобразований внутренней симметрии приводила к смещению частицы в пространстве-времени.

Оказывается, что такой операцией внутренней симметрии является изменение спина частицы. Проиллюстрируем этот факт на простом, известном с детства, примере: мы раскручиваем волчок. Сначала его ось (т.е. вектор момента) практически сохраняет вертикальное положение, но по мере того, как энергия его вращения уменьшается, ось начинает прецессировать, дрожать (нутаия) и, наконец, точка касания волчка с полом начинает перескакивать с места на место. Мы видим, что изменение момента приводит к перемещению в пространстве !

При построении новой модели рассматривается расширенное пространство, или суперпространство, образованное пространственно-временными координатами и компонентой суперспина J_z ; это пространство едино, а не распадается на два не связанных между собой – x, y, z, t и изотопического спина T_z , как в предыдущих моделях. Суперспин J в супермультиплете выполняет ту же роль, что изоспин в мультиплетах предыдущих моделей: его проекции J_z соответствуют частицам с разными спинами, входящим в один супермультиплет, объединяющий как фермионы, так и бозоны. Например, если $J = 1/2$, то проекция $J_z = +1/2$ соответствует фермиону, а $J_z = -1/2$ – бозону. Расчеты показывают, что последовательное применение двух операций изменения спина приводит

к смещению частицы в другую точку пространства.

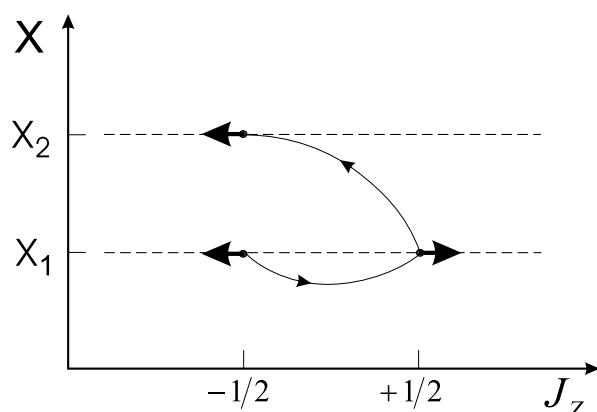


Рис. 7.2. Пространственное смещение частицы в результате двух последовательных операций изменения ее спина

Этот факт можно проиллюстрировать на рис. 7.2. По аналогии с изотопическим спином бозон и фермион можно рассматривать как одну суперчастицу, находящуюся в разных спиновых состояниях: $S = 0$ ($J_z = -1/2$) и $S = 1/2$ ($J_z = +1/2$). Направление суперспина на рисунке показано стрелками, а линии, соединяющие частицы, соответствуют поворотам в пространстве суперспина.

Описанный пример относится к так называемой минимальной $N = 1$ -супергравитации, когда имеется только один оператор, изменяющий спин, а супермультиплеты содержат только два спиновых состояния, отличающихся на $1/2$. Теория супергравитации также строится как локальная калибровочная теория, но вместо каждого поля теперь входит суперполе, содержащее частицы с двумя спинами. Поэтому каждой частице должен соответствовать "партнер" со всеми "старыми" зарядами, но другим спином S (табл. 7.2).

Взаимодействия частиц осуществляются с помощью калибровочных суперполей. Например, электромагнитное взаимодействие происходит за счет обмена фотонным суперполем, состоящим из калибровочного бозона – фотона со спином 1 (векторное поле) и его калибровочного суперпартнера со спином $1/2$ – фотино. Гравитационное поле – это тензорное поле,

Таблица 7.2. SUSY-партнеры частиц

$S = 1$	$S = 1/2$	$S = 0$
Фотон (γ)	Фотино ($\tilde{\gamma}$)	
Глюон (G)	Глюино ($\tilde{G}$)	
W -бозон (W)	Вино ($\tilde{W}$)	
Z^0 -бозон (W)	Зино ($\tilde{Z}$)	
X -бозон (X)	X -бозино ($\tilde{X}$)	
Y -бозон (Y)	Y -бозино ($\tilde{Y}$)	
	Кварки (q)	Скварки ($\tilde{q}$)
	Лептоны (l)	Слептоны ($\tilde{l}$)
	Схиггсы ($\tilde{H}$)	Хиггсы (H)

поэтому его частица – гравитон – имеет спин 2, а суперпартнер гравитона – гравитино – спин $S = 3/2$. Включение этих двух частиц в супермультиплет является предметом модели SUGRA, а конечная цель модели SUGRA – описание всех явлений с массой Планка $m_{\text{Пл}} = 1.2 \cdot 10^{19}$ ГэВ / c^2 в качестве единственного параметра. При энергиях порядка $m_{\text{Пл}}$ и выше все частицы безмассовые, а симметрия точная. При низких энергиях суперсимметрия нарушается, и обнаружить суперпартнеры известных нам частиц не представляется возможным.

Для нарушения суперсимметрии вводят так называемый скрытый сектор, состоящий из суперчастиц, взаимодействующих с наблюдаемым миром частиц только гравитационно. Как и в обычном хиггсовском механизме, голдстино поглощается калибровочным супермультиплетом, в который входит фермионный партнер гравитона – гравитино. Поглощая голдстино, гравитино приобретает массу. В супермультиплете возникает расщепление по массам.

Из-за малости гравитационной константы и слабости гра-

Таблица 7.3. Относительные вероятности распада протона в $SO(5)$ -модели

Мода распада	Относительная вероятность, %	Мода распада	Относительная вероятность, %
$p \rightarrow e^+ \pi^0$	31 – 46	$p \rightarrow e^+ \eta^0$	0 – 8
$p \rightarrow e^+ \rho^0$	2 – 18	$p \rightarrow e^+ \omega^0$	15 – 29
$p \rightarrow \tilde{\nu}_e \pi^+$	11 – 17	$p \rightarrow \tilde{\nu}_e \rho^0$	1 – 7
$p \rightarrow \mu^+ K^0$	1 – 20	$p \rightarrow \tilde{\nu}_\mu K^0$	0 – 1

витационного взаимодействия при низких энергиях наблюдение отдельных гравитонов превращается в очень сложную экспериментальную задачу. Анализ же гравитационного взаимодействия при энергиях порядка $m_{\text{Пл}}$ считается самой сложной проблемой, с которой встречались физики в земных условиях.

7.4. Экспериментальная проверка теории Великого объединения

7.4.1. Исследования распада протона

Важнейшим подтверждением теории Великого объединения является экспериментальное измерение времени жизни протона. Кроме канала распада $p \rightarrow e^+ \pi^0$, рассмотренного в п. 7.2.4, возможны и другие каналы. Сравнительные вероятности распада в $SU(5)$ -модели приведены в табл. 7.3.

Время жизни протона 10^{30} лет соответствует распаду примерно одного протона в течение суток в 1000 т вещества ($5 \cdot 10^{32}$ нуклонов). Для достижения чувствительности к периоду полураспада 10^{33} лет необходимо зарегистрировать в течение года один распад в 3000 т вещества. Поэтому поиск распада протона имеет смысл проводить в течение нескольких лет в объеме сотен или тысяч тонн исследуемого вещества.

Таблица 7.4. Установки по детектированию распада протона

Лаборатория	Глубина, м	Глубина в водном эквиваленте, м	Полная масса, т	Эффективная масса, т	Способ детектирования
Монблан (туннель)	1850	5000	150	113	Железные калориметры
Камиоканде (рудная шахта)	825	2400	3000	1040	Водяные черенковские счетчики
Супер-камиоканде (рудная шахта)	825	2400	50000	22000	То же
Фреджус (туннель)	1780	4850	912	550	Калориметры
КGF (Индия, золотоносная шахта)	2300	7600	140	60	То же
IBM (США, соляная шахта)	600	1600	8000	3300	Черенковские счетчики

Распад нуклона обычно ищут двумя способами. Во-первых, путем косвенного детектирования дочернего ядра, возникающего в результате потери нуклона материнским ядром. Этот метод особенно эффективен, когда дочернее ядро не может образоваться другим способом. Во-вторых, прямое детектирование образующихся при распаде частиц. Например, при распаде $p \rightarrow e^+ \pi^0$ пион распадается на 2 γ -кванта, что приводит к возникновению двух электромагнитных ливней, которые уже могут быть зарегистрированы. Для детектирования используются водяные черенковские счетчики, калориметры.

Необходимо исключить имитирующие процессы, вызванные космическим излучением. Так, атмосферное нейтрино (или ан-

тинейтрино) может при столкновении с протоном вызвать реакцию

$$\tilde{\nu}_e + p \rightarrow N + e^+ + \pi^0. \quad (7.57)$$

Нейтрон при этом можно не заметить, а протон и π^0 -мезон приписать распаду протона. Поэтому для сведения к минимуму побочного влияния космического излучения такие эксперименты проводят глубоко под землей. В табл. 7.4 приведены некоторые установки по детектированию распада протона и их характеристики: глубина, водяной эквивалент, эффективная масса чувствительного объема детектора. Полученные в результате экспериментов нижние границы времени жизни протона в зависимости от канала распада лежат в границах $\tau_p \sim 5 \cdot 10^{31} - 5 \cdot 10^{32}$ лет.

7.4.2. Поиск новых частиц на ускорителях

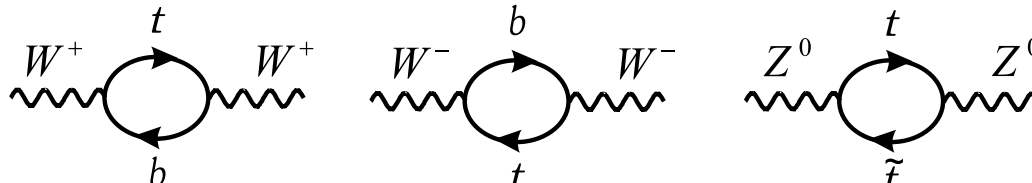
Другое важное направление – физика высоких энергий, когда экспериментальные установки если не зарываются глубоко в землю, то имеют подчас истинно циклопические размеры. В таких ускорителях наблюдаются столкновения частиц, разогнанных до энергий порядка МэВ, ГэВ и даже ТэВ, вызывающих рождение большого числа других частиц. Именно такой способ позволяет наблюдать и находить предсказанные теорией объекты.

Об открытии W - и Z -бозонов рассказано в главе о слабых взаимодействиях. Крупнейшим достижением физики конца XX в. (1994 г.) было открытие на протон-антипротонном коллайдере в Фермиевской национальной лаборатории вблизи Чикаго шестого кварка – t -кварка. Это стало подтверждением

Стандартной модели, в основе которой лежат три поколения лептонов и кварков. До 1994 г. все попытки "родить" и наблюдать распады этой частицы оканчивались неудачами – t -кварк оказался очень тяжелым:

$$m_t = 178 \pm 5 \text{ ГэВ}. \quad (7.58)$$

Такой порядок массы был предсказан теоретически еще в 1993 г. при анализе поправок на уровне долей процента в массы и ширины распадов W - и Z -бозонов. Эти бозоны слишком легки, чтобы распадаться по каналам $W^+ \rightarrow t \bar{b}$, $W^- \rightarrow \bar{t} b$, $Z^0 \rightarrow t \bar{t}$, но виртуальные t -кварки участвуют в подобных процессах:



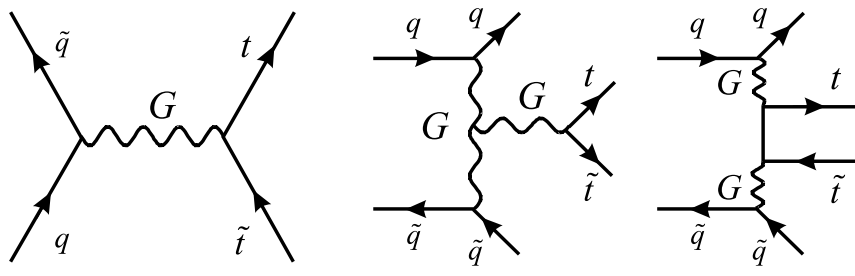
$$, \quad (7.59)$$

что позволяет оценить их массу: $m_t \simeq 160 \pm 20 \text{ ГэВ}$.

В отличие от более легких кварков, t -кварк распадается с испусканием реального W -бозона главным образом по каналам

$$t \rightarrow b + W^+, \quad \bar{t} \rightarrow \bar{b} + W^-. \quad (7.60)$$

Рассмотрим основные диаграммы Фейнмана (7.61), описывающие процессы рождения $t \bar{t}$ -пары на протон-антипротонном коллайдере *Тэватрон*.



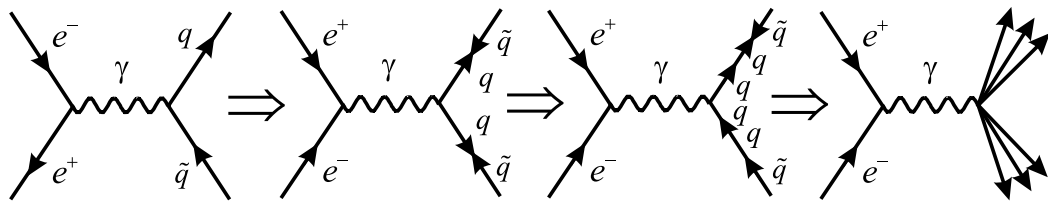
$$a \quad б \quad в \quad (7.61)$$

Диаграмма (а) соответствует кварковой аннигиляции, (б) и (в) – процессам слияния глюонной пары. Времена жизни b -кварка и W -бозона пренебрежимо малы, но b -кварк с каким-либо антикварком из массы адронов и кварков, возникающих при таких столкновениях, образуют B -мезоны и их античастицы:

$$\begin{aligned} B^+ &= \tilde{b}u, & B^0 &= \tilde{b}d, & B_s^0 &= \tilde{b}s, & B_c^+ &= \tilde{b}c, \\ B^- &= b\tilde{u}, & \tilde{B}^0 &= b\tilde{d}, & \tilde{B}_s^0 &= b\tilde{s}, & B_c^- &= b\tilde{c}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

B -мезон живет $\tau_B = 1.6 \cdot 10^{-12}$ с, что соответствует пробегу порядка 0.45 мм, и легко может быть идентифицирован по вторичной вершине, отстоящей от первичной вершины образования пары t -кварков.

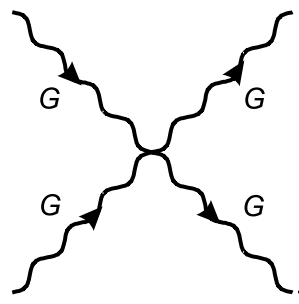
Большой интерес для подтверждения положений квантовой хромодинамики представляет количественное изучение сильных взаимодействий между глюонами и кварками, связанное с экспериментальным исследованием струй адронов. На электрон-позитронных коллайдерах рождаются кварковые адронные струи, у истоков которых стоит рождение пары кварк-антикварк. Разлетаясь, кварк и антикварк высокой энергии генерируют большое число кварк-антикварковых пар, которые впоследствии эволюционируют в адроны. В результате вдоль направления каждого из исходных кварков вылетает сравнительно остро направленный пучок адронов. На диаграммах (7.63) показано образование двух адронных струй при разлете кварка и антикварка в электрон-позитронном столкновении высокой энергии:



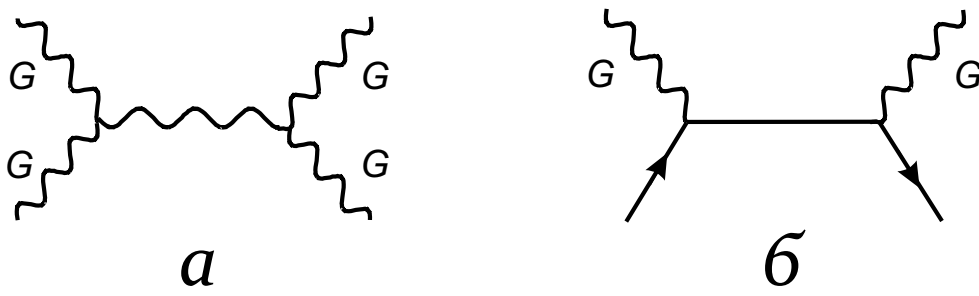
$$(7.63)$$

Иногда один из прародительских кварков может излучить под большим углом высокоэнергетичный глюон, индуцирующий еще одну, глюонную струю. Большой интерес представляет изучение различий между кварковыми и глюонными струями адронов.

На протон-антипротонных коллайдерах глюонные струи рождаются даже чаще, чем кварковые, так как вероятность столкновения глюона с глюоном больше, чем вероятность процессов рассеяния кварка на кварке или кварка на антикварке. Это связано с тем, что глюоны имеют двойные цветовые заряды (красные-антисиние, синие-антизеленые и др.). Изучая образование глюонных струй, можно детально исследовать взаимодействие глюона с глюоном. Очень интересно, в частности, проверить наличие специфического четырехглюонного взаимодействия, существование которого предсказывает квантовая хромодинамика. Этому взаимодействию соответствует график:


(7.64)

Возможны и другие варианты рассеяния глюона на глюоне и глюона на кварке:


(7.65)

Наконец, задачей номер один для физики высоких энергий является поиск, открытие и исследование скалярных бозонов Хиггса, предсказываемых Стандартной моделью. Из экспериментальных масс W - и Z -бозонов можно оценить нижнюю границу массы хиггсовского бозона. Она должна быть порядка $100 \text{ ГэВ} / c^2$. Для рождения такого "хиггса" в протон-протонных столкновениях нужно внести локально энергию порядка 100 ГэВ (в системе центра масс), а реально – еще бóльшую. Поскольку это лишь нижняя граница оценки массы, следует увеличить энергию по крайней мере на порядок. Итак, энергия столкновения протонов должна быть порядка нескольких ТэВ (10^{12} эВ).

Такой протон-протонный коллайдер построен в ЦЕРНе под названием LHC (Large Hadron Collider – большой адронный коллайдер). Энергия пучка в нем должна достигать 7 ТэВ . Есть надежда, что именно в нем будут обнаружены бозоны Хиггса, а также частицы, предсказанные моделью Великого объединения SUSY – суперпартнеры известных нам фермионов и бозонов.

Другие выводы теории суперсимметрии – Великого объединения – анализ процессов, происходящих при энергиях порядка $m_{\text{Пл}} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} / c^2$, не могут быть подвергнуты экспериментальной проверке в земных условиях. Однако в природе есть такая лаборатория, в которой реализуются эти условия ! Это – ранняя Вселенная, о которой пойдет речь в следующей главе.

Глава 8

Космология

8.1. Модели Вселенной

8.1.1. Как строят модель Вселенной

Обычный метод моделирования какого-либо явления – выделение в нем главного, типичного. Ни одна модель не может описать явление полностью, включая все его особенности и свойства. При построении модели Вселенной нас в первую очередь интересует распределение вещества в самых больших масштабах и его движение. С хорошей точностью можно считать, что вещество во Вселенной распределено равномерно; нет и каких-либо выделенных направлений. Таким образом, будем считать, что наша Вселенная однородна и изотропна, а движение вещества определяется силами всемирного тяготения, или гравитацией.

Закон всемирного тяготения, установленный И. Ньютоном, справедлив лишь в сравнительно слабых полях тяготения. Как установил А. Эйнштейн, для сильных полей необходимо применять релятивистскую теорию гравитации – общую теорию относительности (ОТО). Критерий перехода от классических уравнений динамики Ньютона к уравнениям ОТО

прост: гравитационное поле будет сильным, если оно разгоняет падающие в нем тела до скоростей, близких к скорости света. В масштабах Вселенной гравитационное поле достигает огромной величины, и для их описания необходимо использовать ОТО.

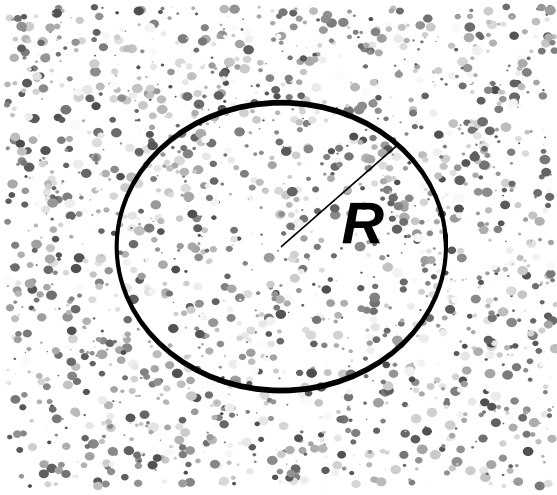


Рис. 8.1. Выделенный шар в однородной Вселенной

Однако способ построения модели Вселенной рассмотрим на более простом примере, используя уравнения Ньютона. На рис.8.1. точками изображено примерное распределение масс во Вселенной. Выделим в этом пространстве некоторый шар с произвольным радиусом R и плотностью ρ . Пусть точки –

это галактики. Находящиеся на граничной сфере галактики будут притягиваться к центру с силой

$$F = \frac{G M}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho R \quad \left(M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \right). \quad (8.1)$$

На галактики, находящиеся внутри шара, суммарная сила тяготения действовать не будет, так как все противоположно направленные силы будут уравновешены, и внутри сферы нет сил тяготения. В этом можно убедиться, выделив внутри сферы произвольного радиуса произвольную точку m и сравнив силы тяготения, действующие на нее с противоположных сторон (рис.8.2).

