

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт физики металлов имени М.Н. Михеева  
Уральского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Савченко Сергей Павлович

**ФОКУСИРОВКА, КАУСТИКА И ВЫРОЖДЕНИЕ СПИНОВЫХ  
ВОЛН В МАГНИТОУПОРЯДОЧЕННЫХ СРЕДАХ**

1.3.12. Физика магнитных явлений

Диссертация  
на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Борич Михаил Александрович

Екатеринбург – 2021

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Основные взаимодействия в магнитоупорядоченных средах</b>	<b>10</b>
1.1 Обменное взаимодействие . . . . .	11
1.2 Магнитное дипольное взаимодействие . . . . .	13
1.2.1 Магнитостатическая дипольная энергия . . . . .	15
1.2.2 Тензор размагничивающих факторов . . . . .	16
1.3 Магнитная кристаллографическая анизотропия . . . . .	17
1.4 Полная энергия ферромагнетика . . . . .	18
1.5 Магнитоупругое взаимодействие . . . . .	19
1.6 Сверхтонкое взаимодействие . . . . .	20
<b>2 Связанные электронно-ядерные магнитостатические колебания в ферромагнетиках</b>	<b>23</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	24
2.2 Спектр электронно-ядерных колебаний: аналитические решения . . . . .	30
2.3 Особенности связанных электронно-ядерных магнитных колебаний вблизи резонанса и запрещенные зоны . . . . .	32
2.4 Условия вырождения электронно-ядерных мод колебаний . . . . .	37
Выводы к главе 2 . . . . .	40
<b>3 Фокусировка и каустика спиновых волн</b>	<b>42</b>
3.1 Спиновые волны в ферромагнетиках . . . . .	43
3.1.1 Закон дисперсии спиновых волн в ферромагнетике с кубической кристаллической решеткой . . . . .	43
3.1.2 Закон дисперсии в ГЦК-ферромагнетиках . . . . .	45
3.1.3 Коэффициент усиления и каустика в ГЦК-ферромагнетиках . . . . .	47
3.1.4 Каустика спиновых волн в ферромагнетиках с ОЦК и простой кубической решетками . . . . .	52
3.2 Спиновые волны в антиферромагнетиках . . . . .	54
3.2.1 Спектр магнонов в ОЦТ-антиферромагнетике . . . . .	55
3.2.2 Коэффициент усиления и каустика . . . . .	56

Выводы к главе 3 . . . . .	64
<b>4 Фокусировка магнитоупругих волн в ферромагнетиках</b>	<b>66</b>
4.1 Закон дисперсии магнитоупругих волн . . . . .	67
4.2 Фокусировка и каустика магнитоупругих волн . . . . .	72
4.3 Магнитоупругие волны в пленках . . . . .	76
Выводы к главе 4 . . . . .	83
<b>Заключение</b>	<b>84</b>
<b>Список работ автора</b>	<b>86</b>
<b>Список литературы</b>	<b>89</b>
<b>Приложение А. Уравнения магнитостатики</b>	<b>97</b>
<b>Приложение Б. Поверхность постоянной энергии и коэффициент усиления</b>	<b>101</b>

## Введение

В диссертационной работе изучается поведение спиновых волн в магнитоупорядоченных средах. Спиновые волны сначала были предсказаны теоретически и потом были обнаружены экспериментально. Впервые они были предсказаны Блохом в 1930 г. Базовые уравнения движения намагниченности, описывающие спиновые волны, были сформулированы Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшицем в 1935 г. [1]. В их работе было показано, что восприимчивость ферромагнетика может иметь резонансный характер и определены собственные частоты однородных колебаний намагниченности. Это позволило предсказать новое явление – ферромагнитный резонанс, которое удалось наблюдать в 1946 г. Дж. Гриффитсу [2].

Одной из наиболее фундаментальных работ по спиновым волнам в ферромагнетиках и антиферромагнетиках является книга А.И. Ахиезера, В.Г. Барьяхтара и С.В. Пелетминского [3], опубликованная в 1967 г. В ней последовательно излагаются основные свойства спиновых волн в рамках феноменологического и квантово-механического подходов. Кроме того, указывается, что в реальных магнетиках спиновые колебания могут приводить к колебаниям ионов кристаллической решетки, и наоборот, колебания ионов вызывают колебания спинов. Это приводит к тому, что в магнетиках, по существу, нет чисто спиновых и чисто упругих волн, а есть связанные магнитоупругие волны. На эту же особенность волн в магнетиках указывают авторы [4], где рассматриваются упругие колебания и замечается, что в магнетиках законы дисперсии упругих волн сильно отличаются от упругих волн в средах без магнитного упорядочения.