Отношение площадей S_a и S_b определяются так:

$$\frac{S_a}{S_b} = \frac{r_a^2}{r_b^2}; \quad (8.2)$$

массы, связанные с этими площадками, соответственно равны $M_a = \rho S_a$ и $M_b = \rho S_b$, откуда

$$\frac{M_a}{M_b} = \frac{r_a^2}{r_b^2}. \quad (8.3)$$

Действующие на массу m силы со стороны этих площадок по закону Ньютона равны $F_a = \frac{G M_a m}{r_a^2}$, $F_b = \frac{G M_b m}{r_b^2}$, а их отношение

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{M_a r_b^2}{M_b r_a^2}, \quad (8.4)$$

но, как следует из (8.3),

$$\frac{F_a}{F_b} = 1, \quad F_a = F_b. \quad (8.5)$$

То же можно повторить и для любых двух направлений и любой произвольной точки. Итак, внутри сферы сил тяготения нет. Теперь обратимся ко всему веществу вне шара. Будем последовательно рассмат-

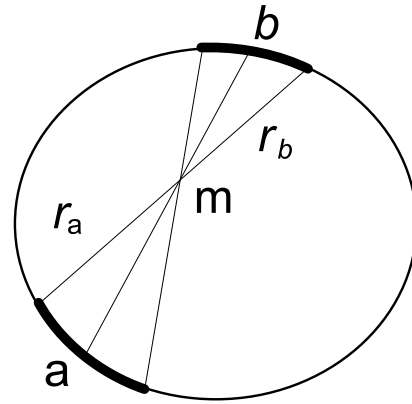


Рис. 8.2. Расчет тяготения внутри сферы

охватывающие шар, все большего радиуса. Но, как только что показано, сферически симметричные слои вещества внутри полости никаких сил не создают, т.е. все остальное вещество во Вселенной ничего не добавляет к силе притяжения к центру шара, которое испытывает частица на его поверхности. К такому же выводу приходим, если использовать уравнения из ОТО.

8.1.2. Модель Эйнштейна и уравнение динамики Вселенной

Возникновение современной космологии связано с созданием релятивистской теории тяготения – ОТО. Из уравнений Эйнштейна следует кривизна пространства-времени и связь кривизны с плотностью масс (энергии). Уравнение динамики ОТО имеет вид

$$a = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) R. \quad (8.6)$$

Здесь a – ускорение галактики, находящейся на границе шара радиусом R и массой $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ по отношению к другой галактике, находящейся в центре шара; p – давление, связанное с движением частиц. Это значит, что любые две галактики, разделенные расстоянием R , имеют относительное ускорение, даваемое формулой (8.6). Знак минус означает притяжение.

Давление P/c^2 много меньше плотности ρ в обычных условиях. Так, даже внутри Солнца, где $\rho \sim 1$ г / см³, $P \sim 10^{16}$ дин / см², и отношение $\frac{P}{c^2 \rho} = \frac{10^{16} \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^2}{9 \cdot 10^2 \text{ см}^4 \text{ с}^2} \sim 10^{-5}$. Таким образом, уравнение динамики (8.6) практически совпадает с уравнением Ньютона:

$$a = -\frac{4}{3}\pi G \rho. \quad (8.7)$$

Система, в которой сила действует только в одном направлении, не может быть стационарной. Но нестационарность Вселенной не устраивала Эйнштейна. Он был уверен в ее стационарности (примем во внимание, что модель была построена в 1917 г., более чем за 10 лет до открытия Хаббла; еще не было надежных доказательств, что галактики – действительно далекие звездные системы, движущиеся с большими

скоростями). Эйнштейн пришел к заключению, что для уравновешивания сил тяготения надо ввести во Вселенной силы отталкивания, природа которых неизвестна. Таким образом,

$$a = a_{\text{тяг}} + a_{\text{отт}}, \quad a_{\text{отт}} = -a_{\text{тяг}}. \quad (8.8)$$

Была введена космологическая постоянная Λ так, что

$$a_{\text{отт}} = \frac{\Lambda c^2}{3} R_M, \quad a = -\frac{4\pi G}{3} \rho R + \frac{\Lambda c^2}{3} R. \quad (8.9)$$

Учитывая (8.8), можно оценить величину Λ . Из условия равновесия

$$\frac{4\pi G}{3} \rho R = \frac{\Lambda c^2}{3} R.$$

Если принять $\rho \sim 10^{-29} \text{ г/см}^3$, что близко к наблюдаемой средней плотности, $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{с}^2)$, получаем:

$$\Lambda = \frac{4\pi G \rho}{c^2} = 10^{-56} \text{ см}^{-2}.$$

Ввиду чрезвычайной малости космологической постоянной силы отталкивания в лабораторных условиях обнаружить не представляется возможным. Даже ускорение, сообщаемое Земле Солнцем, в 10^{22} раз больше $a_{\text{отт}}$ (приняв в формуле (8.9) расстояние от Земли до Солнца $R = 1.5 \cdot 10^{13} \text{ см}$, находим $a_{\text{прит}} \sim 0.5 \text{ см/с}^2$, $a_{\text{отт}} \sim 5 \cdot 10^{-23} \text{ см/с}^2$).

Таким образом, уравнения динамики (8.9) можно решать, пренебрегая $a_{\text{отт}}$, т.е. пользоваться уравнением (8.7). Точное решение этого уравнения дано А.А. Фридманом. Но еще де Ситтер в 1917 г. рассмотрел решение уравнения (8.9) для "пустой" Вселенной, где $\rho = 0$ и существуют лишь предполагаемые силы отталкивания. Как оказалось в последующем, это решение имеет очень глубокий физический смысл, как и сама космологическая постоянная.

8.1.3. Модель "пустой" Вселенной де Ситтера

Голландский астроном де Ситтер построил теорию Вселенной, когда в ней вообще нет вещества, т.е. $\rho = 0$. Уравнение (8.9) теперь переходит в уравнение

$$a = \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} R, \quad (8.10)$$

решить которое просто:

$$R = R_0 \exp \left(\sqrt{\Lambda/3} c t \right). \quad (8.11)$$

Этот результат означает, что если во Вселенной поместить две "пробные" галактики, между которыми нет обычных сил притяжения, а только отрицательная гравитация, описываемая параметром Λ , то они могут приобрести большие скорости удаления друг от друга. К современной Вселенной эта модель не применима, так как Λ -член исчезающе мал по сравнению с обычным тяготением вещества. Ниже мы увидим, что эта модель оказалась очень важной для описания далекого прошлого, когда Вселенная только начала расширяться.

8.1.4. Решение Фридмана и его анализ на примере классического уравнения динамики Ньютона

Если в уравнениях (8.9) и (8.10) пренебречь отрицательной гравитацией, то оно совпадает с уравнением Ньютона (давлением вещества P также пренебрегаем):

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{G M}{R^2}. \quad (8.12)$$

Такое уравнение допускает понижение порядка. Учитывая очевидное тождество $d/dt \equiv R'_t d/dR \equiv v d/dR$, где $v = R'_t$

– скорость, перепишем левую часть уравнения в виде

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dR} = \frac{1}{2} \frac{d}{dR} v^2.$$

Отсюда получаем первый интеграл уравнения (8.12):

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} + A}, \quad (A = \text{const}). \quad (8.13)$$

В зависимости от значения постоянной A , определяемой из начальной скорости, получаются различные зависимости $R(t)$ и, следовательно, различные сценарии движения нестационарной Вселенной. Пусть начальные условия характеризуются параметрами $t = t_0$, $R = R_0$, $v = v_0$. Тогда возможны следующие варианты:

а) $A > 0$. Из (8.13) следует, что

$$v \rightarrow \sqrt{A} \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (8.14)$$

т.е. шар (Вселенная) будет неограниченно расширяться;

б) $A = 0$. Тогда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}}. \quad (8.15)$$

Это вторая космическая скорость, и радиус шара также будет расти со временем неограниченно;

в) $A < 0$. Из (8.13) видно, что с ростом R скорость v достигает максимального значения, а затем уменьшается. Это значит, что при некотором $R = R_{max}$ тяготение начнет сжимать шар и скорость поверхности шара обратится в нуль. В некоторый момент времени $t = t_0$ его радиус станет $R = R_0 = 0$: шар снова сожмется в точку. Шар – Вселенная – будет пульсировать. На рис. 8.3 представлены зависимости $R(t)$ в трех перечисленных случаях.

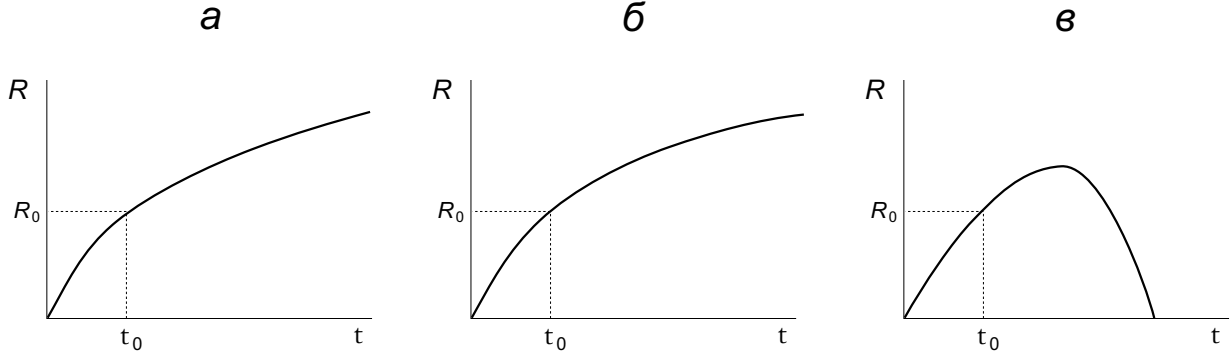


Рис. 8.3. Варианты зависимости радиуса шара R от времени согласно (8.12): а) $A > 0$, б) $A = 0$, в) $A < 0$

Если в (8.14) массу шара выразить через плотность $\rho = M/\frac{4}{3}\pi R^3$, то будет очевидно, что скорость $v \sim R$, или, вводя коэффициент пропорциональности H :

$$V = H \cdot R. \quad (8.16)$$

Если принять для R , ρ и H некоторые значения, например те, которые соответствуют сегодняшнему моменту, можно найти постоянную A . Подставив ρ_0 , $v_0 = H_0 R_0$ в (8.13), получим:

$$A = \frac{8}{3}\pi G R_0^2 \left(\frac{3H_0^2}{8\pi G} - \rho_0 \right). \quad (8.17)$$

Таким образом, знак константы A определяется соотношением плотности ρ_0 и величины $3H_0^2/8\pi G$. Если плотность превышает эту величину, то наша Вселенная – пульсирующая. В противном случае ей предстоит неограниченно расширяться.

8.1.5. Критическая плотность и кривизна Вселенной

Как видно из (8.17), плотность ρ , при которой A обращается в нуль, задает критерий, указывающий, по какому сценарию пойдет эволюция Вселенной. Эта критическая плотность равна

$$\rho_{\text{крит}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (8.18)$$

В том, что постоянная H_0 заменена на H , учтено, что H может зависеть от времени.

Критическую плотность можно еще оценить из следующих простых физических соображений. Гравитационная потенциальная энергия на границе рассматриваемой нами сферы равна

$$\varphi = -\frac{GM}{R} = -\frac{4\pi G\rho R^2}{3}. \quad (8.19)$$

Вместе с тем кинетическая энергия единицы массы

$$K = \frac{v^2}{2} = \frac{H^2 R^2}{2}. \quad (8.20)$$

Отношение потенциальной и кинетической энергий указывает, сможет ли это сферическое образование существовать как единое целое или его вещество начнет разлетаться:

$$\left| \frac{\varphi}{K} \right| = \rho \left(\frac{3H_0^2}{8\pi G} \right)^{-1} = \frac{\rho}{\rho_{\text{крит}}}. \quad (8.21)$$

Отсюда снова следует вывод, который был получен из решения Фридмана: если $\rho > \rho_{\text{крит}}$, потенциальная энергия удерживает сферу и неограниченного расширения не будет. Замечательно, что и выражение для критической плотности, входящее в (8.21), в точности совпадает с (8.18) !

Теперь обратимся к общей теории относительности. В ее основе лежит принцип общей ковариантности. В него входит принцип эквивалентности инерциальной и гравитационной массы и эквивалентность всех систем отсчета (а не только инерциальных, как у Ньютона и в СТО). Последнее требование по существу является требованием локальной инвариантности уравнений теории по отношению к любым преобразованиям системы координат и даже к изменению метрики про-

пространства. Это значит, что метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$, определяющий интервал между двумя мировыми точками, может зависеть от координат:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu. \quad (8.22)$$

Такое пространство называется Римановым (в Евклидовом пространстве $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$).

Вторая основная гипотеза ОТО состоит в том, что геометрия пространства событий, т.е. компоненты метрического тензора, или тензора энергии импульса $T_{\mu\nu}$ (T_{00} представляет собой плотность ρ), связана с распределением и перемещением масс в физическом пространстве. Эта связь выражена основным уравнением ОТО для гравитационного потенциала $G_{\mu\nu}$, связанного с тензором кривизны $R_{\mu\nu}$ соотношением

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (8.23)$$

где $R = g_{kl} R_{kl}$ – скалярная кривизна. Тензор кривизны в общем случае четвертого ранга, но в уравнение (8.23) входит $R_{kl} = R^i_{ikl}$ – свертка по значку i . Уравнение для тензора кривизны связывает его с тензором энергии-импульса:

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (8.24)$$

Здесь G – гравитационная постоянная Ньютона. Из этого уравнения следует, что "источником" гравитационного поля являются массы; они же определяют и геометрию пространства.

Более наглядно геометрию пространства можно охарактеризовать с помощью радиуса кривизны ℓ и кривизны K , ко-

торые связаны между собой:

$$\ell = 1/\sqrt{K}. \quad (8.25)$$

Не вдаваясь в подробности, приведем связь величины K с тензором кривизны:

$$K = \lim \frac{\varphi}{\sigma} = R_{mklj} x^{mk} x^{lj}. \quad (8.26)$$

Величины φ и σ поясним на примере некоторой поверхности, к которой в точке M построим касательную плоскость (рис.8.4). Определим в точке M вектор $\vec{v}$ и спроектируем его на касательную плоскость; затем будем передвигать по какому-либо замкнутому контуру этот вектор так, чтобы он оставался параллелен сам себе.

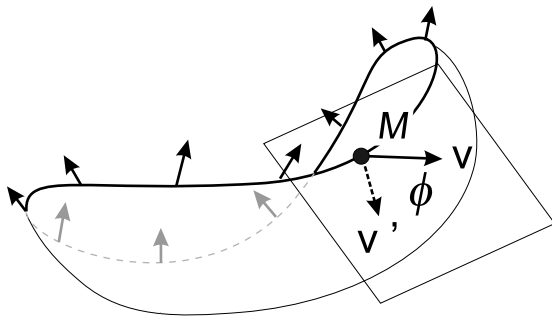


Рис. 8.4. К определению кривизны поверхности

ниченная описанным контуром.

Если после того, как вектор вернется в точку M , его проекция на плоскость будет составлять угол φ с исходной проекцией, то поверхность имеет кривизну K (8.26), где σ – площадь, ограниченная описанным контуром.

Тот же результат получится, если на поверхности начертить треугольник, имеющий площадь S . Если поверхность не плоская, то сумма углов Σ такого треугольника не будет равна π . Кривизна определится отношением

$$K = \frac{\Sigma - \pi}{S} \quad (8.27)$$

(при этом радиус кривизны равен $\ell = \sqrt{S/(\Sigma - \pi)}$).

Из уравнений ОТО, связывающих кривизну с плотностью материи, следует формула для радиуса кривизны:

$$\ell = \frac{c}{H} \sqrt{\frac{\rho_{\text{крит}}}{\rho - \rho_{\text{крит}}}}. \quad (8.28)$$

Если $\rho = \rho_{\text{крит}}$, то наша Вселенная не имеет кривизны, ее радиус $\ell \rightarrow \infty$. В случае $\rho > \rho_{\text{крит}}$ кривизна положительная, Вселенная замкнута. Итак, для определения судьбы нашей Вселенной постоянная H , как видим, имеет решающее значение. Но экспериментально она была определена лишь в 1929 г.

8.2. Открытие взрывающейся Вселенной

8.2.1. Красное смещение и закон Хаббла

Теперь в это трудно поверить, но даже в первые десятилетия XX в. среди астрономов, физиков и философов не было единого мнения о том, что же представляют собой туманности, видимые в телескопы того времени: находятся ли они во Млечном Пути, т.е. в нашей Галактике, или представляют собой другие галактики, также состоящие из отдельных звезд ? или же это просто отдельные облака светящегося газа ?

Спор разрешил Хаббл в 1924 г. Используя 100-дюймовый телескоп обсерватории Маунт-Вильсон, он обнаружил цефеиды в большой спиральной туманности в созвездии Андромеды. Цефеиды – это звезды со строго периодическими колебаниями блеска, которые возникают вследствие пульсаций наружных слоев звезды. Светимость их колеблется с амплитудой от 0.1-й до 2-й звездной величины, а периоды изменения их блеска составляют от 1 до 50, редко – до 218 суток. Звездная величина – это мера освещенности, создаваемая светилом, ме-

ра его блеска. Общая связь между освещенностью E_1 и E_2 , создаваемой двумя звездами, и их звездными величинами m_1 и m_2 , дается формулой

$$\frac{E_2}{E_1} = 2.512^{m_1 - m_2}.$$

К первой звездной величине относятся многие яркие звезды, полная Луна имеет звездную величину -12.7 , а Солнце -26.58 . Согласно приведенной формуле это значит, что освещенность ночью в полнолуние меньше дневной в 356675 раз. Измеряя период пульсаций по изменению блеска цефеиды, можно определить ее светимость (поверхностную плотность светового потока). Затем измеряется видимый блеск звезды, который обратно пропорционален расстоянию до нее. Сравнение видимого блеска со светимостью позволяет найти расстояние до цефеиды.

Одним из главных достижений Хаббла было создание методов измерения расстояний до галактик, которые слишком далеки, чтобы в них можно было обнаружить цефеиды. На следующем этапе Хаббл использовал звезды-сверхгиганты, обладающие большей, чем цефеиды, светимостью, которые можно обнаружить во многих удаленных галактиках. Хаббл принял, что ярчайшие звезды имеют примерно одинаковую светимость, тогда их блеск будет служить определением расстояния до них. Таким образом он расширил область измеряемых расстояний от 1 до 10 млн световых лет. Далее, приняв, что все галактики имеют примерно одинаковую светимость, Хаббл смог исследовать Вселенную вплоть до расстояния в 500 млн световых лет. Эта область содержит около 100 млн галактик, т.е. значительно больше, чем те 500 000 галактик, которые бы-

ли известны до вступления в строй 100-дюймового телескопа.

Скорость удаления или приближения галактик к наблюдателю можно измерять по эффекту Доплера: все длины волн от приближающегося источника света смещены к синему участку спектра (синее смещение), а от удаляющегося источника – к красному (красное смещение). Величина смещения обозначается Z и определяется формулой

$$Z = \frac{\lambda_{\text{набл}} - \lambda_{\text{изл}}}{\lambda_{\text{изл}}} = \frac{v}{c}. \quad (8.29)$$

Здесь v – скорость источника света, $\lambda_{\text{изл}}$ и $\lambda_{\text{набл}}$ – соответственно длины волн от источника и полученных наблюдателем. В релятивистской теории эта формула имеет более сложный вид, но при скоростях, далеких от скорости света используется с полным правом.

Приходящий от далеких галактик свет, как правило, по частоте смещен в красную сторону, т.е. эти галактики удаляются от нас. Сопоставляя скорости удаления галактик с расстоянием до них, Хаббл установил закон:

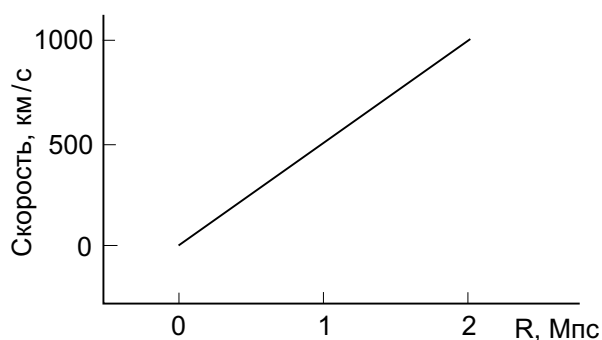


Рис. 8.5. Зависимость скорости удаления галактик от расстояния до них

вплоть до расстояний в 6 млн световых лет скорости галактик пропорциональны расстоянию до них (рис. 8.5). К 1931 г. Хаббл расширил область применимости своего закона до 240 млн световых лет, где скорости удаления составляли уже лишь $1/7$ скорости света. Результат оказался тот же:

$$v = H R. \quad (8.30)$$

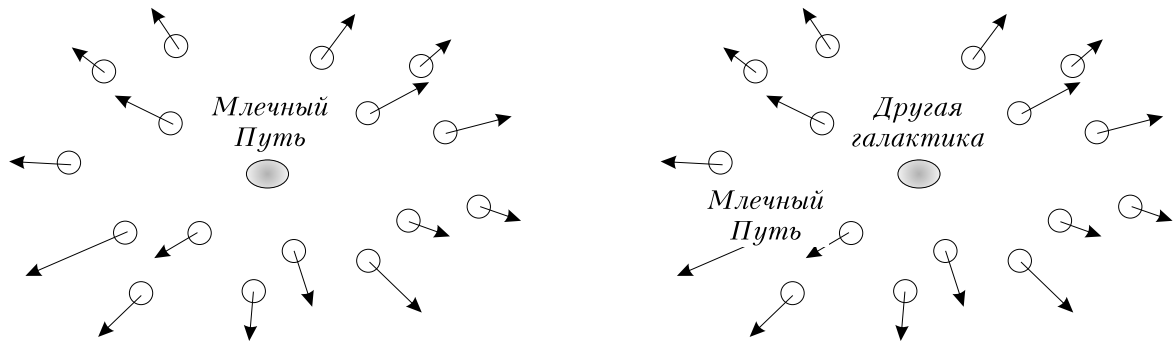


Рис. 8.6. Расширение Вселенной, видимое из разных галактик

Хаббл считал, что его постоянная $H \simeq 500 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпс})$ (1 парсек (пс) = 3.26 световых года = $30.857 \cdot 10^{12} \text{ км}$; 1 Мпс = 10^3 пс). Как выяснилось, его оценка занижала расстояния R примерно в 10 раз, поскольку существуют галактики, светимость которых в десятки раз сильнее усредненной величины – о них Хаббл еще не знал. Современные оценки постоянной Хаббла лежат в пределах $100 - 50 \text{ км} / \text{с} \cdot \text{Мпс}$. Для оценок примем значение $H = 75 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпс})$. Из закона Хаббла (8.30) следует два удивительных вывода: величина $1/H \sim 10^{10}$ лет означает, что столько лет назад все галактики находились очень близко друг к другу; закон расширения, в котором скорость прямо пропорциональна расстоянию, означает, что любую галактику (а не только нашу) можно принять за центр расширения, и при этом будет наблюдаться тот же закон расширения (рис.8.6).

Следующим достижением стало измерение красного смещения у многих радиогалактик, находящихся так далеко, что единственным индикатором расстояния до них служит их видимый блеск. Соотношение между красным смещением и видимой звездной величиной для этих радиогалактик также линейно, как и для всех галактик, подтверждающих

закон Хаббла.

Теперь можно оценить и теоретически предсказанную критическую плотность: $\rho_{\text{крит}} = 3H^2/(8\pi G)$. Подставляя в это выражение $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$, $H = 75 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпс}^2) = 25 \cdot 10^{-19} \text{ с}^{-1}$, получаем

$$\rho_{\text{крит}} \simeq 3 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3. \quad (8.31)$$

Какая же плотность измеряется в настоящее время в нашей Вселенной ? Наблюдения показывают, что галактики собраны в группы и скопления, но в масштабах порядка 300 Мпс и больше светящаяся материя в виде галактик и их скоплений распределена примерно однородно. Если вся материя действительно сосредоточена в светящихся галактиках, то для определения средней плотности необходимо в достаточно большом объеме подсчитать общее число галактик и помножить на массу средней галактики. Массы галактик определяются следующим образом. Если на краю галактики имеется какой-либо объект,двигающийся по приблизительно круговой орбите под действием тяготения массы галактики, то его скорость (первая космическая скорость) равна:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (8.32)$$

где M – масса, заключенная внутри сферы радиусом R . Обе величины, v и R , поддаются измерению, что и позволяет определить M . Круговое движение существует в галактиках спирального типа; в эллиптических галактиках звезды движутся хаотически, и в формуле (8.32) для определения массы M в

качестве v берется средняя скорость звезд в галактике, а R – ее размер.

Подсчет средней плотности в видимой части Вселенной по светящимся галактикам приводит к значению

$$\rho_{\text{гал}} \sim 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3. \quad (8.33)$$

Однако есть основания считать, что наблюдаемые светящиеся галактики – это далеко не все, что имеется во Вселенной. К такому выводу приводят наблюдения с помощью радиотелескопов за спутниками отдельных галактик или движениями газовых облаков, находящихся на расстояниях, далеких от видимой границы галактики, где, казалось бы, никакой материи уже нет. Тем не менее вычисленная по измерениям масса галактики, около которой наблюдались такие движения, оказывается иногда в 10 раз больше, чем определенная по движению звезд на видимой границе галактики. Еще бóльшие скрытые массы имеются в межгалактическом пространстве в скоплениях галактик.

Хотя природа скрытой массы (ее называют еще *темной материей*) и в настоящее время недостаточно ясна и вызывает к жизни много разных моделей, несомненно одно: существование скрытой массы кардинально меняет оценку $\rho_{\text{гал}}$ из (8.33). Не исключено, что полная средняя плотность равна критической или даже несколько превышает ее.

8.2.2. Реликтовое излучение

Изучение звездного неба в радиодиапазоне привело еще к одному открытию, ставшему важнейшим аргументом в теории эволюции Вселенной. Это – реликтовое излучение, случайно

открытое радиоастрономами А. Пензиасом и Р. Вильсоном в 1965 г. при отладке радиотелескопа. Они были озадачены явлением, которое показалось им избытком шума в их аппаратуре. После внимательного изучения они установили, что это – фоновое излучение, изотропное с точностью до нескольких процентов и в сотни раз интенсивнее, чем то, которое можно было бы объяснить излучением известных радиоисточников. Последовавшие тщательные измерения интенсивности излучения на разных длинах волн обнаружили закономерность, показанную на рис.8.7, где сплошной линией изображена планковская кривая для излучения абсолютно черного тела при $T = 2.7$ К.

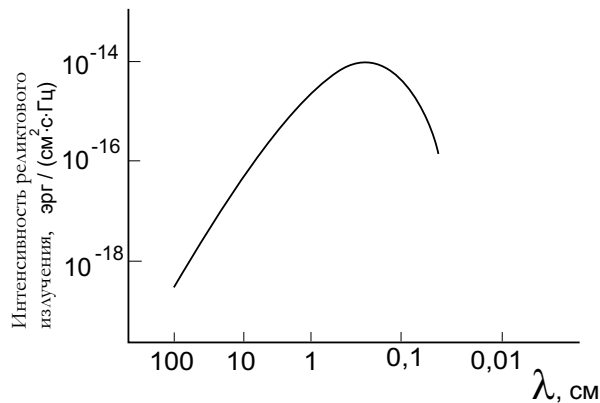


Рис. 8.7. Зависимость интенсивности реликтового излучения от длины волны λ

Итак, максимум интенсивности излучения приходится на длины волн около 0.1 см, а температура этого излучения $T \sim 3$ К. Зная температуру, можно подсчитать, сколько фотонов этого излучения приходится на единицу объема. Введем величину $\rho_{р.и}$ –

плотность энергии *реликтового излучения* в единице объема. Плотность состояний для фотонов дается выражением $\rho(\lambda) = 16\pi^2 c \hbar / \lambda^5$. Подставляя сюда $\lambda = 0.1$ см, получаем $\rho_{р.и} \sim 5 \cdot 10^{-13}$ эрг / см³. Энергия одного фотона с этой длиной волны равна $\varepsilon_f = 2\pi \hbar c / \lambda \simeq 10^{-15}$ эрг. Отсюда число фотонов с $\lambda = 0.1$ см равно $n_{р.и} = \rho_{р.и} / \varepsilon_f = 500$ см⁻³. Теперь подсчитаем, сколько частиц вещества в 1 см³. Главная составля-

ющая вещества – водород, самый распространенный элемент во Вселенной. Делим среднюю плотность вещества во Вселенной $\rho \sim 3 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$ на массу атома водорода $m \sim 10^{-24} \text{ г}$ и получаем

$$n_{\text{вещ}} \sim \frac{3 \cdot 10^{-31}}{10^{-24}} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}^{-3},$$

т.е. на несколько кубических метров в среднем приходится одна частица вещества, и отношение числа фотонов к числу частиц в 1 см^3 равно

$$\frac{5 \cdot 10^2}{3 \cdot 10^{-7}} \sim 10^9.$$

Следовательно, на один атом вещества приходится 10^9 реликтовых фотонов ! Поэтому сегодняшняя Вселенная практически прозрачна для реликтового излучения, и реликтовые фотоны крайне слабо взаимодействуют с веществом; следовательно, их число не изменяется. Положение в ранней Вселенной, когда были велики плотность вещества и температура, было не таким. Об этом речь пойдет ниже при обсуждении модели горячей Вселенной.

8.3. Модель горячей Вселенной

8.3.1. Возраст Вселенной

Красное смещение убедительно доказывает, что наша Вселенная расширяется. Какой промежуток времени отделяет нас от начала расширения, когда плотность ρ была бесконечно большой ? На этот вопрос можно было бы ответить, решив уравнение (8.12), если бы были известны из наблюдения H_0 и A ; тогда t_0 можно было бы определить точно. Но средняя плотность ρ_0 точно неизвестна. Поэтому для приблизитель-

ной оценки снова возвратимся к нашему шару радиусом R из формулы (8.1) и рис.8.1. Подсчитаем, за какое время граница выбранного нами шара расширилась бы от $R = 0$ до сегодняшнего значения R_0 , если бы двигалась с постоянной скоростью, равной сегодняшней v_0 (на самом деле скорость разлета должна меняться вследствие торможения силами тяготения, но при не слишком большой плотности этим можно пренебречь). Итак, время разлета есть R_0/v_0 , и с учетом закона Хаббла $v_0 = H_0 R_0$ получаем

$$t_0 \sim 1/H_0. \quad (8.34)$$

Подставляя значение $H_0 \simeq 2.5 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ и учитывая, что один год составляет примерно $3.2 \cdot 10^7 \text{ с}$, получаем

$$t_0 \simeq 10^{10} \text{ лет}. \quad (8.35)$$

Здесь было принято значение $H_0 \simeq 75 \text{ км / (с} \cdot \text{Мпс)}$. Если учесть возможные пределы $H_0 \simeq 50 - 100 \text{ км / (с} \cdot \text{Мпс)}$, то делаем вывод, что возраст Вселенной, отождествляемый с t_0 , находится в пределах от 10 до 20 млрд лет. Для расчетов примем некоторое среднее – 13 млрд лет.

Это значит, что во Вселенной не может быть объектов, более старых чем 13 млрд лет, и нет более старых источников света, расстояние до которых от нас превышало бы миллиарды световых лет. Точки пространства, находящиеся от нас на этом расстоянии, называются горизонтом видимости.

8.3.2. Зависимость плотности, расстояний и температуры от времени

В 1946 г. Г. Гамовым были заложены основы одной из фундаментальных концепций современной космологии – модель

”горячей Вселенной”. В данной модели основное внимание переносится на состояние вещества и физические процессы, идущие на разных стадиях расширения Вселенной, включая наиболее ранние стадии, когда состояние было необычным. В точке $R = 0$ – состояние сингулярности. В этот момент происходит Большой Взрыв, и Вселенная начинает расширяться, а плотность, температура и давление в этот момент максимальны.

С построением модели ”горячей Вселенной” в космологии наряду с законами тяготения активно применяются законы термодинамики, сведения из ядерной физики и об элементарных частицах, возникает релятивистская астрофизика.

Для выяснения вопроса, как изменяются со временем скорость расширения, плотность и температура, обратимся снова к уравнению (8.13):

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} + A}.$$

Чем ближе к сингулярности $R \rightarrow 0$, тем больше первое слагаемое под корнем и постоянной A можно пренебречь. Тогда скорость определяется выражением

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (8.36)$$

Если принять, что средняя скорость $v \sim \frac{2R}{3t}$, то для R получаем

$$R = \sqrt[3]{\frac{9GMt^2}{2}}, \quad R \sim t^{2/3}. \quad (8.37)$$

Если вещество релятивистское, то необходимо использовать

уравнение (8.6)

$$a = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R,$$

так как давление P столь велико, что оба слагаемых одинаково важны. Для релятивистского вещества, движущегося со скоростью света, например фотонов,

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2. \quad (8.38)$$

Из (8.38) видно, что давление создает дополнительное поле тяготения. Решая уравнение (8.6) с учетом (8.38), получаем

$$R \sim \sqrt{t}. \quad (8.39)$$

Рассмотрим теперь, как изменяется плотность ρ с течением времени. Для нерелятивистского вещества $\rho = M/\frac{4}{3}\pi R^3$, а $R^3 = 9GMt^2/2$, как следует из (8.37). Поэтому

$$\rho_{\text{вещ}} = \frac{1}{6\pi G t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \text{ г/см}^3. \quad (8.40)$$

В обеих формулах время измеряется в секундах. Для релятивистского вещества примем, что оно состоит из фотонов, и их число в единице объема уменьшается по тому же закону, что и для частиц, т.е. как $\sim 1/R^3$. Однако если энергия частицы при этом остается постоянной, то энергия фотона в силу красного смещения изменяется как $1/R$, и в целом получается, что

$$\rho_{\text{изл}} \sim \frac{1}{R^4}, \quad (8.41)$$

т.е. в начальный период расширения плотность излучения изменяется быстрее, чем плотность вещества. Точная формула из ОТО дает

$$\rho_{\text{изл}} = \frac{3}{32\pi G t^2} = \frac{5 \cdot 10^2}{t^2} \text{ г/см}^3. \quad (8.42)$$

Законы изменения плотности как релятивистского, так и нерелятивистского вещества, как видно из (8.40) и (8.42) различаются несущественно.

Теперь можно определить и зависимость температуры Вселенной T от времени расширения t . Для этого свяжем ρ с плотностью энергии ε : $\rho = \varepsilon/c^2$; но для фотонов плотность энергии связана с температурой законом Стефана–Больцмана:

$$\varepsilon = \sigma T^4, \quad (8.43)$$

где постоянная Стефана–Больцмана $\sigma = 7.6 \cdot 10^{-15} \text{ эрг}/(\text{см}^3 \text{K}^4)$ служит "коэффициентом пересчета" температуры в энергию. Из (8.43) следует, что

$$T_{\text{изл}} \sim \frac{10^{10}}{\sqrt{t}}. \quad (8.44)$$

Здесь температура измеряется в кельвинах, время – в секундах.

Рассмотрим теперь вещество, для простоты – классический идеальный газ. При адиабатическом процессе (в отсутствие теплообмена) температура и объем газа связаны соотношением $TV^{2/3} = \text{const}$. Отсюда следует, что

$$T_{\text{вещ}} \sim \frac{1}{R^2} \sim \frac{1}{t}. \quad (8.45)$$

Теперь мы подготовлены к рассмотрению сценария Большого Взрыва.

8.3.3. Сценарий Большого Взрыва

В современных теориях развитие Вселенной начинается с момента, определяемого планковским временем. Планк, опираясь на введенную им константу $\hbar$, а также на скорость света

в вакууме c и гравитационную постоянную G – три фундаментальные величины, сделал вывод о том, что можно ввести ”естественные единицы измерений” длины, массы и времени, которые ”не зависели бы от выбора каких-либо тел или веществ и обязательно сохраняли бы свое значение для всех времен и для всех культур, в том числе внеземных и нечеловеческих”. Новые (естественные) единицы выбираются так, чтобы в новой системе каждая из указанных констант обратилась в единицу. Из фундаментальных констант – $\hbar$, G , c – Планк составил единицы длины, массы и времени, носящие его имя:

$$\begin{aligned}\ell_{\text{Пл}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см}, \\ m_{\text{Пл}} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ г}, \\ t_{\text{Пл}} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5 \cdot 10^{-44} \text{ с}.\end{aligned}\tag{8.46}$$

Эти величины определяют и плотность Планка:

$$\rho_{\text{Пл}} = \frac{m_{\text{Пл}}}{\ell_{\text{Пл}}^3} \sim 10^{94} \text{ г/см}^3.\tag{8.47}$$

Итак, в первый момент Вселенная начинается при $t \sim 10^{-44}$ с, плотность $\rho \sim 10^{94}$ г/см³, а температура

$$T \sim \frac{m_{\text{Пл}} c^2}{k_{\text{Б}}} \simeq 10^{32} \text{ К}.\tag{8.48}$$

При этом плотность энергии определяется законом Стефана–Больцмана (8.43). При такой плотности энергии в соответствии с GUT-моделями никакая симметрия еще не нарушена. Средняя энергия частиц $k_{\text{Б}} T \sim 10^{19}$ ГэВ – это энергия Ве-

Таблица 8.1. Основные этапы эволюции ранней Вселенной

Этап	1	2	3	4	5	6	7	8
$T, ^\circ K$	10^{32}	10^{27}	10^{15}	10^{12}	10^{10}	10^9	10^4	10^3
E	10^{19} ГэВ	10^{14} ГэВ	10^2 ГэВ	10^2 МэВ	1 МэВ	10^{-1} МэВ	10 эВ	1 эВ
t	10^{-44} с	10^{-34} с	10^{-6} с	10^{-4} с	1 с	3 – 5 мин	10^5 лет	

ликого объединения. Только что родившаяся Вселенная представляет собой кварк-глюонную плазму безмассовых частиц, жестких γ -квантов в состоянии термодинамического равновесия. Вакуум симметричен.

Далее при понижении температуры необходимо остановиться на важнейших этапах (табл.8.1).

Этап 1. При понижении температуры распадается суперсимметрия, гравитационное взаимодействие выделяется, симметрия описывается группой $SU(5)$ – сильные, электромагнитные и слабые взаимодействия неразличимы. Частицы, античастицы и γ -кванты находятся примерно в равных количествах.

Этап 2. 10^{14} ГэВ – энергия, при которой происходит объединение сильных и электрослабых взаимодействий. При дальнейшем понижении температуры симметрия вакуума понижается, X - и Y -бозоны приобретают массу, выделяются сильные взаимодействия; группа $SU(5)$ распадается на $SU(3)$ и $SU(2) \otimes U(1)$. В результате последующего распада X - и Y -бозонов рождаются кварки и лептоны, хотя они еще не образуют связанные системы. На этом этапе уже возможно объяснить барионную асимметрию, о которой речь пойдет ниже.

Этап 3. 10^2 ГэВ – симметрия вакуума еще понижается, в ”осадок” выпадают бозоны Хиггса, при взаимодействии с которыми $W^\pm$ - и Z^0 - бозоны приобретают массу. Электрослабое взаимодействие расщепляется на слабое и электромагнитное. Симметрии $SU(2)$ и $U(1)$ существуют независимо.

Этап 4. 10^2 МэВ – это характерные энергии связи кварков в барионах и мезонах. При температурах ниже 10^{12} К средней энергии частиц $k_B T$ уже не хватает, чтобы противостоять такому объединению. Возникают барионы и мезоны. При аннигиляции γ -квантов рождаются лептоны. Нейтрино и антинейтрино превращаются в электрон-позитронные пары и обратно.

Этап 5. 1 МэВ – ниже этой энергии лептоны уже не рождаются ($\varepsilon < 2m_e c^2$). Нейтрино остаются свободными, и Вселенная становится для них прозрачной.

Этап 6. 10^{-1} МэВ – эта энергия уже ниже энергии связи нейтронов и протонов в атомных ядрах, поэтому становится возможным соединение протона и нейтрона в ядро дейтерия. При более низкой температуре ядра дейтерия вступают в реакцию и образуют гелий. На этом ядерные реакции в ранней Вселенной заканчиваются. Расчеты показывают, что в первичном веществе должно образоваться около 25% гелия по массе и 75% ядер водорода. У далеких звезд, свет от которых идет к нам 10^{10} лет, и наблюдается такой состав.