Теоретическому исследованию магнитоупругих волн вблизи фазовых переходов посвящены ряд работ исследователей Института радиотехники и электроники (Москва) и Челябинского государственного университета [5, 6].

Эффекты, связанные со взаимодействием двух подсистем имеют место, если ядра ферро- или антиферромагнетика обладают собственным спиновым моментом. В этом случае спин ядра находится в макроскопическом магнитном поле, создаваемом упорядоченными электронными спинами. Это поле называют сверхтонким и его величина составляет порядка  $10^5$  Э. Малое внешнее поле вызывает малое отклонение электронной намагниченности, но изменение сверхтонкого поля при этом уже становится немалым. Коэффициент усиления ЯМР – отношение величины приложенного поля и величины вызванного этим полем изменения сверхтонкого поля, составляет в ферромагнетиках порядка  $10^3$ . Это приводит к тому, что ядерный магнитный резонанс (ЯМР) в магнитоупорядоченных веществах существенно отличен от ЯМР в пара- и

диамагнетиках. Е.А. Туров [7] был одним из первых исследователей этого явления в СССР. В дальнейшем явление ЯМР в магнитоупорядоченных средах изучалось достаточно активно [8,9], причем существенный вклад в развитие этой науки был внесен сотрудниками ИФМ [10]. Интерес к этим системам наблюдается и в настоящее время. Выяснилось, что при низких температурах (порядка 1 К) релаксацию в системе ядерных спинов нельзя описать с помощью обычных диссипационных слагаемых блоховского типа – она обусловлена взаимодействием между электронной и ядерной подсистемами [11].

Существенную роль в свойствах спиновых волн играет форма образца, для рассмотрения которой необходимо учитывать одно из основных взаимодействий в ферро- и антиферромагнетиках – магнитное дипольное взаимодействие. Это взаимодействие в большинстве случаев может быть описано при помощи эффективного магнитостатического поля, распределение которого по образцу определяется формой поверхности [12].

Дипольные спиновые волны широко изучаются в тонких магнитных пленках и слоистых структурах типа ферромагнетик-диэлектрик-металл [13]. В зависимости от отношения толщин ферромагнитной пленки и диэлектрика, в законе дисперсии спиновых волн могут появляться области с положительной дисперсией (групповая скорость  $v_g$  увеличивается с увеличением волнового числа  $k$ ), отрицательной дисперсией ( $v_g$  уменьшается при увеличении  $k$ ), и возможно формирование областей с нулевой дисперсией ( $\partial v_g / \partial k \approx 0$ ). Волновой пакет с соответствующей групповой скоростью распространяется через образец без дисперсионного уширения, что представляет интерес для устройств с линиями задержки. Кроме того, вблизи точки нулевой дисперсии становятся необычными свойства спиновых волн, распространяющихся в нелинейном режиме: для описания динамики огибающей таких спиновых волн приходится использовать не классические уравнения слабонелинейной динамики (нелинейное уравнение Шредингера, уравнения Кортевега-де Фриза, уравнение синус Гордона), а привлекать более сложные модели [13–19].

Несмотря на то, что спиновые волны были открыты еще 90 лет назад, их продолжают исследовать и в настоящее время, причем интерес представляют как линейные, так и нелинейные свойства этих волн. Обнаруживаются новые магнитные материалы, в которых спиновые волны имеют перспективные свойства для микроэлектроники и спинтроники. Часто новый интерес возникает к давно исследованным магнитным материалам, таким, как железо-иттриевый феррит-гранат (ЖИГ). Например, раньше ЖИГ предлагалось использовать в линиях задержки с применением магнитостатических волн [20], сейчас оказывается, что полезными свойствами обладает спектр магнитоупругих волн. Магнитоупругие волны в ЖИГ распространяются анизотропно: в определенном частотном диапазоне их интенсивность существенно зависит от направления, что может быть важным эффектом для микроэлектроники. Эта особенность возникает вследствие того, что фазовая и групповая скорости волн неколлинеарны. В результате в системе возникают выделенные направления, вдоль которых ориентирована большая часть групповых