Этап 7. 10 эВ – характерные энергии связи электронов в атомах, и тепловое движение уже не может противостоять захвату ядрами электронов. Возникают нейтральные атомы. Насту-

пает "эра прозрачности", фотоны уже могут двигаться свободно, а не как в ионизированном газе, и их плотность, согласно (8.41), уменьшается как $1/R^4$, в то время как плотность частиц вещества изменяется как $1/R^3$, т.е. фотоны "обгоняют" вещество при расширении, отрываются от него, и в настоящее время мы видим эти фотоны как реликтовое излучение. Этот факт был предсказан в теориях горячей Вселенной до того, как оно было открыто экспериментально в 1965 г. Еще в 1946 г. Гамов предсказывал, что Вселенная должна быть заполнена "чернотельным" излучением, но его предсказание было забыто, вероятно, потому, что считалось невозможным обнаружить его на фоне ярко светящихся объектов. Однако, как оказалось, в радиодиапазоне интенсивность реликтового излучения существенно превышает интенсивность всех других возможных источников, в сотни раз. Почему же фотоны со временем "остывают" так, что их средняя температура становится близка к 3 К ? На самом деле это мы видим их такими потому, что Вселенная расширяется, и для нас их первоначальная частота изменяется в красную сторону вследствие эффекта Доплера. Действительно, сдвиг длины волны фотона $\Delta\lambda/\lambda = v/c$, где v – скорость "разбегания". За время Δt , $\Delta r = v/\Delta t$; $r = c \Delta t$. Поэтому

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{\Delta r}{c \Delta t} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R}. \quad (8.49)$$

Таким образом, относительное изменение длины волны реликтового излучения за некоторое время Δt равно относительному изменению расстояния между галактиками за это же время. Если меняется длина волны, меняется и частота $\omega = 2\pi c/\lambda$, и $\varepsilon_{\text{фотон}} = \hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$.

Этап 8. При температурах около 3000 К гравитационная энергия уже превышает кинетическую энергию молекул и начинается образование звезд и галактик.

Теория горячей Вселенной, помимо изложенного выше сценария, должна ответить и на следующие вопросы:

- Почему во Вселенной существует вещество (10^9 фотонов – 1 протон), т.е. имеет место барионная асимметрия ?
- Почему это вещество существует в виде галактик, т.е. неоднородных образований.
- Проблема горизонта.
- Проблема критической плотности.
- Первотолчок – что дало начало взрыву ?

Эти вопросы будут рассмотрены в следующих разделах.

8.3.4. Первотолчок и инфляция

Для ответа на вопрос: "Что может быть причиной начала расширения ?" обратимся к современной теории вакуума. Как уже понятно из предыдущих глав, вакуум – это сложнейшее состояние "кипящих" виртуальных частиц всевозможных сортов. Еще в 1967 г. Я. Зельдович показал, что в результате этих процессов в вакууме может появиться некоторая плотность энергии $\varepsilon_{\text{вак}}$ как следствие взаимодействия виртуальных частиц. Вместе с плотностью энергии появляется и плотность массы $\rho = \varepsilon_{\text{вак}}/c^2$, а также силы, действующие в направлении, противоположном по отношению к гравитации. В вакууме отрицательное давление по абсолютной величине равно

плотности энергии:

$$-P_{\text{вак}} = \varepsilon_{\text{вак}} = \rho_{\text{вак}} c^2. \quad (8.50)$$

На первый взгляд может показаться, что здесь мы приходим опять к существованию некоторой универсальной среды, "эфира", и движение относительно нее должно сопровождаться "эфирным ветром" (вспомним Майкельсона с его опытом). Однако вакуум с отрицательным давлением не похож на обычные среды. Когда наблюдатель начинает двигаться в какой-то системе отсчета, на него будет набегать поток энергии, связанный с плотностью энергии $\varepsilon_{\text{вак}}$; но, помимо этого потока, на наблюдателя также набегает поток энергии, связанный с отрицательным давлением, направленный в противоположную сторону и компенсирующий первый поток. Никакого "ветра" не будет! Вакуум одинаков для любых наблюдателей, движущихся друг по отношению к другу по инерции.

Теперь вернемся снова к уравнению (8.6):

$$a = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R$$

и применим его к вакууму, учитывая, что $P_{\text{вак}} = -\rho_{\text{вак}} c^2$:

$$a = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho_{\text{вак}} + 3\frac{P}{c^2} \right) R = \frac{8}{3}\pi G \rho_{\text{вак}} R. \quad (8.51)$$

Положительный знак в правой части указывает, что это уравнение отталкивания, а не притяжения! Теперь можно понять физический смысл космологического члена Эйнштейна в уравнении (8.9): он обусловлен давлением вакуума

$$\Lambda = \frac{8}{3}\pi G \frac{\rho_{\text{вак}}}{c^2}. \quad (8.52)$$

Решением уравнения (8.51), которое следует из (8.6), если в последнем положить $\rho_{\text{вещ}} = 0$, является уже известное нам решение де Ситтера:

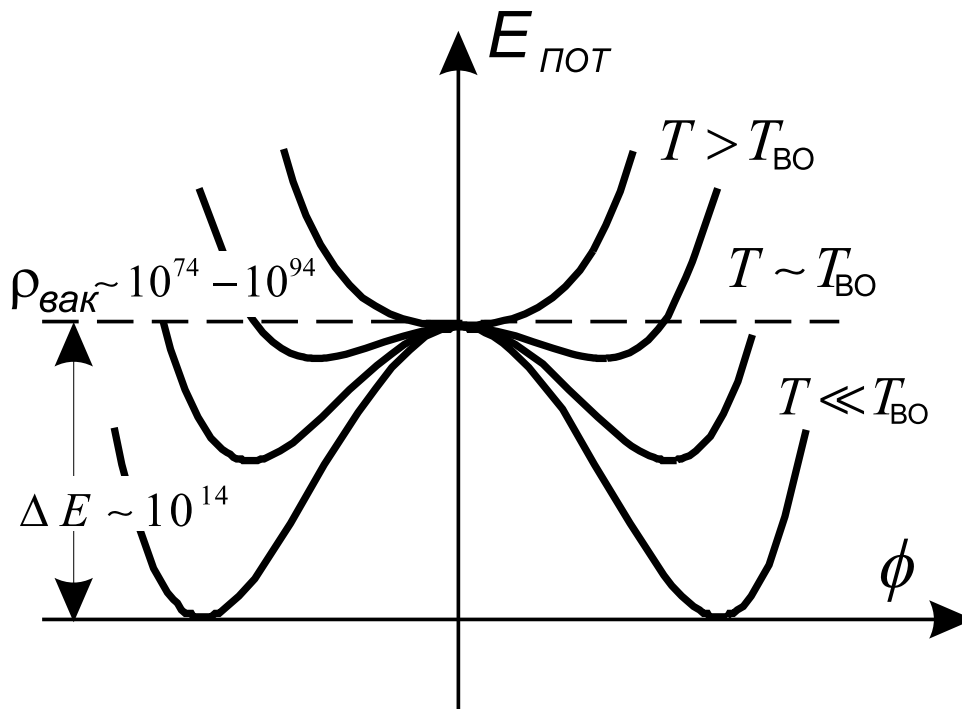
$$R = R_0 \exp \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c t \right). \quad (8.53)$$

Эта формула дала начало инфляционной теории Вселенной, или теории раздувания Вселенной. Под инфляцией понимается экспоненциальное во времени расширение Вселенной. Прежде чем проследить последствия решения де Ситтера, обсудим вопрос, при каких условиях возможно появление больших плотностей вакуума, так что $\rho_{\text{вак}} \gg \rho_{\text{вещ}}$, и Вселенная начинает стремительно расширяться под действием этих антигравитационных сил.

Вакуум – реальная физическая ”система” – состояние материи с наименьшей возможной энергией. Но и это состояние может быть разным: в нем могут происходить фазовые переходы, аналогичные наблюдаемым в обычных системах; оно может зависеть от условий его возникновения.

Рассмотрим этот вопрос на примере хиггсовского поля φ . На рис. 8.8 представлена зависимость потенциальной энергии $E_{\text{пот}}$ от φ при разных температурах. Здесь $T_{\text{во}}$ – температура Великого объединения. При $T \ll T_{\text{во}}$ наблюдается ярко выраженное нарушение симметрии, все бозоны приобрели массы, все взаимодействия существуют отдельно друг от друга.

Перепад энергий $\Delta E \sim 10^{14}$ ГэВ огромен. Такая энергия высвобождается при конденсации хиггсовского поля. Состояние вблизи точки $\varphi = 0$ при небольшом понижении температуры, когда начало движения по склонам достаточно по-

Рис. 8.8. Зависимость $E_{\text{пот}}(\phi)$

логое в самом начале, называется вакуумподобным. В этом состоянии все время имеется гравитационное отталкивание, и Вселенная "раздувается" по экспоненциальному закону. Подчеркнем, что это означает не разлетание галактик, а растягивание самой Вселенной – подобно тому, как увеличиваются расстояния между всеми точками на поверхности надуваемого резинового шарика ! По аналогии с финансами этот процесс называют *инфляцией*.

Сам переход из неустойчивого вакуумподобного состояния к устойчивому вакууму с $\phi \neq 0$ сопровождается освобождением гигантской энергии, которое впоследствии и приводит к рождению вещества.

Подобные состояния неустойчивого вакуума при $T \gg T_{\text{во}}$ могут возникать вследствие квантовых эффектов в гравитационном поле, при сверхплотных состояниях материи, где рас-

стояние между частицами $\sim r_{\text{Пл}} \sim 10^{-33}$ см, плотность достигает значений $\rho \sim 10^{94}$ г/см³ (планковская плотность), а энергия частиц – порядка 10^{19} ГэВ (энергия суперобъединения). Но эти условия как раз соответствуют показателям в начале взрыва. Им отвечает момент времени – планковское время $t_{\text{Пл}} = r_{\text{Пл}}/c \sim 3 \cdot 10^{-44}$ с. Большой Взрыв начинается с инфляционного этапа.

Возвратимся к формуле (8.53). Оценим показатель экспоненты, используя выражение для Λ из (8.52) и подставив $\rho_{\text{вак}} \sim 10^{94}$ г/см³:

$$\sqrt{\frac{\Lambda}{c}} t \simeq 3 \cdot 10^{43} t. \quad (8.54)$$

Такое невероятно быстрое раздувание Вселенной, $R = R_0 \exp(3 \cdot 10^{43} t)$, будет происходить до тех пор, пока вакуумподобное состояние не распадется с понижением температуры ($T \sim 1/R$) и не превратится в обычную горячую материю. Далее расширение, определяемое уравнениями (8.9) и (8.12), пойдет уже по законам обычной гравитации.

На вопрос о том, когда это произойдет, точного ответа пока нет. Можно лишь сделать некоторые оценки. Возьмем для определенности $\Delta t = 10^9 t_{\text{Пл}}$, что составляет $3 \cdot 10^{-35}$ с. Однако за это время расстояния возрастут в e^{10^9} раз, а температура понизится с $T_0 = 10^{32}$ К до $T \simeq T_0/R = T_0/e^{10^9} \simeq 10^{-4 \cdot 10^8}$ К! Это ничтожно малая величина по сравнению с сегодняшней температурой реликтового излучения $T \sim 3$ К. По видимому, стадия инфляционного раздувания должна заканчиваться значительно раньше.

8.3.5. Барионная асимметрия

На первый взгляд, наиболее естественным следствием процессов в расширяющейся Вселенной было бы отсутствие в ней вещества, если количества частиц и античастиц равны. Почему же осталось только вещество, состоящее из частиц, пусть даже в сравнительно небольшом количестве по отношению к излучению (1 протон на 10^9 фотонов)? Ответ на этот вопрос можно получить уже на втором этапе развития Вселенной, когда при $T \geq 10^{27}$ К и $\varepsilon \leq 10^{14}$ ГэВ появляются X - и Y -бозоны, которые затем при $T < 10^{27}$ К будут распадаться. Экспериментально установлено, что вероятности распада частиц и античастиц не одинаковы, т.е. между ними существует некоторая несимметричность свойств. Теперь предположим, что есть два канала распада X -бозона и два — для его античастицы, $\tilde{X}$ -бозона:

а) X -бозон с вероятностью W распадается на два антикварка, для которых суммарный барионный заряд $B_1 = -\frac{2}{3}$ (напомним, что у кварка $B = 1/3$);

б) X -бозон с вероятностью $1 - W$ распадается на кварк и лептон с $B_2 = \frac{1}{3}$;

в) $\tilde{X}$ -бозон с вероятностью $\tilde{W}$ распадается на два кварка с $\tilde{B}_1 = \frac{2}{3} = -B_1$;

г) $\tilde{X}$ -бозон с вероятностью $1 - \tilde{W}$ распадается на антикварк и антилептон с $\tilde{B}_2 = -\frac{1}{3} = -B_2$.

Если в определенном объеме пространства имеется n X -бозонов и такое же число $\tilde{X}$ -бозонов, то полное барионное чис-

ло после распада будет такое

$$\begin{aligned} B &= [W B_1 + (1 - W) B_2] n, \\ \tilde{B} &= [-\tilde{W} B_1 - (1 - \tilde{W}) B_2] n. \end{aligned}$$

Полный барионный заряд в рассматриваемом объеме после распада равен

$$B + \tilde{B} = (W - \tilde{W}) (B_1 - B_2) n, \quad B_1 - B_2 = \pm 1. \quad (8.55)$$

Таким образом, при наличии асимметрии в скоростях реакций ($W \neq \tilde{W}$) суммарный барионный заряд не равен нулю. При распаде бозонов на фермионы и антифермионы и последующей их аннигиляции (что при $T > 10^{10}$ К вполне естественно) происходит накопление барионов. Избыток этот небольшой, но ему не с чем аннигилировать. По теоретическим оценкам, он составляет около 1 бариона на 10^9 фотонов, что подтверждается экспериментом.

И опять возникает вопрос: при однородности Вселенной в больших масштабах (сотни мегапарсек) вещество находится в виде звезд, галактик – откуда взялись такие флуктуации плотности? Дело в том, что распад вакуумподобного состояния – это квантовый процесс, подверженный случайным флуктуациям. В одних моделях по случайным причинам распад произошел раньше, пусть не намного, чем в других, и вызвал раньше переход к горячей Вселенной. Согласно расчетам С. Хокинга, В.Н. Лукаша, А.А. Старобинского и др., такие процессы приводят к флуктуациям плотности горячей материи; из этих флуктуаций и возникли существующие во Вселенной объекты.

8.3.6. Проблема горизонта

До создания теории расширяющейся Вселенной попытки рассмотрения бесконечного пространства, равномерно заполненного звездами, наталкивалась на парадокс: в бесконечной Вселенной луч зрения рано или поздно встретит светящуюся поверхность звезды. В этом случае все ночное небо должно сиять, а не быть темным.

После создания теории расширяющейся Вселенной парадокс разрешается сам собой. Если Вселенная начала расширяться около 13 млрд лет назад, в ней не должно быть источников, светящихся дольше 13 млрд лет. Таким образом, во Вселенной существует горизонт: области, лежащие за горизонтом, принципиально ненаблюдаемы – свет от галактик из-за горизонта просто не успел до нас дойти. У каждого наблюдателя, находящегося в определенной точке Вселенной, горизонт свой: в поле его зрения попадает лишь ограниченное число звезд и небо в основном темное, так как взор скользит вплоть до горизонта, не упираясь в звезду.

Но на этом ”проблема горизонта” в космологии не кончается. Реликтовое излучение, возникшее через 300 тыс. лет после начала расширения (как уже указывалось, в это время непрозрачная для излучения плазма превращается в нейтральные атомы), несет информацию о состоянии Вселенной в этот период. Приходя к нам с разных сторон, излучение несет информацию о свойствах Вселенной в точках, разнесенных в пространстве, т.е. находящихся одна по отношению к другой за горизонтом видимости, и свет за время жизни Вселенной не успевает дойти от одной точки до другой. И свойства оказы-

ваются одинаковыми, как свидетельствует реликтовое излучение. Как эти области могли узнать друг о друге и "завести" у себя совершенно одинаковые условия? Проиллюстрируем эту ситуацию на примере рис. 8.9.

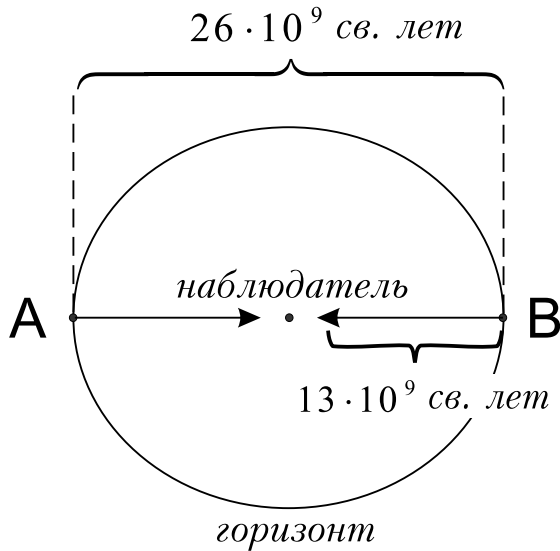


Рис. 8.9. Проблема "горизонта"

Сигнал из точки А в точку В не сможет прийти за $13 \cdot 10^9$ лет – время жизни Вселенной к настоящему моменту, тем не менее, как свидетельствуют наблюдения, температуры и другие физические параметры в этих точках одинаковы. Инфляция, или эпоха экспоненциального раздувания, объясняет этот факт.

Далекие сегодня точки в начале инфляции находились рядом внутри объема $\sim 10^{-33}$ см и могли свободно обмениваться сигналами, а затем инфляция раскидала их на такие расстояния за считанные мгновения.

8.3.7. Еще раз о критической плотности

Рассмотрим снова уравнение (8.17), в которое входит критическая плотность:

$$A = \frac{8}{3} \pi G R_0^2 (\rho_{\text{крит}} - \rho_0), \quad \rho_{\text{крит}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (8.56)$$

Перепишем это уравнение не для сегодняшнего момента (ρ_0, H_0, R_0) , а для произвольного, и разрешим его

относительно $(\rho_{\text{крит}} - \rho)/\rho$:

$$\frac{\rho_{\text{крит}} - \rho}{\rho} = \frac{3A}{8\pi G R^2} \frac{1}{\rho} = \frac{A}{2\pi G M} R.$$

Итак, относительная разность плотности вещества во Вселенной и критической плотности в любой произвольный момент расширения пропорциональна R :

$$\frac{\rho_{\text{крит}} - \rho}{\rho} \sim R. \quad (8.57)$$

Это значит, что в начальные моменты расширения плотность вещества практически не отличалась от критической. Почему? Инфляционная теория отвечает и на этот вопрос. Действительно, если $R = R_0 \exp\left(\sqrt{\Lambda/3} ct\right)$, то

$$v = \frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c R_0 \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\right) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c R. \quad (8.58)$$

Но ведь это закон Хаббла, $v = H \cdot R$, и мы получаем выражение для постоянной Хаббла через космологическую постоянную:

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c. \quad (8.59)$$

Но Λ в свою очередь связана с плотностью вакуума в вакуумподобном состоянии $\rho_{\text{вак}}$ (8.52):

$$\Lambda = \frac{8}{3} \pi G \frac{\rho_{\text{вак}}}{c^2}.$$

Подставив это выражение в (8.59), получим

$$\rho_{\text{вак}} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (8.60)$$

что совпадает с выражением (8.18) для критической плотности: $\rho_{\text{вак}} = \rho_{\text{крит}}$.

Плотность вакуумподобного состояния совпадает с критической, а когда в конце стадии раздувания это состояние распадается в обычную материю, плотность $\rho_{\text{вак}}$ переходит в плотность материи ρ , и эта плотность $\rho \simeq \rho_{\text{крит}}$. Таким образом, объясняется закономерность (8.57), когда в начальные моменты расширения R близко к нулю.

8.3.8. Первоначальный ядерный синтез

Одно из самых замечательных достижений космологии – теория образования химических элементов в ранней Вселенной, или, как ее еще называют, теория первоначального ядерного синтеза.

В то время как реликтовое излучение дает информацию о состоянии Вселенной через 10^5 лет после Большого Взрыва, распространенность легчайших ядер D, ^3He , ^4He , ^7Li может быть использована для получения информации о Вселенной на более раннем этапе ее развития (напомним, что ядро химического элемента X принято символически обозначать $^Z_N X$, где Z – число протонов, N – число нейтронов, величину $A = Z + N$ называют массовым числом; специальное обозначение D закрепилось за тяжелым изотопом водорода ^2_1H – дейтерием). Первоначальный ядерный синтез, т.е. образование ядер из свободных нуклонов, происходил спустя 100 с после Большого Взрыва. В это время температура Вселенной упала до 10^9 К, и образовавшиеся дейтроны (связанное состояние протона и нейтрона) уже не могли более разрушаться γ -квантами. Количество новых ядер, которое может быть образовано, особенно сильно зависит от отношения числа протонов к числу нейтронов. При $E > 1$ МэВ ($T > 10^{10}$ К) лептоны, адроны и

фотоны находились в состоянии термодинамического равновесия.

Состояние равновесия между протонами и β -нестабильными нейтронами поддерживалось за счет слабых процессов:

$$P + e^- \rightleftharpoons N + \nu_e, \quad N + e^+ \rightleftharpoons P + \bar{\nu}_e. \quad (8.61)$$

Отношение числа нейтронов n_N к числу протонов n_P в состоянии термодинамического равновесия при $T > 10^{10}$ К определяется фактором Больцмана:

$$\frac{n_N}{n_P} = \exp \left(-\frac{(M_N - M_P)c^2}{T} \right), \quad (8.62)$$

где $(M_N - M_P)c^2 \simeq 1.3$ МэВ, и при $T = 3 \cdot 10^{10}$ К имеем

$$\frac{n_N}{n_N + n_P} \simeq 0.38. \quad (8.63)$$

При падении средней тепловой энергии ниже 1 МэВ ($T < 10^{10}$ К) скорость слабых процессов не может более удерживаться на уровне скорости расширения Вселенной, процессы (8.61) становятся слишком медленными для того, чтобы поддерживать термодинамическое равновесие, и в дальнейшем число нейтронов медленно уменьшалось только за счет β -распада. Это происходит потому, что реакция $P + e^- \rightarrow N + \nu_e$ – эндотермическая; для того чтобы она пошла, нужна энергия $Q = (m_N + m_{\nu_e})c^2 - (M_P + M_{e^-})c^2 \simeq 0.8$ МэВ, которая при температурах $T < 10^{10}$ К уже больше средней тепловой энергии. Таким образом, нейтрино покидает состояние термодинамического равновесия, а количество нейтронов за счет β -распада изменяется по закону

$$n_N(t) = (n_N)_f e^{-t/\tau_N}. \quad (8.64)$$

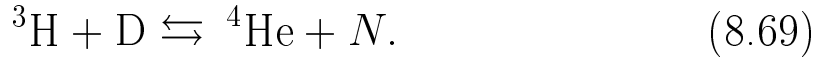
Здесь $(n_N)_f$ – количество нейтронов в момент ”замерзания” при температуре $T_f = 10^{10}$ К, когда заканчивается термодинамическое равновесие, $\tau_N = 10.6$ мин – среднее время жизни нейтрона. В момент ”замерзания” относительное количество нейтронов равно:

$$\left(\frac{n_N}{n_N + n_P} \right)_f \simeq \frac{1}{6}. \quad (8.65)$$

К началу синтеза ядер при $T \simeq 10^9$ К ($E \sim 100$ КэВ) это отношение изменяется за счет β -распада нейтронов до величины

$$\frac{n_N}{n_N + n_P} \simeq \frac{1}{7}. \quad (8.66)$$

Единственный путь образования более сложных ядер лежит через цепь двухчастичных реакций, наиболее важные из которых требуют присутствия дейтерия D :



При температурах $\sim 10^{10}$ К образовавшийся дейтерий очень быстро вновь разрушается за счет фотодиссоциации, так как его энергия связи 2.2 МэВ мала по сравнению с энергией фотонов, которых к тому же в 10^9 раз больше, чем нуклонов. Дейтрон начнет ”сохраняться” при температурах $\sim 0.8 \cdot 10^9$ К.

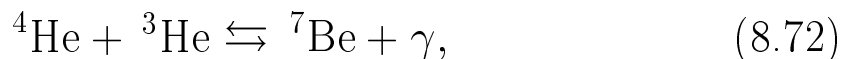
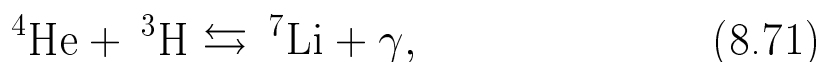
При таких условиях практически все нейтроны посредством цепочки реакций (8.67)–(8.69) превращаются в ${}^4\text{He}$. Кроме того, образуется небольшое количество D и ${}^3\text{He}$. Отношение массовой доли первичного ${}^4\text{He}$ к массе полной барионной материи можно оценить так. На создание ядра ${}^4\text{He}$ идет 2 нейтрона. Если все нейтроны из (8.65) пойдут на образование гелия, то

ядер гелия будет $n_{\text{He}} = n_N/2 = (n_N + n_P)/(7 \cdot 2)$. Если массу нуклона принять за единицу, то масса полученного гелия будет $4 n_{\text{He}}$. Следовательно, отношение масс гелия к полной массе барионов M должно быть следующим:

$$\frac{M_{\text{He}}}{M} = \frac{4(n_N + n_P)}{7 \cdot 2(n_n + n_P)} = \frac{2}{7}, \quad (8.70)$$

что близко к 25%. Это отношение между водородом и гелием находится в очень хорошем согласии с астрономическими данными о химическом составе атмосфер самых старых звезд, где, как можно полагать, преобладает "первичное" вещество, из которого звезды образовались.

Далее образуются меньшие количества ${}^7\text{Li}$ и ${}^7\text{Be}$ в результате реакций



Для лития, например, получено соотношение

$$10^{-10} < \frac{M_{{}^7\text{Li}}}{M_{\text{H}}} < 8 \cdot 10^{-10}, \quad (8.74)$$

что также хорошо согласуется с экспериментальными данными. На этом образование элементов в первоначальном ядерном синтезе заканчивается. Все остальные тяжелые элементы были образованы в звездах. Основную роль здесь играет β -распад при захвате нейтронов, в результате которого атомный номер ядра увеличивается на единицу.

Из распространенности ${}^4\text{He}$ во Вселенной, совпадающей с ее вычисленным значением, следует еще один интересный вывод:

в природе поколений нейтрино не может быть более трех. Действительно, скорость расширения Вселенной связана с плотностью $\rho(t)$:

$$v \sim R \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho(t)}. \quad (8.75)$$

При $T \sim 1$ МэВ во Вселенной все еще доминирует излучение, и в $\rho(t)$ главным образом дают вклад фотоны, электроны и нейтрино – релятивистские частицы:

$$\rho(t) = \rho_\gamma + \rho_e + \rho_\nu. \quad (8.76)$$

Момент ”замерзания” наступает, когда скорость процессов (8.61) становится меньше скорости расширения и число нейтронов начинает меняться только за счет их распада. Из (8.76) следует, что чем больше число типов нейтрино, тем быстрее происходит расширение Вселенной, тем раньше нейтрино покидает состояние термодинамического равновесия и отклонение $(n_N/n_P)_f$ определяется при более высокой температуре,

$$\left(\frac{n_N}{n_P}\right)_{f'} > \left(\frac{n_N}{n_P}\right)_f, \quad (8.77)$$

ядерный синтез начинается раньше, и доля первоначального гелия будет больше. Следовательно, доля первоначального гелия тем больше, чем больше существует типов нейтрино. Оказывается, что при содержании ${}^4\text{He} \sim 25\%$ только три поколения нейтрино не противоречат теории первоначального ядерного синтеза.

Подведем итог описанной в этой главе эволюции Вселенной.

В момент Большого Взрыва вещества еще не было. Был вакуум в сверхплотном состоянии ($\rho \sim 10^{94}$ г/см³) при температуре порядка $T \sim 10^{32}$ К. В таком состоянии вакуума имеется

плотность массы и давление, дающее начало экспоненциальному расширению. Начинается инфляционный период развития Вселенной. По мере расширения температура вакуума понижается до температуры Великого объединения, $T \sim 10^{14}$ К, вакуум переходит из неустойчивого вакуумподобного состояния в устойчивое, когда возникает спонтанное нарушение симметрии хиггсовского поля, частицы приобретают массы, и стадия инфляции переходит в стадию расширения по законам обычной гравитации. Этот процесс сопровождается освобождением гигантской энергии, которая впоследствии и приводит к рождению вещества.

Что ждет Вселенную в будущем? Будет ли она расширяться бесконечно или будет "пульсировать", т.е. с какого-то момента снова сжиматься? Ответ на этот вопрос зависит, как показывают решения уравнений ОТО, от соотношения критической плотности $\rho_{\text{крит}}$ и плотности ρ , наблюдаемой в настоящий момент. Если $\rho > \rho_{\text{крит}}$, то Вселенная будет пульсирующей. В противном случае ей предстоит расширяться бесконечно. Вопрос о плотности нашей Вселенной в настоящее время остается открытым, так как плотность видимого, светящегося вещества $\rho \sim 10^{-29}$ г/см³, но существует еще темная материя пока не выясненной до конца природы, и по некоторым данным ее количество превышает количество светящейся материи. Таким образом, есть надежда, что наша Вселенная все-таки окажется пульсирующей.

8.4. Гравитация

8.4.1. Черные дыры, белые карлики и эволюция звезд

Среди примерно 10^{11} звезд, составляющих нашу Галактику, встречаются звезды многих типов, но самые распространенные – это так называемые звезды главной последовательности, у которых наблюдается четко выраженная зависимость между интенсивностью излучения и температурой поверхности. Все звезды Галактики могут быть размещены на диаграмме Герцшпрунга–Рассела, которая связывает светимость звезды с температурой ее поверхности, или спектральным классом (рис. 8.10).

Светимость – это суммарная энергия звезды, излучаемая за 1 с. На диаграмме светимость звезды приведена в единицах светимости Солнца:

$$L_{\odot} = 4 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с.} \quad (8.78)$$

(в астрономии Солнцу соответствует символ $\odot$). Солнце также принадлежит главной последовательности. Это значит, что физика Солнца является и физикой большинства звезд нашей Галактики, а возможно, и других галактик, однако наше Солнце можно изучить намного подробнее. Его основные характеристики приведены в табл. 8.2.

Другие характеристики можно вычислить, используя закон тяготения Ньютона и закон обратной пропорциональности освещенности квадрату расстояния (табл. 8.3).

Теперь исходя из некоторых простых физических соображений можно найти еще ряд характеристик Солнца. Наиболее очевидное следствие вытекает из того факта, что Солнце мало

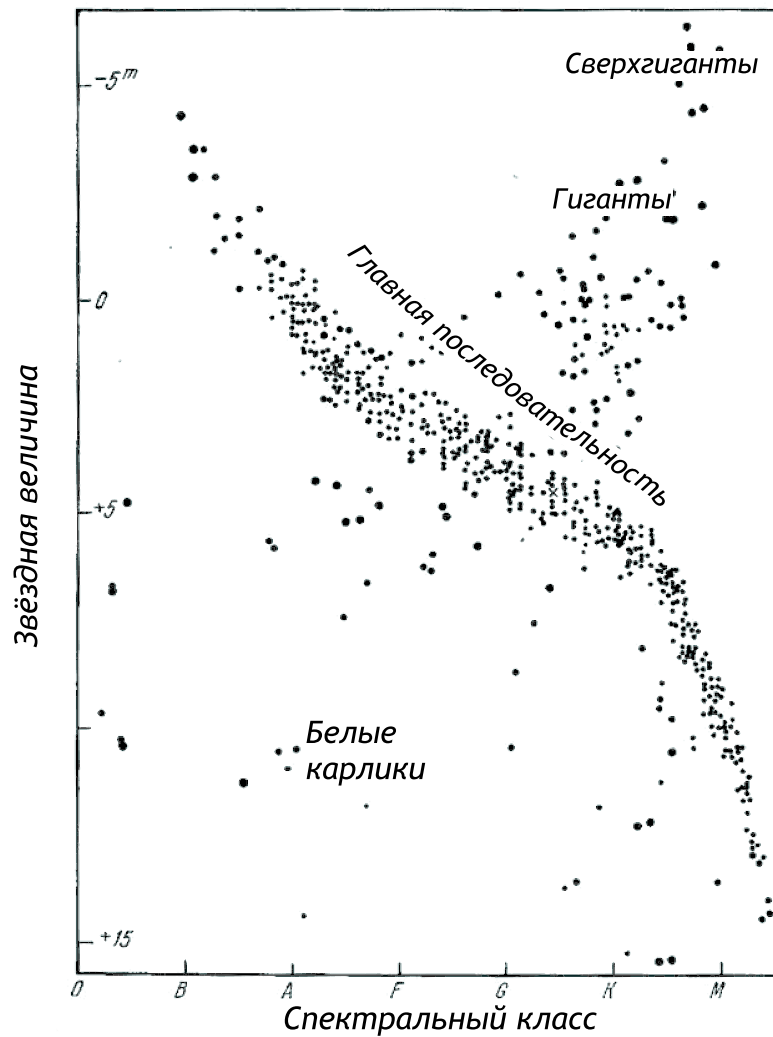


Рис. 8.10. Диаграмма Герцшпрунга–Рассела

изменялось на протяжении по крайней мере $3 \cdot 10^{16}$ с, или 10^9 лет. Если бы Солнце не поддерживалось какими-то внутренними силами, уравновешивающими силы тяготения, то за очень короткое время оно бы сжалось. Оценить это время просто: ускорение силы тяжести шара массой M равно $g \sim GM/R^2$, но поскольку $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, а $g \sim R/t^2$, то

$$t \sim (G\rho)^{-1/2}. \quad (8.79)$$

Подставляя $G \simeq 6.7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$, $\rho \simeq 1.4 \text{ г/см}^3$, получаем, что под действием гравитации Солнце сжалось бы за 3000 с,

Таблица 8.2. Наблюдаемые характеристики Солнца

Расстояние от Земли	$1.5 \cdot 10^{13}$ см
Угловой диаметр	6.5°
Солнечная постоянная (освещенность)	$1.5 \cdot 10^6$ эрг/ (см ² · с)
Возраст	$> 3 \cdot 10^{16}$ с
Период обращения Земли	$3 \cdot 10^7$ с

т.е. менее чем за час.

Для однородного шара массой $M_\odot$ и радиусом $R_\odot$ потенциальная гравитационная энергия

$$U = \frac{3}{5} \frac{G M_\odot^2}{R_\odot} \simeq 10^{48} \text{ эрг}, \quad (8.80)$$

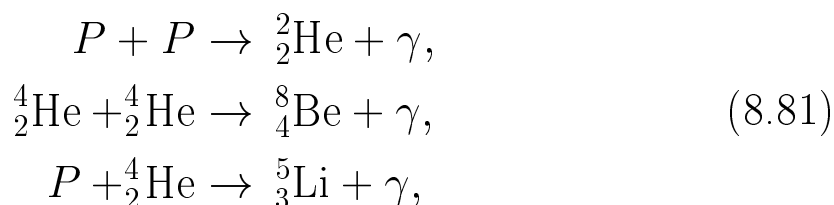
что составляет $5 \cdot 10^{14}$ эрг на 1 г солнечного вещества. Такой же должна быть и кинетическая энергия этого грамма, чтобы удерживать Солнце в равновесии, т.е. $T_{\text{кин}} = v^2/2$ должно быть порядка $5 \cdot 10^{14}$ эрг/г. Приравнивая кинетическую энергию ядра атома водорода (протона) к средней тепловой энергии $k_B T$, получаем $T \simeq 5 \cdot 10^6$ К. При этой температуре и протекают реакции по выгоранию водорода в гелий. Теперь необходимо подобрать такую последовательную цепочку реакций, чтобы они в совокупности приводили к энерговыделению, какое экспериментально наблюдается для Солнца. Хорошими "кандидатами" на эти процессы являются водородный цикл, или водородная цепочка, и цикл Бете (углеродный цикл.)

Водородный цикл. Об этом цикле уже говорилось в разделе о первоначальном ядерном синтезе. Отметим еще раз лишь основные моменты. Во-первых, вся цепочка реакций начинается с образования дейтрона. Этот процесс происходит за счет

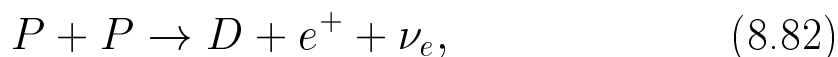
Таблица 8.3. Вычисленные характеристики Солнца

Радиус	$7 \cdot 10^{10}$ см
Масса	$2 \cdot 10^{33}$ г
Средняя плотность	1.4 г/см ³
Светимость	$4 \cdot 10^{33}$ эрг/с

слабого взаимодействия, без которого не начинался бы термоядерный синтез, потому что из простого объединения протонов гелий образоваться не может. Таких реакций,



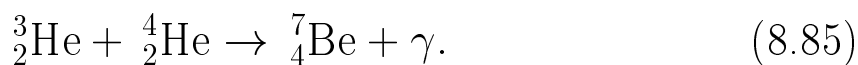
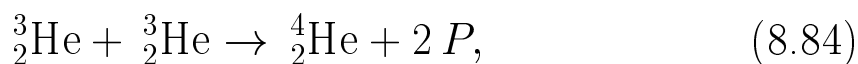
нет, потому что в природе изотопы ${}^2_2\text{He}$, ${}^8_4\text{Be}$ и ${}^5_3\text{Li}$ не существуют. Итак, весь цикл начинается с экзотической в земных условиях реакции с участием слабого взаимодействия:



и далее:

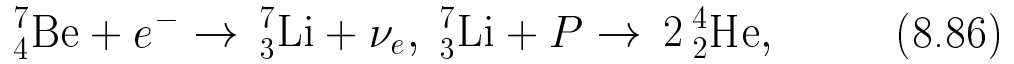


Ядро ${}^3_2\text{He}$ не может исчезать, присоединив протоны, так как изотопа ${}^4_3\text{Li}$ в природе тоже нет. Сгореть ядро ${}^3_2\text{He}$ может только при столкновении с ядрами изотопов ${}^3_2\text{He}$ и ${}^4_2\text{He}$:

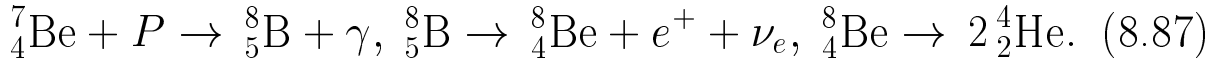


Если ядро сгорает по реакции (8.84), то цепочка ядерных реакций завершается: из четырех исходных протонов появилось

ядро ${}^4_2\text{He}$. Если же имеет место реакция (8.85), то цепочка завершается, либо как

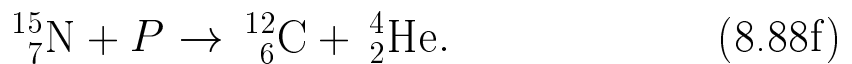
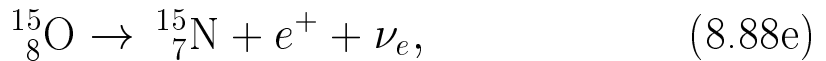
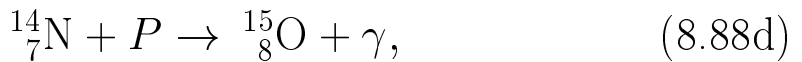
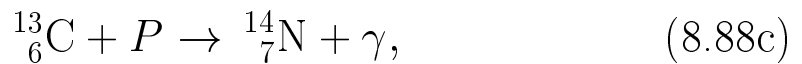
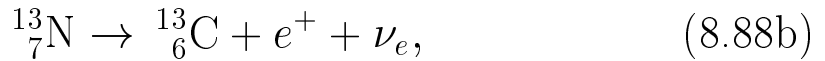
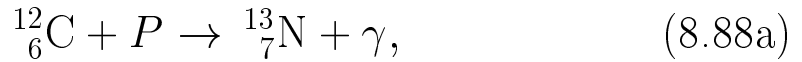


либо как



В итоге этих реакций четыре протона превращаются в ядро ${}^4_2\text{He}$. В процессе этого превращения выделяется 26.7 МэВ энергии. При этом в зависимости от типа завершающей реакции нейтрино уносит до 19% этой энергии.

Углеродный цикл (Х. Бете, 1939 г.). В этом цикле уже образуются и более тяжелые элементы как промежуточные звенья, в итоге также происходит превращение четырех протонов в ${}^4_2\text{He}$:



В этих реакциях ¹ в целом выделяется 26.8 МэВ, из которых 1.7 МэВ уносится нейтрино.