скоростей волн с различными направлениями волновых векторов. Такие направления называют направлениями фокусировки, а соответствующее явление - самофокусировкой. Первоначально задача исследования зависимости интенсивности волны от направления ее распространения была сформулирована для упругих волн [21–30] в связи с тем, что ее решение позволяет предсказать направления, в которых фононная теплопроводность оказывается наиболее эффективной [31–34]. В последнее время, в связи с развитием спинтроники, появились теоретические и экспериментальные работы, посвященные исследованию фокусировки спиновых волн [35–40]. В настоящей диссертации методы исследования фокусировки упругих волн [31–34] обобщены на случай спиновых и магнитоупругих волн.

Спиновые волны являются объектами, способными переносить энергию с достаточно малыми тепловыми потерями. В связи с этим задача о распределении их интенсивности по направлениям представляет интерес с точки зрения спинтроники. Заметим, что в системе спиновых и магнитоупругих волн самофокусировка является естественной – она возможна как для линейных волн, так и для волн, распространяющихся в нелинейном режиме, однако в линейном режиме для формирования существенной фокусировки необходимо выполнение определенных условий. Например, для этого требуется, чтобы фазовая и групповая скорости были неколлинеарными.

Настоящая диссертация посвящена изучению спиновых волн в системах со сложным законом дисперсии. Рассматриваются ферромагнетики со сверхтонким взаимодействием, для которых основное внимание уделяется связанным электронно-ядерным магнитостатическим волнам и изучению зависимости их свойств от формы образца. Ещё один предмет рассмотрения – редкоземельные ферро- и антиферромагнетики типа  $\text{EuO}$ ,  $\text{EuS}$ ,  $\text{MnF}_2$ , особенность которых заключается в том, что обменное взаимодействие в них медленно ослабевает с расстоянием и в них необходимо учитывать первых и вторых соседей, для них исследуется конкуренция влияния первых и вторых соседей, и изучаются особенности фокусировки спиновых волн, к которым приводит эта конкуренция. Третий предмет рассмотрения – магнитоупругие волны, для которых основное внимание уделяется вопросам фокусировки.

*Актуальность темы исследования.* Научная актуальность диссертационной работы определяется тем, что исследуются волны со сложными законами дисперсии – численными методами изучены электронно-ядерные магнитостатические колебания, а также метод исследования фокусировки волн применен для изучения спиновых и магнитоупругих волн в магнетиках. Практическая актуальность работы обусловлена тем, что исследованные в работе эффекты могут быть использованы при разработке спинтронных устройств.

Работа выполнялась в рамках государственных заданий по темам «Спин» № АААА-А18-118020290104-2 и «Функция» № АААА-А19-119012990095-0, проектов УрО РАН №18-10-2-37 и №14.Z50.31.0025, гранта РФФИ №18-32-00139.

*Цель и задачи исследований.* Целью диссертационной работы является определение особенностей поведения спиновых волн в магнитоупорядоченных средах со сложными законами дисперсии, изучение характерных свойств этих волн: фокусировки, каустики и вырождения, а также изучение способов управления этими свойствами при помощи внешних параметров.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Определить особенности связанных электронно-ядерных колебаний в ферромагнитных образцах сфероидальной формы с одноосной анизотропией, обусловленные сверхтонким и магнитным дипольным взаимодействием. Изучить влияние размагничивающих факторов на частоты связанных электронно-ядерных колебаний.
2. Охарактеризовать фокусировку спиновых волн в Гейзенберговских ферро- и антиферромагнетиках с учетом первых и вторых соседей.
3. Получить результаты о фокусировке магнитоупругих волн в железо-иттриевом гранате (ЖИГ) в окрестности магнитоупругого резонанса, изучить влияние магнитоупругого взаимодействия на спектр в окрестности магнитоупругого резонанса, рассчитать коэффициент усиления.

#### *Научная новизна работы*

В диссертации исследованы спиновые волны в средах, в которых закон дисперсии существенно анизотропен. Решена задача о неоднородных электронно-ядерных колебаниях в ферромагнетиках сфероидальной формы с легкоосной анизотропией – найдены зависимости запрещенной зоны колебаний и точек вырождения резонансных частот от величины внешнего поля и отношения полуосей сфероида.

Изучена анизотропия спектра спиновых волн в гейзенберговских ферромагнетиках с кубической решеткой и антиферромагнетиках с объемно-центрированной тетрагональной решеткой для разных соотношений постоянных обменного взаимодействия с первыми и вторыми соседями. Установлено, что наибольшие эффекты фокусировки (каустика) возможны, если отношение обменных постоянных с первыми и вторыми соседями отрицательно. Расчёт для магнитоупругих волн на примере ЖИГа показал, что фокусировка и каустика этих волн могут наблюдаться вблизи частоты магнитоупругого резонанса.

#### *Основные положения, выносимые на защиту*

1. Определены особенности связанных электронно-ядерных колебаний: получена зависимость положения «запрещенной» области полей, в которой отсутствуют собственные моды, от отношения полуосей сфероида, также в зависимости от отношения полуосей сфероида получены поля и частоты, которые отвечают существованию нескольких мод колебаний.
2. Интенсивность потока спиновых волн в гейзенберговских ферромагнетиках с кубической решеткой зависит от направления. В определенных направлениях интенсивность резко возрастает – реализуется каустика магнонов. Каустика возможна лишь при отрицательном знаке

соотношения между постоянными обменного взаимодействия с первыми и вторыми соседями, а направление каустики определяется частотой волны.

3. Каустика спиновых волн возможна в антиферромагнетиках с объемно-центрированной тетрагональной решеткой, если отношение обменных постоянных с первыми и вторыми соседями является отрицательным и волновые числа магнонов находятся вблизи границы зоны Бриллюэна.

4. Условия фокусировки и каустики магнитоупругих волн реализуются в упруго-изотропных ферромагнетиках. Эти эффекты обусловлены магнитоупругим взаимодействием и наблюдаются в окрестности частоты магнитоакустического резонанса.

#### *Практическая значимость результатов работы*

1. Результаты исследования электронно-ядерных колебаний в ферромагнетиках сфероидальной формы могут быть использованы для создания новых устройств микроэлектроники и для объяснения результатов экспериментов по магнитному резонансу.

2. Возможность фокусировки и каустики спиновых и магнитоупругих волн может быть использована для передачи информации с помощью спиновых волн на частотах СВЧ-диапазона.

*Методология и методы исследований.* При решении задачи об электронно-ядерных колебаниях используются уравнения Максвелла в магнитостатическом приближении с соответствующими граничными условиями, уравнения Ландау-Лифшица и уравнение Уокера для описания динамики намагниченности. Численная часть решения основывается на хорошо проверенных и надежных алгоритмах работы с трансцендентными уравнениями.

Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках исследуются в рамках модели Гейзенберга. Для изучения магнитоупругих волн привлекается феноменологическая модель упруго-изотропного ферромагнетика.

*Достоверность результатов* обеспечивается применением проверенных и хорошо апробированных методов теоретического расчета спектра волн в кристаллах, обоснованным выбором приближений. Полученные результаты согласуются с имеющимися литературными данными.

*Личный вклад автора.* Представленные в диссертации результаты получены автором под научным руководством кандидата физико-математических наук Борича Михаила Александровича.

Савченко Сергеем Павловичем лично были получены выражения для законов дисперсии электронно-ядерных колебаний, спиновых и магнитоупругих волн, и исследованы их аналитические следствия. Автором лично проведены необходимые численные расчеты для исследования фокусировки спиновых и магнитоупругих волн. Обсуждение результатов исследований проводилось автором совместно с кандидатом физико-математических наук Боричем Михаилом Александровичем и кандидатом физико-математических наук Бахаревым Сергеем Михайловичем.

чем. Автор диссертации участвовал в подготовке статей и тезисов, представлял доклады на научных конференциях.

*Публикации.* Основные положения и результаты диссертационной работы опубликованы в 9 научных статьях в журналах из списка ВАК и индексируемых в базах WoS и Scopus: «Физика твердого тела», «Magnetic Resonance in Solids», «Journal of Magnetism and Magnetic Materials», «Известия РАН. Серия физическая» и «Journal of Physics: Conference Series».