Изучение солнечных нейтрино имеет важное значение, так как именно нейтрино несут информацию о том, что творится

¹Из приведённой схемы видно, что углерод не затрачивается (число ядер ${}^{12}_6\text{C}$ в начале и конце реакции остается постоянным), а выполняет роль катализатора, обеспечивающего превращение водорода в гелий.

в недрах звезды, поскольку они пронизывают эти недра практически беспрепятственно в отличие от фотонов и γ -квантов. Нейтринные детекторы существуют в нескольких лабораториях мира, они имеют разную конструкцию, но результаты измерений дают примерно одинаковую оценку: количество детектируемых нейтрино часто меньше расчетного. Это несоответствие объясняется тем, что детекторы настроены на обнаружение электронных нейтрино ν_e , в то время как экспериментально доказано, что существуют так называемые нейтринные осцилляции. На самом деле нейтрино находятся в суперпозиции состояний ν_e и ν_μ (а может быть, и ν_τ).

Что произойдет со звездой, если весь водород в центральной наиболее горячей области превратится в гелий? Звезда будет охлаждаться, сжиматься, пока гравитационная энергия не разогреет ее до температуры, при которой начнется новая цепочка реакций, сопровождающаяся образованием более тяжелых элементов из-за выгорания гелия и новым выделением энергии. Звезда "раздувается", светимость ее резко увеличивается, и она переходит в красные гиганты (большая светимость и низкие температуры). Там она будет "блуждать" – то охлаждаться, то разогреваться снова, пока в ней не закончатся вообще все возможные ядерные реакции. А что будет потом? Дальнейшая судьба зависит от ее массы.

Поскольку все источники энергии негравитационного происхождения закончились, звезда начинает сжиматься за счет гравитации. При высоких плотностях ($\rho > 10^3$ г/см³) в веществе существуют уже не атомы и молекулы, а только "голые" ядра и электроны, и здесь решающую роль начинают

играть квантовые эффекты. При плотности $\rho > 10^6$ г/см³ (а такая плотность рано или поздно при сжатии будет достигнута) электронный газ становится вырожденным. Из теории вырожденного ферми-газа следует, что в нем существует специфическое квантовое давление (отталкивание):

$$P_{\text{газ}} \simeq \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \rho^{4/3}. \quad (8.89)$$

Гравитационное давление, создаваемое силами притяжения в центре звезды, равно

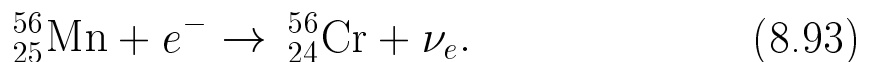
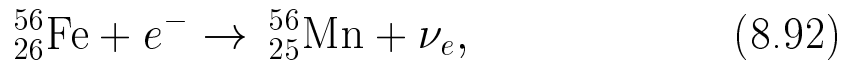
$$P_{\text{грав}} \simeq \frac{G M^2}{R^4} \simeq G M^{2/3} \rho^{4/3}, \quad R = \left(\frac{3M}{4\pi \rho} \right)^{1/3}. \quad (8.90)$$

Из условия равенства давлений $P_{\text{газ}} = P_{\text{грав}}$ следует критическая масса звезды, для которой электронный газ еще может остановить гравитационное сжатие, и звезда будет находиться в равновесном состоянии:

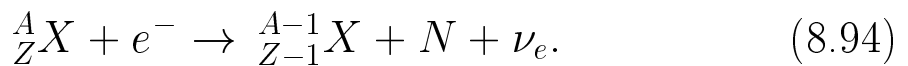
$$M_{\text{кр}} \simeq 1.44 M_{\odot}. \quad (8.91)$$

Такие звезды – белые карлики. Они имеют радиус всего около 0.01 солнечного, плотность $\rho \sim 10^6$ г/см³. Яркость их очень мала, поэтому они и располагаются в левом нижнем углу диаграммы (см. рис. 8.10). Как видно из (8.90), наше Солнце ожидает судьба белого карлика.

Если масса звезды больше $1.44 M_{\odot}$, то давление электронного вырожденного газа уже не сможет противостоять дальнейшему гравитационному сжатию. Граничная энергия Ферми электронного газа начнет превышать верхнюю границу β -спектра ядра ^{56}Mn , и начнется процесс "обратного" β -распада:



С увеличением плотности и, следовательно, граничной энергии Ферми будут появляться ядра со все большей границей β -распада. Как мы видим, в результате процессов типа (8.92) и (8.93) в ядрах при уменьшении числа протонов увеличиваются числа нейтронов. В конце концов атомные ядра окажутся настолько перегруженными нейтронами, что захват электронов будет сопровождаться испусканием свободных нейтронов:



Данный процесс будет идти до тех пор, пока почти все вещество звезды не превратится в свободные нейтроны. Это уже нейтронная звезда. И снова вырожденный ферми-газ, теперь уже нейтронный, создает давление, определяемое формулой (8.88), только в ней массу электрона m_e нужно заменить на массу нейтрона M_N . Такое давление, как показывают теоретические оценки, может стабилизировать звезду вплоть до массы

$$M_{\text{крит}} \sim (1.6 - 2) M_{\odot}. \quad (8.95)$$

Радиусы нейтронных звезд имеют порядок нескольких километров, а плотность в них ядерная: $10^{14} - 10^{15}$ г/см³. Теоретически предсказанные нейтронные звезды были отождествлены с открытыми в 1967 г. в Кавендишской лаборатории Кэмбриджа пульсарами. Пульсары – источники радиоизлучения. (Первое время даже были мысли о том, что это сигналы каких-то внеземных цивилизаций.) Периоды между импульсами $\sim 1/30$ с - 1 с; общая интенсивность $\sim 10^{36} - 10^{38}$ эрг/с (для Солнца это $2 \cdot 10^{33}$ эрг/с). Теоретические расчеты показали, что пульсаром может быть только быстро вращающаяся сильно намагниченная нейтронная звезда. Ее магнитно-

дипольное излучение должно быть сосредоточено в узком конусе, ось которого перпендикулярна направлению магнитного момента. Импульсный характер радиоизлучения объясняется "эффектом маяка" – Земля периодически попадает в конус излучения.

Если масса звезды на конечной стадии эволюции окажется больше $2 M_{\odot}$, то концом эволюции является бесконечное гравитационное сжатие – гравитационный коллапс, поскольку квантовое внутреннее давление вещества уже не может противостоять гравитационному давлению. В рамках классической теории получается, что звезда должна сжиматься в точку. В общей теории относительности показано, что для удаленного от коллапсирующей звезды наблюдателя (т.е. находящегося вне ее гравитационного поля) радиус звезды асимптотически стремится к гравитационному радиусу, или радиусу Шварцшильда:

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (8.96)$$

который получил точное решение уравнений ОТО для сферически симметричного поля тяготения. Тем не менее выражение (8.96) допускает простое физическое толкование. Даже в классической механике вторая космическая скорость, необходимая для удаления на бесконечность пробного тела от шара радиусом R и массой M , определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (8.97)$$

Подставив в (8.97) $v = c$, получим, что этот шар должен иметь радиус, равный r_g из (8.96). Поскольку никакое тело не может двигаться со скоростью, большей скорости света c , то ника-

кой сигнал не может быть получен от объекта, зашедшего за свой гравитационный радиус. Такой объект называется "черной дырой".

Интересен анализ процессов, сопровождающих переход звезды в состояние гравитационного коллапса. Рассмотрим этот сценарий на примере простой шварцшильдовской звезды, незаряженной и невращающейся. Это сферически симметричная черная дыра, характеризующаяся только массой. Для наглядности поместим на звезду до начала коллапса обреченного наблюдателя с мощным прожектором, который направляет лучи в разные стороны. Так как вещество звезды пока распределено в достаточно большом объеме пространства, гравитационное поле у поверхности звезды остается достаточно слабым. Поэтому луч прожектора распространяется прямолинейно или почти прямолинейно. Однако после начала коллапса вещество звезды сжимается в объеме, тяготение у ее поверхности возрастает, при этом увеличивается кривизна пространства-времени, что и приводит к отклонению светового луча от прямолинейного распространения. Сначала лучи, направленные под малым углом к горизонту, отклоняются вниз к поверхности звезды. В дальнейшем, по мере развития коллапса, исследователю приходится направлять лучи вверх все ближе к вертикали, чтобы они могли навсегда уйти от звезды. В конце концов на некоторой критической стадии развития коллапса свет, испущенный прожектором, будет падать вниз, куда бы первоначальный луч ни был направлен. В этом случае говорят, что звезда прошла свой горизонт событий. Вокруг черной дыры образуется "фотонная сфера". Она

создается светом, оббегающим вокруг сколлапсировавшей звезды по всевозможным круговым орбитам. Ничто, опустившееся за горизонт событий, не может вырваться наружу – ни свет, ни радиоволны. Исследователь вместе со звездой буквально исчезает из внешней Вселенной. Такая шварцшильдовская черная дыра имеет структуру, изображенную на рис. 8.11.

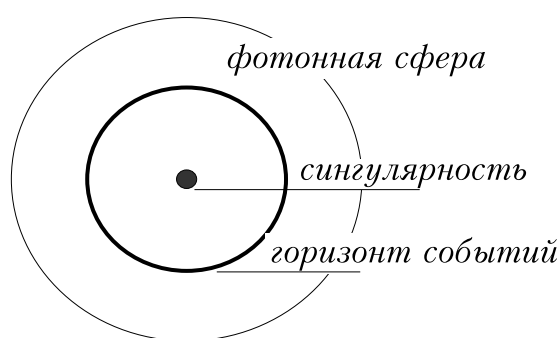


Рис. 8.11. Простейшая черная дыра

Сферический горизонт событий представляет собой "поверхность" черной дыры. В центре ее находится сингулярность – точка, в которую звезда будет продолжать сжиматься уже и за горизон-

том событий, так как ничто не может остановить ее дальнейшее сжатие. В точке сингулярности будут бесконечное давление, бесконечная плотность и кривизна пространства-времени.

Диаметр фотонной сферы пропорционален массе звезды; массе звезды пропорционален и диаметр горизонта событий, однако коэффициенты пропорциональности различаются. Так, для звезды с массой $M = 3 M_{\odot}$ диаметр фотонной сферы равен 26 км, а диаметр горизонта событий 18 км.

За какое время звезда переходит в состояние гравитационного коллапса? На этот вопрос можно ответить, наблюдая за светимостью звезды. Далекий наблюдатель будет принимать идущий от звезды свет, испущенный в пределах некоторого конуса, так как за пределами конуса свет будет погибать и возвращаться к звезде (рис. 8.12).

Поведение конуса выхода дает первое важное указание на

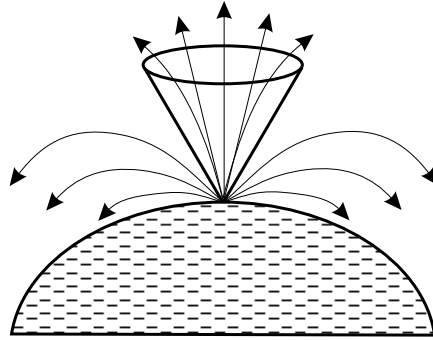


Рис. 8.12. Распространение света от коллапсирующей звезды

то, как должна выглядеть звезда, которая превращается в черную дыру. По мере "схлопывания" конуса звезда будет казаться наблюдателю все более и более слабой. Это убывание яркости умирающей звезды происходит очень быстро. На рис. 8.13 показано изменение светимости звезды с $M = 10 M_{\odot}$. Видно, что всего через 10^{-3} с светимость упадет до 2% от первоначальной, а через 10^{-2} с она составляет 10^{-15} от первоначальной светимости.

Одновременно с быстрым ослаблением яркости умирающей звезды вступает в игру и другой эффект. Как следует из ОТО, тяготение вызывает замедление времени. Этот эффект называется гравитационным крас-

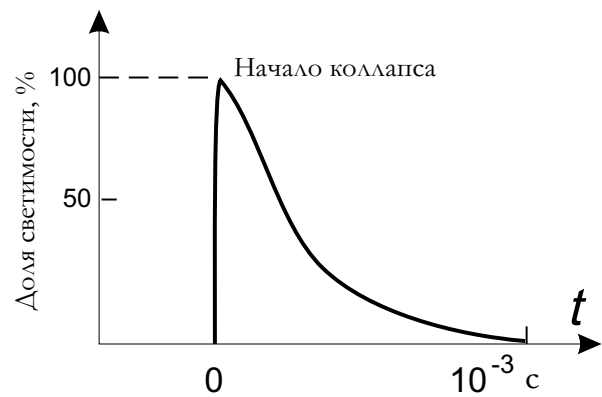


Рис. 8.13. Светимость коллапсирующей звезды

ным смещением, так как свет, испускаемый атомами в сильном гравитационном поле, "смещается" в сторону более длинных волн. Поэтому для наблюдателя коллапсирующая звезда становится и слабой, и излучающей свет все более длинных, "красных" волн.

Замедление хода времени, которое почти невозможно заметить в слабом гравитационном поле Земли, в процессе образования черной дыры становится фактором фундаментальной важности. Расчеты показывают, что по мере приближения к горизонту событий время все более замедляется, а на самом горизонте оно полностью останавливается. Рассмотрим это явление на примере камня, брошенного в черную дыру очень далеким от нее наблюдателем. Наблюдая движение камня, мы увидим, что по мере приближения к черной дыре он падает все быстрее и быстрее. Если бы верна была теория Ньютона, то камень продолжал бы увеличивать скорость и врезался в сингулярность с практически бесконечной скоростью. В сильном гравитационном поле эти расчеты неверны. Когда камень подлетает к горизонту событий, начинает преобладать замедление времени; камень падает все медленнее и совсем останавливается, потому что для внешнего наблюдателя время перестает течь. Оставаясь вдалеке от черной дыры, необходимо прождать бесконечно долгий промежуток времени, чтобы увидеть, как камень пересечет горизонт событий (рис. 8.14).

Однако тот, кто (по несчастью) будет падать вместе с камнем, будет наблюдать совершенно иную картину. Свободно падающий наблюдатель не сможет заметить замедление времени. Его часы, пульс и другие процессы в его системе будут идти так же, как и раньше. С точки же зрения далекого неподвижного наблюдателя, все эти процессы у падающего замедлились в одной и той же пропорции. По часам падающего наблюдателя он в очень короткий срок пересечет горизонт событий и далее за тысячные доли секунды неуклонно достигнет

Таблица 8.4. Радиусы черных дыр с разными массами

1 тонна	$13 \cdot 10^{-15} \text{ \AA}$
10^6 тонн	$13 \cdot 10^{-9} \text{ \AA}$
10^{15} тонн	13 $\text{\AA}$
1 масса Земли	0.8 см
1 масса Юпитера	2.8 м
1 масса Солнца	3 км
2 массы Солнца	6 км
3 массы Солнца	9 км
5 масс Солнца	15 км
100 масс Солнца	300 км
10^{15} масс Солнца	320 световых лет

сингулярности. Ниже приведены некоторые радиусы черных дыр, обладающих различными массами (табл. 8.4).

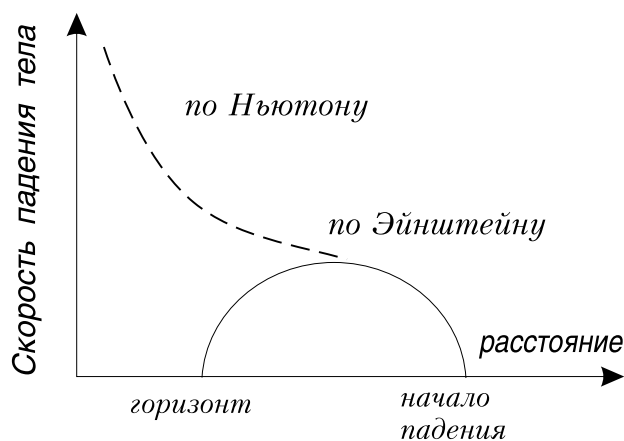


Рис. 8.14. Скорость тела при свободном падении на черную дыру

Вопрос о том, является ли состояние сколлапсировавшей звезды стационарным, равновесным, прежде всего возник в далекой, на первый взгляд, от космологии области — в термодинамике. В самом деле, упавшее внутрь черной дыры тело

полностью исчезает из мира, доступного восприятию внешнего наблюдателя. Исчезает и содержащаяся в теле энтропия. Таким образом, наблюдатель сталкивался бы с нарушением второго начала термодинамики: энтропия изолированной системы не может уменьшаться, она должна возрастать либо оставаться постоянной.

Выход из этой ситуации нашел Стивен Хокинг в 1975 г.

Утверждение, что конечное состояние черной дыры стационарно, правильно лишь в рамках обычной, неквантовой теории тяготения. Квантовые эффекты ведут к тому, что черная дыра должна непрерывно излучать, теряя свою энергию подобно черному телу. Хокинг показал, что в гравитационном поле черной дыры физический вакуум становится неустойчивым. Постоянно рождающиеся в вакууме виртуальные частицы восполняют свою энергию за счет движения в гравитационном поле и могут превратиться в реальные долгоживущие частицы. Рассмотрим этот эффект подробнее.

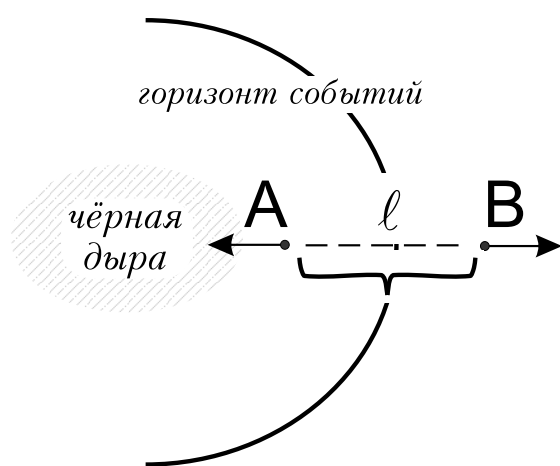


Рис. 8.15. Рождение пары в поле черной дыры

На рис. 8.15 изображен процесс рождения пары вблизи горизонта событий черной дыры. Для появления реальной частицы с энергией E (частицы обозначены сплошными стрелками) необходимо, чтобы частицы, находясь еще в виртуальном состоянии

(штриховая линия), разошлись на расстояние ℓ , на котором работа поля равна E . Одна частица (A) падает внутрь черной дыры, другая за счет квантового туннельного эффекта уходит наружу к внешнему наблюдателю. Совокупность частиц B и есть излучение Хокинга. Таким образом, квантовые свойства вакуума проявляются в том, что черная дыра "обязана" излучать частицы разных сортов, в том числе и кванты света.

Не приводя последовательных расчетов Хокинга, остановимся лишь на выводах его теории. Изучая свойства этого

излучения, Хокинг пришел к неожиданному заключению, что оно имеет тепловой характер: черная дыра массы M светит точно так же, как черное тело радиусом r_g , нагретое до температуры

$$\theta = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_B M G} \simeq 1.23 \cdot 10^{26} M^{-1}, \quad (8.98)$$

где k_B – постоянная Больцмана, температура измеряется в кельвинах, масса – в граммах. При этом не только спектр излучения (его распределение по частотам), но и более тонкие его характеристики (например все корреляционные функции) точно такие же, как у излучения черного тела.

Из формулы (8.98) видно, что чем меньше масса черной дыры, тем больше ее температура, а значит, и интенсивность излучения. В то же время масса черной дыры при излучении уменьшается (это следует из закона сохранения энергии и соответствует тому факту, что падающая внутрь частица имеет отрицательную энергию). Поэтому температура черной дыры и интенсивность ее излучения быстро растут со временем; рождаются все более тяжелые частицы, когда температура достигнет значения их энергии покоя. В итоге за характерное время

$$t \sim G^2 M^3 / \hbar c^4 \sim 10^{-28} M^3 \quad (8.99)$$

(здесь t – в секундах, M – в граммах) черная дыра полностью испаряется! Толщина барьера вокруг черной дыры пропорциональна ее размеру. Поэтому для тяжелых звезд время t оказывается очень большим, так как поначалу лишь очень немногие частицы могут пройти через этот барьер. Например, черная дыра с массой Солнца просуществует 10^{66} лет. Вместе с тем первобытные черные дыры, возникающие вследствие

флуктуаций плотности во время Большого Взрыва, например с массой $\sim 10^{15}$ г, испарилась бы как раз за время, прошедшее с начала расширения Вселенной.

Последняя стадия испарения черной дыры происходит так быстро, что заканчивается страшным взрывом. Мощность его зависит от того, как много в черной дыре разновидностей элементарных частиц. Если учесть, что частицы состоят из шести разновидностей кварков, то, как подсчитал Хокинг, в последнем взрыве выделится энергия, равная энергии почти 10 млн мегатонных водородных бомб ($\sim 10^{30}$ эрг).