*Апробация работы.* Результаты докладывались на 11 научных конференциях и семинарах: КОУРОВКА-XXXVII (Екатеринбург, Россия 2018), International Symposium "Spin Waves" (Санкт-Петербург, Россия 2018), ВИСММ-2018 (Иркутск, Россия 2018), ФТТ-2018 (Минск, Белоруссия 2018), НМММ-XXIII (Москва, Россия 2018), EASTMAG-2019 (Екатеринбург, Россия 2019), XXI International Youth Scientific School "Actual problems of magnetic resonance and its application" (Казань, Россия 2019), Sol-SkyMag 2019 (San Sebastian, Spain 2019), СПФКС-XXIX—СПФКС-XX (Екатеринбург, Россия 2017-2019 г.).

*Соответствие паспорту специальности.* Содержание диссертационной работы соответствует пункту 1. «Разработка теоретических моделей, объясняющих взаимосвязь магнитных свойств веществ с их электронной и атомной структурой, природу их магнитного состояния, характер атомной и доменной магнитных структур, изменение магнитного состояния и магнитных свойств под влиянием различных внешних воздействий» паспорта специальности 01.04.11 — физика магнитных явлений (1.3.12. Физика магнитных явлений).

Диссертация соответствует требованиям, установленным п.14 Положения о присуждении ученых степеней. Текст диссертации представляет собой научно-квалификационную работу, не содержит заимствованного материала без ссылки на автора и (или) источник заимствования, не содержит результатов научных работ, выполненных в соавторстве, без ссылок на соавторов.

*Объем и структура диссертации.* Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка работ автора, списка использованных источников и двух приложений. Содержит 96 страниц машинописного текста, 34 рисунка и 3 таблицы. Библиография включает 100 наименований. В первой главе содержатся необходимые для дальнейшего изложения базовые сведения об основных взаимодействиях в ферро- и антиферромагнетиках. Вторая глава посвящена задаче о связанных электронно-ядерных спиновых колебаниях в феррите марганца. В третьей главе решается задача о фокусировке спиновых волн в ферро- и антиферромагнетиках в рамках модели Гейзенберга. В четвертой главе в рамках феноменологического подхода поставлена и решена задача о фокусировке связанных магнитоупругих волн в железо-иттриевом гранате. В заключении сформулированы наиболее важные результаты диссертационной работы.

## 1 Основные взаимодействия в магнитоупорядоченных средах

В диссертационной работе исследуются спиновые, электронно-ядерные и магнитоупругие волны в магнитоупорядоченных средах. Для этого исследования необходимо иметь представление об основных взаимодействиях в магнитоупорядоченных веществах. Сначала приведем определения и основные свойства веществ, с которыми мы имеем дело в диссертационной работе, а затем перейдем к изучению основных взаимодействий, определяющих динамику волн в этих системах. Согласно классической книге по магнетизму [41], магнитные вещества классифицируются по знаку обменного взаимодействия:

1. Ферромагнетики – это вещества с положительной обменной связью. К ним относятся кристаллы железа, кобальта, никеля, часть редкоземельных металлов (гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, тулий и иттербий), многочисленные сплавы и соединения этих элементов между собой и с переходными элементами, сплавы и соединения хрома и марганца с неферромагнитными элементами, а также некоторые соединения металлов группы актинидов. Ферромагнетизм в этих веществах наблюдается в интервале температур от 0 К до критической температуры – точки Кюри  $T_C$ , выше которой ферромагнетики ведут себя как парамагнетики. Ниже точки Кюри в ферромагнетиках наблюдаются не только специфические магнитные свойства, но также и особенности (аномалии) в поведении других, немагнитных физических свойств. Эти аномалии достигают максимума вблизи точки Кюри.