Проблема поиска реально существующих черных дыр звездной массы сводится прежде всего к отысканию компактных объектов в системах двойных звезд с массой $> 3 M_{\odot}$. Среди этих объектов имеются такие, когда видима лишь одна звезда массы M , но движется она так, как будто находится в паре с другой, невидимой звездой. В ее спектре наблюдается периодическое доплеровское смещение линий, измерив период и амплитуду которого, можно оценить массу второй, невидимой звезды M_X . Для маломассивных двойных систем $M_X \gg M$. В настоящее время известно несколько таких систем с компактными объектами – кандидатами в черные дыры: Лебедь X-1 ($M_X > 6 - 15 M_{\odot}$), V404 Лебеда ($M_X > 8 M_{\odot}$), A0620-00 ($M_X > 4 M_{\odot}$), рентгеновская новая в созвездии Мухи ($M_X > 4 M_{\odot}$). От всех этих объектов идет интенсивное рентгеновское излучение, возникающее вследствие торможения частиц, испускаемых видимой звездой, в сильном гравитационном поле невидимой.

Возможность существования сверхмассивных черных дыр в

центрах галактик можно проверить, изучая движение вокруг них звезд и межзвездного вещества. Например, для галактики М 87 в созвездии Девы подобные исследования дают оценку центральной массы $M \sim (10^8 - 10^9) M_{\odot}$. Такая гигантская масса сосредоточена в малой области в центре этой галактики, что возможно лишь при наличии там черной дыры. Аналогичные выводы следуют и из наблюдения вращающегося тора из газа и пыли вокруг центра галактики NGC 4258 – для плотности вблизи центра получены оценки $\sim 4 \cdot 10^9 M_{\odot}/\text{пк}^3$. Объект с такой плотностью не может быть звездным скоплением; столкновения звезд должны привести к возникновению сверхмассивной черной дыры.

8.4.2. Квантовая гравитация

Теперь возвратимся от звезд и галактик к микрообъектам и обсудим роль гравитации в событиях микромира. Обычно гравитационным взаимодействием между элементарными частицами пренебрегают вследствие малости их массы.

Впервые вопрос о совместимости ОТО и квантовой теории возник у Эйнштейна. После создания своей теории в 1916 г. он сразу стал рассматривать вопрос о гравитационных волнах, само существование которых вытекало из уравнений ОТО. Была выведена формула для интенсивности гравитационного излучения $\sim M^2$, его поляризации и скорости распространения c . Гравитационное излучение должно возникать при слабых возмущениях гравитационного поля, при ускоренном движении масс. Эйнштейн, неожиданно для себя, заметил следующее: ”... атом, вследствие внутриатомного движения электронов, должен излучать не только электромагнит-

ную, но и гравитационную энергию, хотя и в ничтожном количестве. Поскольку в природе в действительности ничего подобного не наблюдалось, то, по-видимому, квантовая теория должна модифицировать не только максвелловскую электродинамику, но также и новую теорию гравитации.”

Здесь Эйнштейн имеет в виду неразрешимую для доквантовой физики проблему стабильности атома. Если квантовая механика решает проблему стабильности атома, испускающего электромагнитное излучение (электрон не излучает непрерывно, а лишь при

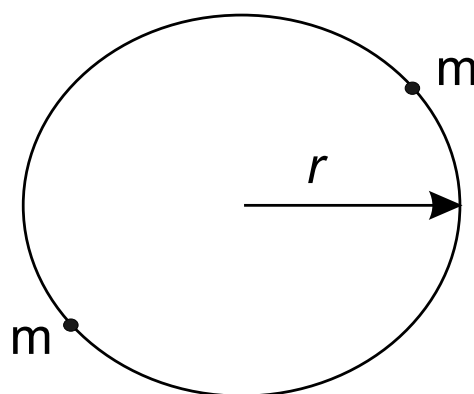


Рис. 8.16. Пример, используемый для установления границ квантовой гравитации

переходе с одной стационарной орбиты на другую), то вопрос о гравитационной нестабильности остается. Если воспользоваться формулой Эйнштейна для интенсивности гравитационного излучения, то окажется, что ”высвечивание”, т.е. потеря энергии атома в форме гравитационных волн, должно произойти за время $t \sim 10^{36} \text{ с} \sim 10^{29} \text{ лет}$.

В 1935 г. М. Бронштейн выполнил первое глубокое исследование, посвященное квантованию гравитационного поля. В результате он пришел к выводам, для пояснения которых обязательно знать уравнения Эйнштейна, достаточно воспользоваться ньютоновской теорией тяготения и постулатами Бора.

Рассмотрим простую систему, состоящую из двух одинаковых частиц массой m , связанных гравитационным взаимодействием и вращающихся по круговой орбите радиусом r со скоростью v (рис. 8.16). Такую систему можно было бы назвать

”молекулой гравития”. Она же моделирует и двойную звездную систему; все зависит от величины m и r . С точки зрения классической механики, состояние такой системы будет равновесным, если центробежная сила, действующая на каждую частицу, будет равна центростремительной силе притяжения:

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{G m^2}{(2r)^2}. \quad (8.100)$$

Теперь допустим, что эта система должна подчиняться и постулатам Бора, т.е. ее полный угловой момент должен быть кратен постоянной Планка:

$$2m v r = n \hbar, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.101)$$

Допустим также, что частицы движутся со скоростями, близкими к скорости света, например пусть их скорость находится в пределах от $c/2$ до c . Тогда из (8.100) получаем $v = \frac{1}{2}\sqrt{Gm/r}$, и

$$\frac{c}{2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}} \leq c. \quad (8.102)$$

Вместе с тем квантование момента будет существенно, если движение происходит в области малых квантовых чисел n , например $1 \leq n \leq 2$. Поскольку из (8.101) $n = \sqrt{Gm^3r}/\hbar$, то имеем неравенство

$$1 \leq \frac{\sqrt{Gm^3r}}{\hbar} \leq 2. \quad (8.103)$$

Из (8.102) следует, что релятивистскую теорию необходимо применять, если масса m находится в следующих пределах:

$$m \geq \frac{c^2}{G} r \quad (a), \quad m \leq \frac{4c^2}{G} r \quad (б). \quad (8.104)$$

Из (8.101) следует, что квантовую механику для описания такой системы необходимо использовать, если имеют место соотношения

$$m \geq \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{G}} r^{-1/3} \quad (a), \quad m \leq \sqrt[3]{\frac{2\hbar^2}{G}} r^{-1/3} \quad (б). \quad (8.105)$$

На рис. 8.17 эти неравенства делят пространство $m(r)$ на части, каждая из которых соответствует применимости либо ньютоновской теории (G), либо области ОТО (сG), либо релятивистской квантовой гравитации ($G\hbar$), либо области релятивистских квантово-гравитационных явлений ($cG\hbar$).

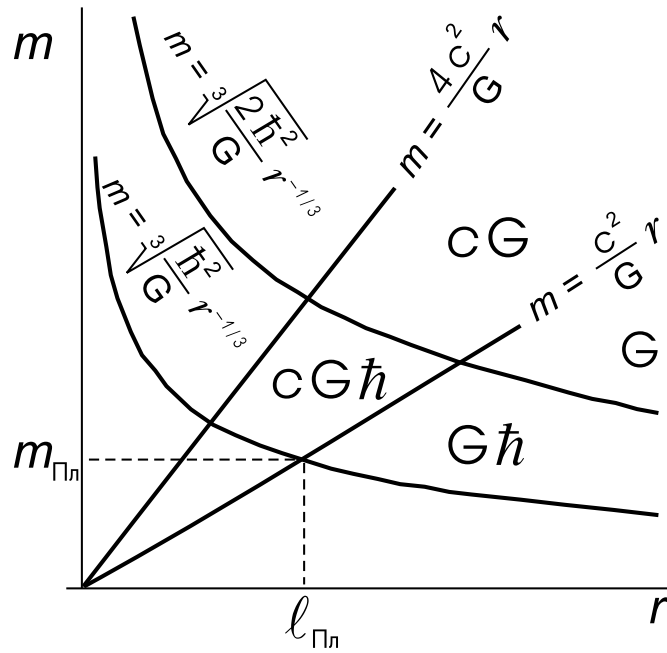


Рис. 8.17. Границы применимости теорий (G), (сG), ($G\hbar$), ($cG\hbar$)

Кривые (8.104а) и (8.105а) пересекаются в точке, определяемой из уравнения

$$\frac{c^2}{G} r = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{G}} r^{-1/3}, \quad (8.106)$$

откуда следует, что

$$r = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = \ell_{\text{Пл}}. \quad (8.107)$$

Подстановка (8.107) в любую из формул – (8.104а) или (8.105а) – дает выражение для массы m :

$$m = \sqrt{\frac{c \hbar}{G}} = m_{\text{Пл.}} \quad (8.108)$$

Заштрихованные области соответствуют невозможным значениям параметров, для которых получается $v > c$ или $n < 1$.

Более серьезный анализ также приводит к планковским величинам как к границам области квантово-гравитационных явлений. Этот вывод оказывается чрезвычайно важным, если вспомнить космологию и раннюю Вселенную. С точки зрения теории горячей Вселенной, все началось именно с планковских величин. В начальный период космологического расширения определяющими были квантово-гравитационные явления, что не могло не сказаться на дальнейшей эволюции Вселенной. Есть серьезные основания считать, что подлинное решение таких проблем космологии, как крупномасштабная изотропия и галактическая структура Вселенной, происхождение реликтового излучения и удельной энтропии, может быть достигнуто только при учете начальных космологических условий, а также процессов, характерных для квантовой гравитации.

Квантовое гравитационное поле также совершает нулевые колебания, и связанная с ним геометрия тоже колеблется (связь гравитационного поля с геометрией пространства определяется в ОТО). Чем меньше масштаб, тем больше относительные отклонения от Евклидовой геометрии. Оценим порядок величины (длину волны) нулевых гравитационных колебаний, при которых геометрия совсем не похожа на Евклидову. Степень отклонения от Евклидовой геометрии характеризует-

ся безразмерным параметром

$$\zeta = \frac{\varphi}{c^2}, \quad (8.109)$$

где φ – гравитационный потенциал. Если $\zeta \ll 1$ – геометрия Евклидова, если $\zeta = 1$ – всякое сходство с этой геометрией исчезает.

Энергия колебаний пространственного масштаба ℓ равна $E = \hbar\omega \sim \hbar c/\ell$, гравитационный потенциал $\varphi = G m/\ell$, но $m = E/c^2$, поэтому

$$\varphi = \frac{G E}{\ell c^2} = \frac{G \hbar}{\ell^2 c}, \quad (8.110)$$

и для отношения ζ получаем следующую оценку:

$$\zeta = \frac{G \hbar}{\ell^2 c^3}. \quad (8.111)$$

Геометрия полностью искажается, если $\zeta = 1$, т.е. на масштабе планковской длины

$$\ell = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} = \ell_{\text{Пл}}. \quad (8.112)$$

Итак, возникшие в первые моменты расширения Вселенной квантовые флуктуации гравитационного поля, как пишет их исследователь А. Линде, *”расширились на все небо, замерзли там, изменили немножечко геометрию Вселенной и плотность вещества, изменили за счет этого температуру реликтового излучения, которое к нам приходит, и поэтому неоднородности этого излучения являются фотографией тех квантовых флуктуаций, которые возникли на последних стадиях инфляции. Мы видим фотографию того, что произошло с $10^{\text{й}}$ – $30^{\text{й}}$ секунды после Большого Взрыва”*.

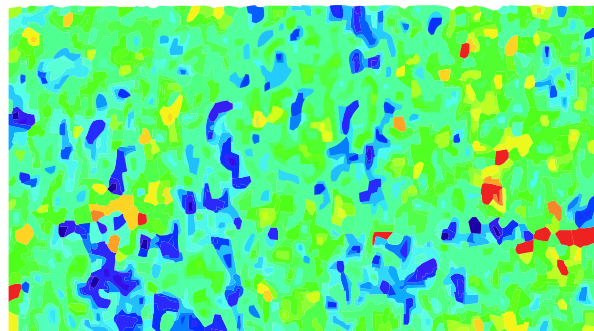


Рис. 8.18. Флуктуации температуры реликтового излучения

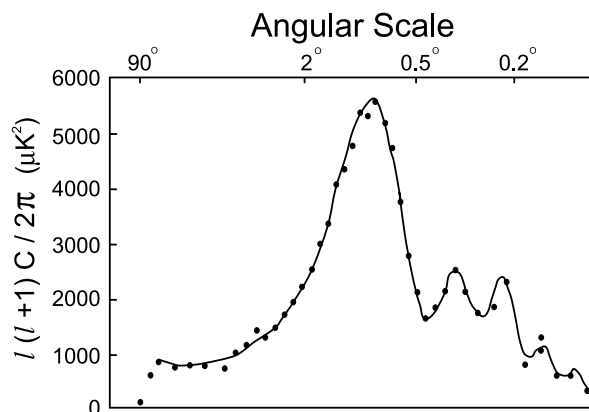


Рис. 8.19. Анизотропия микроволнового излучения, полученная спутниками WMAP

Современные радиотелескопы, установленные на спутниках, измеряют и фотографируют флуктуации реликтового излучения с точностью до 10^{-5} К! Фотография квантовых флуктуаций размером в полнеба, приведенные на рис. 8.18, получены спутниками WMAP. Более того, снят спектр микроволнового излучения в зависимости от угловых размеров этих флуктуаций (рис. 8.19). Здесь точки – это то, что экспериментально видит WMAP, сплошная линия – теоретические предсказания простейшей модели инфляционной Вселенной.

В свете $sG\hbar$ -теорий могут проясниться не только космологические проблемы, но и астрофизические, в частности конечная стадия эволюции звезд – гравитационный коллапс.

С точки зрения современной физики наиболее вероятным считается построение $sG\hbar$ -теории в рамках единой теории фундаментальных взаимодействий на основе синтеза идей ОТО и принципа калибровочной симметрии. Однако история попыток объединения квантовой теории поля и общей теории относительности в минувшие десятилетия была печальной. Они неизменно разваливались из-за появления бесконеч-

ностей (расходимостей) или нарушали некоторые почитаемые физические принципы, вроде принципа причинности. Мощные методы теории перенормировок, разработанные в квантовой теории поля за последние десятилетия, не смогли устранить расходимости квантовой теории гравитации. В настоящее время наибольшие надежды на действительное объединение общей теории относительности и квантовой теории поля возлагаются на теорию суперструн. Суперструны обладают намного большим набором калибровочных симметрий, чем любая другая теория. Кроме симметрий ОТО и калибровочных теорий электрослабого и сильного взаимодействий, они также содержат в качестве подмножеств симметрии супергравитации и теории Великого объединения.

8.4.3. Суперструны

Теория суперструн возникла как наиболее многообещающий кандидат на роль квантовой теории всех известных взаимодействий. Она позволила объединить обе великие фундаментальные физические теории – квантовую теорию поля и общую теорию относительности – в рамках единого подхода.

Теория суперструн вводит в теоретическую физику совершенно новую физическую картину мира и новую математику, изумившую даже математиков. Выросшая из теории суперструн математика связала воедино самые непохожие, далеко отстоящие друг от друга области математики, такие как римановы поверхности и пространства, экзотические алгебры, модулярные группы. В этом разделе мы познакомимся лишь с основными идеями данной теории, не вдаваясь в подробности и детальное обсуждение затронутых вопросов.

Квантовая теория поля добилась убедительного успеха в объяснении физики микромира вплоть до расстояний 10^{-15} см. Но, как было показано ранее, квантовые свойства гравитации проявляются на расстояниях порядка длины Планка 10^{-33} см, и устранить расходимости S -матрицы при высоких энергиях (малых расстояниях) так, как это делается в квантовой теории поля, не представляется возможным. Используемая в квантовой электродинамике процедура перенормировки в данном случае не может быть применима. Следовательно, необходимо создавать теорию, которая была бы конечной в каждом порядке относительно константы гравитационного взаимодействия и вообще не нуждалась бы в перенормировке.

Такую теорию оказалось возможным строить в предположении, что частицы не являются точечными объектами, а представляют собой одномерные протяженные объекты, или струны. Эти струны подчиняются законам квантовой механики, могут вибрировать с определенными модами, перемещаться целиком или завиваться как пружина, замыкаться в петлю, вращаться и иметь ненулевой угловой момент. Обширное семейство разнообразных элементарных частиц отражено множеством возможных форм колебания струны. Поскольку на представлении о струнах строится теория супергравитации, то часто и сами струны называются суперструнами.

На примере двухпетлевой фейнмановской диаграммы для рассеяния двух точечных частиц

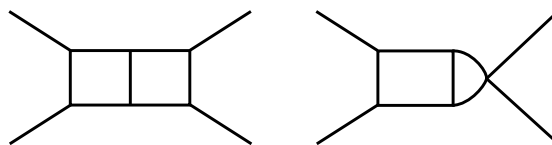


Рис. 8.20. Двухпетлевая фейнмановская диаграмма для рассеяния двух точечных частиц

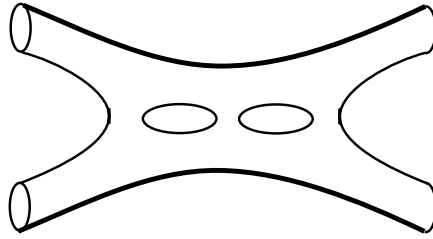


Рис. 8.21. Двухпетлевая фейнмановская диаграмма для рассеяния замкнутых струн

рассеяния двух точечных частиц, изображенной на рис. 8.20, проиллюстрируем, каким образом такая концепция устраняет расходимости. Согласно этой диаграмме, расходимость возникает, если стянуть в точку одну из внутренних линий. Теперь рассмотрим рассеяние двух замкнутых струн. Соответствующая двухпетлевая диаграмма изображена на рис. 8.21.

В этом случае топологически невозможно стянуть в точку одну из замкнутых линий, и расходимость не возникает.

Теория суперструн обладает намного бóльшим набором калибровочных симметрий, чем любая другая теория из представленных ранее. Они реализуются в случаях, если энергия частиц и переданные ими импульсы имеют порядок массы Планка или больше ($E \geq 10^{19}$ ГэВ). Ниже планковской массы теория супергравитации должна переходить в квантовую теорию поля с суперсимметрией и точечными частицами. Калибровочная группа $E(8) \otimes E(8)$ хорошо описывает требуемую симметрию: с понижением энергии она последовательно распадается на $SO(10)$ и $SU(5)$, и суперструнная теория при $E \leq 10^{15}$ ГэВ не отличается от обычных GUT-моделей.

Мы не описываем группу $E(8)$ ввиду схематичности нашего рассказа о суперструнах. Трудность заключается в том, что группа $E(8) \otimes E(8)$ возможна лишь в 10-мерном геометрическом пространстве. Но мы наблюдаем лишь четыре измерения

– три пространственных и одно временное. Таким образом, возникает задача – ”свернуть”, или, как говорят, компактифицировать, шесть лишних измерений. Примером того, в каком виде существует одно из дополнительных измерений, служит распространение замкнутой струны (рис. 8.22).

Там, где существенна струнная природа частицы, т.е. на расстояниях порядка длины Планка, пространство имеет

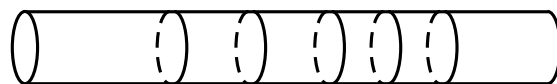


Рис. 8.22. Движение струны в искривленном пространстве

очень большую кривизну, ”свертывается” в цилиндр, круговое сечение которого представляет собой одно конечное дополнительное измерение. По этому цилиндру и движется замкнутая струна. Тяготение также вызывается не точечными частицами гравитонами, а обменом замкнутыми струнами и соответствующими ”свернутыми” измерениями (рис. 8.23).

В настоящее время нет единого мнения и метода, который бы свел 10-мерную теорию к четырем измерениям. Топология предлагает различные варианты пространств, представляющих собой фантастические поверхности с различными дырами, провалами, перемычками наподобие приводимого на рис. 8.24 пространства Калаби-Яу.

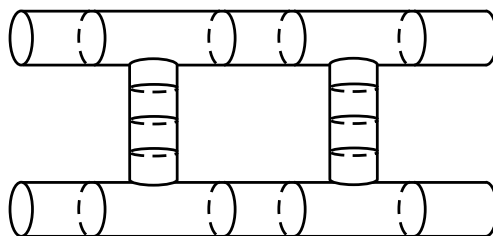


Рис. 8.23. Гравитационное притяжение двух струн

Несмотря на некоторые трудности и невозможность прямой экспериментальной проверки (невозможно экспериментально достигнуть энергий порядка 10^{19} ГэВ), теория суперструн поз-

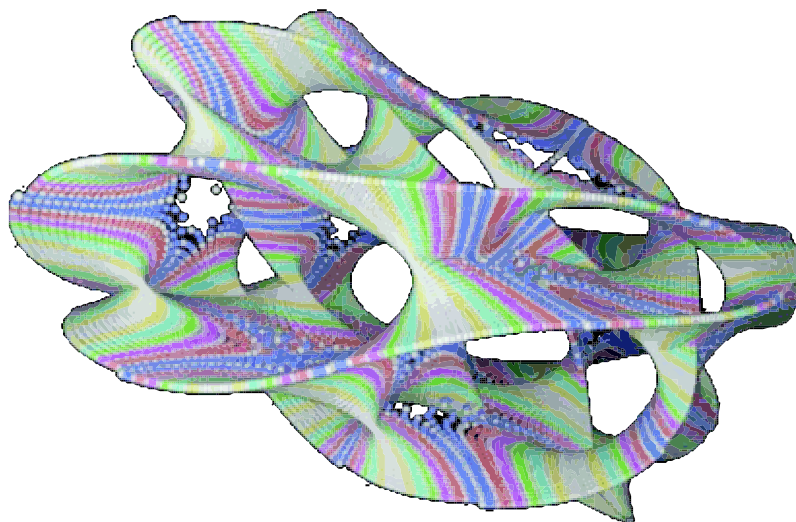


Рис. 8.24. Пространство Калаби-Яу

волила решить ряд принципиальных вопросов микромира и космологии:

- Открыла путь к построению квантовой теории гравитации.
- Дала возможность объединить в единой математической структуре все четыре фундаментальных взаимодействия.
- Разрешила большинство парадоксов, возникающих при конструировании квантовых моделей черных дыр.
- Позволила лучше обосновать и проработать концепцию множественного рождения различных вселенных в рамках инфляционной космологии.
- Наконец, чрезвычайно "элегантно" обогатила и расширила язык квантовой теории поля и всей математической физики.

Список литературы

1. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
2. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантованные поля. М.: Наука, 1980.
4. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Калибровочные поля. М.: Изд-во МГУ, 1986.
5. Райдер Л. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1987.
6. Садовский М.В. Лекции по квантовой теории поля. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
7. Окунь Л.Б. Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1988.
8. Клапдорф-Клайнгротхауз Г.В., Штаудт А. Неускорительная физика элементарных частиц. М.: Физматлит, 1997.
9. Окунь Л.Б. Элементарное введение в физику элементарных частиц. М.: Физматлит, 2006.
10. Хокинг С. Черные дыры и молодые вселенные. СПб.: Амфора / Эврика, 2001.
11. Новиков И.Д. Как взорвалась Вселенная. М.: Наука, 1988.
12. Каку М. Введение в теорию суперструн. М.: Мир, 1999.
13. Гросс Д.Дж. Открытие асимптотической свободы и появление КХД. Нобелевские лекции по физике – 2004. УФН, т.175, № 12, с. 1306-1318 (2005).

-
14. Вильчек Ф.А. Асимптотическая свобода: от парадокса к парадигмам. Нобелевские лекции по физике – 2004. УФН, т.175, № 12, с. 1925-1337 (2005).
 15. Ворняков В.Г, Поликарпов М.Н., Судзуки Т., Чернодуб М.Н., Шнертольц Г. Невылетание цвета и структура адронов в решеточной хромодинамике. УФН, т.174, № 1, с. 19–38 (2004).
 16. Линде А. Вселенная. Часть 9, <http://shloma.ru/books/a-43.html>; Часть 10, <http://shloma.ru/books/a-44.html>.

Приложение

Нобелевские премии по физике элементарных частиц и квантовой теории поля

1932 г.

Вернер Карл Гейзенберг

*За создание квантовой механики, применение которой привело,
помимо прочего, к открытию аллотропических форм водорода*

1933 г.

Эрвин Шредингер и Поль Адриен Морис Дирак

За открытие новых продуктивных форм атомной теории

1935 г.

Джеймс Чедвик

За открытие нейтрона

1936 г.

Виктор Франц Гесс

За открытие космических лучей

Карл Дэвид Андерсон

За открытие позитрона

1938 г.

Энрико Ферми

*За доказательства существования новых радиоактивных элементов,
полученных при облучении нейтронами, и связанное с этим открытие
ядерных реакций, вызываемых медленными нейтронами*

1945 г.

Вольфганг Паули

За открытие принципа запрета Паули

1949 г.

Хидеки Юкава

За предсказание существования мезонов на основе теоретической работы по ядерным силам

1950 г.

Сесил Фрэнк Пауэлл

За разработку фотографического метода исследования ядерных процессов и открытие мезонов, осуществленное с помощью этого метода

1955 г.

Уиллис Юджин Лэмб

За открытия, связанные с тонкой структурой спектра водорода

Поликарп Куш

За точное определение магнитного момента электрона

1957 г.

Чжэньнин Янг, Цзундао Ли

За предвидение при изучении так называемых законов четности, которое привело к важным открытиям в области элементарных частиц

1959 г.

Эмилио Джино Сегре и Оуэн Чемберлен

За открытие антипротона

1963 г.

Юджин Пол Вигнер

За вклад в теорию атомного ядра и элементарных частиц, особенно с помощью открытия и приложения фундаментальных принципов симметрии

Мария Гепперт-Майер и Ханс Йенсен

За открытия, касающиеся оболочечной структуры ядра

1965 г.

Синъитиро Томонага, Джулиус Швингер, Ричард Филлипс Фейнман

За фундаментальные работы по квантовой электродинамике, имевшие глубокие последствия для физики элементарных частиц

1967 г.

Ханс Альбрехт Бете

*За вклад в теорию ядерных реакций, особенно за открытия,
касающиеся источников энергии звезд*

1968 г.

Луис Уолтер Альварес

*За исключительный вклад в физику элементарных частиц, в
частности за открытие большого числа резонансов, что стало
возможным благодаря разработанной им технике с использованием
водородной пузырьковой камеры и оригинальному анализу данных*

1969 г.

Марри Гелл-Манн

*За открытия, связанные с классификацией элементарных частиц и их
взаимодействий*

1979 г.

Шелдон Ли Глэшоу, Абдус Салам и Стивен Вайнберг

*За вклад в объединенную теорию слабых и электромагнитных
взаимодействий между элементарными частицами, в том числе
предсказание слабых нейтральных токов*

1980 г.

Джеймс Уотсон Кронин и Вал Логсен Фитч

*За открытие нарушений фундаментальных принципов в распаде
нейтральных K-мезонов*

1983 г.

Субраманьян Чандрасекар

*За теоретические исследования физических процессов, играющих
важную роль в строении и эволюции звезд*

Уильям Альфред Фаулер

*За теоретическое и экспериментальное исследование ядерных реакций,
имеющих важное значение для образования химических элементов
Вселенной*

1984 г.

Карло Руббиа, Симон ван дер Мер

За решающий вклад в большой проект, осуществление которого привело к открытию квантов поля W и Z – переносчиков слабого взаимодействия

1988 г.

Леон Ледерман, Мелвин Шварц и Джек Стейнбергер

За метод нейтринного луча и доказательство двойственной структуры лептонов посредством открытия мюонного нейтрино

1990 г.

Джером Фридман, Генри Кендалл и Ричард Тейлор

За пионерские исследования глубоконеупругого рассеяния электронов на протонах и связанных нейтронах, существенно важных для разработки кварковой модели в физике частиц

1995 г.

Мартин Перл

За открытие тау-лептона

Фредерик Рейнс

За экспериментальное обнаружение электронного нейтрино

1999 г.

Герард Хоофт и Мартин Вельтман

За прояснение квантовой структуры электрослабых взаимодействий

2004 г.

Дэвид Гросс, Дэвид Политцер, Фрэнк Вильчек

За открытие асимптотической свободы в теории сильных взаимодействий

2008 г.

Йоичиро Намбу, Макото Кобаяши

За открытие природы нарушенной симметрии, которая предсказывает существование по крайней мере трех семейств кварков в природе

Тошихидо Маикава

За открытие механизма спонтанного нарушения симметрии в субатомной физике

Представленный список имен – это только вершина айсберга, составленного из имен ученых, внесших выдающийся вклад в развитие современных представлений о структуре материи. Их усилиями созданы теории электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий и экспериментально обнаружены участвующие в этих процессах частицы. Следующим этапом явилось объединение первых двух из этих взаимодействий в электро-слабое взаимодействие и создание Великого объединения, включающего все три вида взаимодействий. Все это составляет так называемую Стандартную модель элементарных частиц, в которой истинно элементарными частицами являются фермионы – кварки и лептоны – а взаимодействие между ними осуществляется через промежуточные бозоны.

Основные представления Стандартной модели подтверждены экспериментом; открытым пока является вопрос о существовании гипотетических частиц – хиггсов, обеспечивающих механизм возникновения массы элементарных частиц. Физическое сообщество сейчас ожидает результатов первых экспериментов на Большом адронном коллайдере, в которых хиггсы могут быть обнаружены. Но даже если их не найдут, у теоретиков есть серьезные концепции, развивающие дальше Стандартную модель. Прежде всего это SUSY – концепция суперсимметрии.

Физика элементарных частиц вышла из тупика, в котором она находилась пятьдесят лет назад, благодаря новым идеям. Важнейшую роль при этом сыграли представления о симметрии фундаментальных взаимодействий и принцип инвариантности относительно калибровочных преобразований. Оказалось, что этот принцип работает для всех фундаментальных взаимодействий и для их объединений и приводит к предсказанию частиц, обеспечивающих взаимодействия между истинно элементарными частицами – кварками и лептонами. В этом явно проявляется

единство физических законов в микромире. Предсказанные на основе теории калибровочных полей промежуточные бозоны были открыты экспериментально. Вообще развитие физики элементарных частиц происходит благодаря одновременному развитию теории и эксперимента. Успех периодически переходит от одной области к другой: то вырывается вперед теория, предсказывающая новые частицы, которые открываются затем экспериментаторами, то эксперимент предлагает какой-нибудь парадокс, который разрешается теоретиками.

Движение теории и эксперимента идет в направлении увеличения энергии взаимодействующих частиц. Наибольший достигнутый уровень – это энергии порядка 1000 ГэВ, что соответствует расстояниям порядка 10^{-15} см, до которых частицы могут переходить друг в друга,

Переход за этот рубеж с помощью новых ускорителей будет происходить маленькими шажками, но достижимые более высокие энергии будут на несколько порядков меньше планковской энергии 10^{15} ГэВ, а расстояния – планковской длины 10^{-33} см, при которых достигается объединение всех рассмотренных взаимодействий с гравитационным. При таких энергиях и расстояниях происходит квантование гравитационного поля. Над созданием квантовой теории гравитации в настоящее время работают большие группы теоретиков, использующих представления о частицах не как о точечных объектах, а скорее линейных образованиях – суперструнах.

Экспериментальная проверка таких теорий на ускорителях невозможна, но эти теории используют для создания моделей эволюции Вселенной на раннем этапе, когда плотность вещества была столь велика, что расстояния соответствовали планковским длинам. Астрофизические исследования современной Вселенной обнаруживают некоторые черты, которые могли появиться в результате Большого Взрыва. Таким образом, физика элементарных частиц при очень больших энергиях переходит с ускорительной физики на астрофизические исследования, а в области теории делаются попытки объединить квантовую теорию поля с общей теорией относительности. Здесь ожидаются совершенно новые представления о микромире, который мы достаточно хорошо сейчас понимаем при низких энергиях ≤ 1000 ГэВ, где работает Стандартная модель. Создание ее является, по-видимому, величайшим достижением человеческого интеллекта.

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Классификация элементарных частиц	7
1.1. Введение	7
1.2. Масштабы физических величин в физике элементарных частиц	8
1.3. Открытие множества "элементарных" частиц	10
1.4. Типы взаимодействий и времена реакций	14
1.5. Квантовые числа	17
1.6. Законы сохранения и симметрия	22
1.7. Кварки	25
1.8. Дальнейшее развитие представлений об элементарных частицах и их взаимодействиях	31
Глава 2. Электромагнитное поле	35
2.1. Классическое электромагнитное поле	35
2.2. Квантование свободного поля	38
2.3. Коммутаторы электромагнитного поля	40
2.4. Хронологическое и нормальное произведение операторов поля	43
Глава 3. Электронно-позитронное поле	46
3.1. Уравнение Дирака	46
3.1.1. Релятивистское уравнение движения	46
3.1.2. Уравнение Дирака	48
3.1.3. Свободная частица	53
3.1.4. Спин	56
3.1.5. Переход от уравнения Дирака к уравнению Паули. Магнитный момент частицы	58

3.2.	Ковариантная форма уравнения Дирака	62
3.2.1.	Другая запись уравнения Дирака	62
3.2.2.	Поворот системы координат	63
3.2.3.	Преобразования Лоренца	66
3.2.4.	Инверсия системы координат	67
3.2.5.	Преобразование билинейных форм	68
3.3.	Свободное электронно-позитронное поле	71
3.3.1.	Вариационный принцип для уравнения Дирака	71
3.3.2.	Тензор энергии-импульса электронно-позитронного поля	73
3.4.	Квантование электронно-позитронного поля	75
3.4.1.	Введение фермиевских операторов	75
3.4.2.	Энергия электронно-позитронного поля	77
3.4.3.	Плотность тока, заряд и импульс	79
3.4.4.	Разложение операторов поля по плоским волнам . . .	81
3.5.	Фундаментальные характеристики квантованного электронно-позитронного поля	83
3.5.1.	Антикоммутаторы	83
3.5.2.	Хронологическое и нормальное произведения	85
Глава 4. Квантовая электродинамика		90
4.1.	Уравнения квантовой электродинамики	90
4.1.1.	Постулирование уравнений для взаимодействующих электромагнитного и электронно-позитронного полей	90
4.1.2.	Функция Лагранжа и тензор энергии-импульса	92
4.2.	Матрица рассеяния	94
4.2.1.	Представление взаимодействия	94
4.2.2.	Матрица рассеяния в квантовой электродинамике . .	97
4.2.3.	Теорема Вика	99
4.2.4.	Диаграммы Фейнмана	102
4.3.	Точные пропагаторы полей	111
4.3.1.	Операторы полей в гайзенберговском представлении .	111
4.3.2.	Ряды теории возмущений	115
4.3.3.	Уравнение Дайсона	117
4.4.	Расходимости. Перенормировки	124

4.4.1.	Рассеяние электрона на статическом заряде	124
4.4.2.	Лэмбовский сдвиг	131
4.4.3.	Аномальный магнитный момент электрона	134
4.5.	Примеры процессов, возникающих в первых порядках теории возмущений	136
4.5.1.	Образование электрон-позитронных пар	136
4.5.2.	Аннигиляция пары	138
4.5.3.	Процессы в третьем порядке теории возмущений . . .	139
Глава 5.	Слабые взаимодействия	142
5.1.	β -распад	142
5.1.1.	Предсказание нейтрино	142
5.1.2.	Несохранение четности	146
5.1.3.	Гипотеза двухкомпонентного нейтрино	149
5.2.	Гамильтониан слабого взаимодействия	151
5.2.1.	Формирование дублетов частиц	151
5.2.2.	Модель Ферми	153
5.2.3.	Гипотеза векторных бозонов	156
5.2.4.	Три поколения кварков и лептонов	158
5.3.	От теории Ферми – к единой теории электрослабого взаимодействия	161
5.3.1.	Трудности теории Ферми	161
5.3.2.	Введение в теорию W -бозонов	163
5.3.3.	Введение в теорию Z^0 -бозона	167
5.4.	Лагранжиан слабого взаимодействия	168
5.4.1.	Калибровочное поле в квантовой электродинамике . .	168
5.4.2.	Калибровочное поле в слабых взаимодействиях . . .	170
5.5.	Объединение слабого и электромагнитного взаимодействий .	173
5.5.1.	Спонтанное нарушение симметрии. Механизм Хиггса	173
5.5.2.	Лагранжиан Вайнберга – Салама – Глэшоу	176
5.5.3.	Введение Z -бозона	179
5.5.4.	Полный лагранжиан электрослабого взаимодействия	181
5.5.5.	Заряженные и нейтральные токи	182
5.6.	Экспериментальное подтверждение теории единого электрослабого взаимодействия	187

5.6.1.	Открытие нейтральных токов	187
5.6.2.	Открытие W - и Z - бозонов	192
5.6.3.	Времена жизни частиц	194
Глава 6. Сильные взаимодействия		196
6.1.	Основные положения квантовой хромодинамики	196
6.1.1.	Феноменологический подход	196
6.1.2.	Глюонное поле	198
6.2.	Лагранжиан КХД и теория возмущений	202
6.2.1.	Калибровочное поле сильных взаимодействий	202
6.2.2.	Теория возмущений	207
6.3.	Решеточная хромодинамика	211
6.3.1.	Решеточная модель для сильных взаимодействий	211
6.3.2.	Вычисление масс адронов	214
6.3.3.	Потенциал взаимодействия кварков	215
6.3.4.	Структура глюонного поля в адроне	216
6.4.	Экспериментальные доказательства положений и результатов квантовой хромодинамики	217
6.4.1.	Реальность кварков	217
6.4.2.	Кварки видны в связанном состоянии	220
6.4.3.	Кварковые и глюонные струи	221
6.4.4.	Зависимость константы связи сильного взаимодействия α_s от энергии	224
Глава 7. Великое объединение		227
7.1.	Группы симметрии фундаментальных взаимодействий	227
7.1.1.	Непрерывные группы Ли и их представления	227
7.1.2.	Принцип калибровочной инвариантности	230
7.1.3.	Стандартная модель	232
7.2.	Объединение электрослабых и сильных взаимодействий	235
7.2.1.	Асимптотическое поведение констант связи	235
7.2.2.	Обобщенная $SU(5)$ -симметрия и структура мультиплетов	239
7.2.3.	Лагранжиан $SU(5)$ -модели	242
7.2.4.	Распад протона	244

7.2.5.	Основные положения и предсказания $SU(5)$ -модели	247
7.3.	Модели, выходящие за пределы $SU(5)$	248
7.3.1.	Недостаточность $SU(5)$ -модели. Модель $SO(10)$	248
7.3.2.	Суперсимметрия (SUSY)	250
7.4.	Экспериментальная проверка теории Великого объединения	255
7.4.1.	Исследования распада протона	255
7.4.2.	Поиск новых частиц на ускорителях	257

Глава 8. Космология **262**

8.1.	Модели Вселенной	262
8.1.1.	Как строят модель Вселенной	262
8.1.2.	Модель Эйнштейна и уравнение динамики Вселенной	265
8.1.3.	Модель "пустой" Вселенной де Ситтера	267
8.1.4.	Решение Фридмана и его анализ на примере классического уравнения динамики Ньютона	267
8.1.5.	Критическая плотность и кривизна Вселенной	269
8.2.	Открытие взрывающейся Вселенной	273
8.2.1.	Красное смещение и закон Хаббла	273
8.2.2.	Реликтовое излучение	278
8.3.	Модель горячей Вселенной	280
8.3.1.	Возраст Вселенной	280
8.3.2.	Зависимость плотности, расстояний и температуры от времени	281
8.3.3.	Сценарий Большого Взрыва	284
8.3.4.	Первотолчок и инфляция	289
8.3.5.	Барионная асимметрия	294
8.3.6.	Проблема горизонта	296
8.3.7.	Еще раз о критической плотности	297
8.3.8.	Первоначальный ядерный синтез	299
8.4.	Гравитация	305
8.4.1.	Черные дыры, белые карлики и эволюция звезд	305
8.4.2.	Квантовая гравитация	322
8.4.3.	Суперструны	329

Список литературы

Приложение	336
Нобелевские премии по физике элементарных частиц и квантовой теории поля	336

Научно-образовательная серия
"Физика конденсированных сред"

Тамара Георгиевна Рудницкая
Юрий Александрович Изюмов

Элементарные частицы
и фундаментальные взаимодействия

Рекомендовано к изданию ученым советом
Института физики металлов и НИСО УрО РАН

Редактор К.И. Ушакова
Компьютерная верстка Е.В. Зенкова
Дизайн Ю.В. Устиновой

ISBN 975-5-7691-2144-9



НИСО УрО РАН № 23(10)-28. Подписано в печать 22.07.2010.
Формат 60 × 84 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21.75. Уч.-изд. л. 17. Тираж 300 экз. Заказ

Отпечатано в типографии
"Уральский центр академического обслуживания".
620219, Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.