2. Антиферромагнетики – это вещества с отрицательной обменной связью, а также с полной компенсацией результирующего магнитного момента в каждой элементарной магнитной ячейке кристалла. К этому типу магнетиков относятся кристаллы хрома,  $\alpha$ -марганца, часть редкоземельных металлов (церий, празеодим, неодим, самарий, европий), многочисленные соединения переходных элементов (например,  $MnO$ ,  $FeO$ ,  $V_2O_3$ ,  $CrS$ ,  $MnS$ ,  $MnF_2$ ,  $FeCl_2$ ,  $CuCl$  и т. д.). Все они, так же как и ферромагнетики, обладают некоторой критической температурой (антиферромагнитная точка Кюри или точка Нееля  $T_N$ ), выше которой они ведут себя почти как нормальные парамагнетики, подчиняющиеся закону Кюри-Вейсса. Ниже температуры Нееля их восприимчивость снова уменьшается и стремится к наименьшему значению при  $T \rightarrow 0$  К, т. е. при  $T = T_N$  восприимчивость антиферромагнетиков имеет максимум. При этой же температуре наблюдаются максимумы и всех антиферромагнитных аномалий и других немагнитных их

свойств.

3. Ферримагнетики – это вещества с отрицательной обменной связью, но не с полной компенсацией результирующего магнитного момента (в каждой элементарной магнитной ячейке кристалла – нескомпенсированный антиферромагнетизм). К этому типу магнетиков относятся кристаллы из группы окислов металлов со структурой кристаллической решетки типа шпинели, с общей химической формулой  $MO \cdot Fe_2O_3$ , где  $M$  – двухвалентный катион металла переходных или нормальных групп ( $Cu^{2+}$ ,  $Zn^{2+}$ ,  $Mn^{2+}$ ,  $Ni^{2+}$ ,  $Co^{2+}$ ,  $Fe^{2+}$  и т. п.). Эти магнетики обладают свойствами, весьма похожими на свойства обычных ферромагнитных металлов и сплавов, лишь с той разницей, что практически все эти вещества являются неметаллическими (полупроводники). Особые магнитные и другие физические свойства ферритов наблюдаются в области температур ниже точки Кюри.

В диссертации в главах 2 и 3 речь идет о спиновых волнах в ферромагнетиках и антиферромагнетиках, в главе 4 – в железо-иттриевом гранате, который, вообще говоря, является ферримагнетиком, но работа с ним ведется, как с ферромагнитным диэлектриком.

Обменное взаимодействие является наиболее сильным взаимодействием в веществах с дальним магнитным порядком. Следующими по величине являются энергия магнитной анизотропии и магнитная дипольная энергия. Обменное взаимодействие изотропно: оно стремится выстроить спины атомов параллельно друг другу, но направление выстраивания может быть любым. Магнитная анизотропия задает в кристалле выделенное направление, выстраивание спинов атома вдоль которого оказывается энергетически выгодным. Магнитное дипольное взаимодействие является дальнедействующим. Особенно сильное влияние оно оказывает вблизи поверхности образца, благодаря чему вблизи границ равновесное распределение магнитных полей оказывается существенно неоднородным, а если образец имеет достаточно малые размеры, то неоднородным оказывается и распределение в глубине образца. В главе 1 диссертации собраны необходимые для дальнейшего изложения сведения об этих взаимодействиях.

### 1.1 Обменное взаимодействие

Рассмотрим систему спинов  $S_l$ , находящихся в позициях  $\mathbf{R}_l$ . Гамильтониан обменного взаимодействия для такой системы записывается следующим образом [3]:

$$\mathcal{H}_e = -\frac{1}{2} \sum_{l \neq m} J(R_{lm})(S_l, S_m), \quad (1.1)$$

где  $R_{lm} = |\mathbf{R}_{lm}| = |\mathbf{R}_l - \mathbf{R}_m|$  – расстояние между электронами со спинами  $S_l$  и  $S_m$ ,  $J(R_{lm})$  – обменная постоянная. Для перехода к макроскопическому описанию введем оператор плотности

магнитного момента в точке  $\mathbf{r}$  с координатами  $(x, y, z)$ :

$$M(\mathbf{r}) = 2\mu_0 \sum_l \mathbf{S}_l \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_l), \quad (1.2)$$

где  $\mu_0 = e\hbar/(2mc)$  – магнетон Бора. Гамильтониан (1.1) переписывается через оператор  $M$ :

$$\mathcal{H}_e = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \mathbf{dr} \int \mathbf{dr}' J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (M(\mathbf{r}), M(\mathbf{r}')). \quad (1.3)$$

Можно также ввести оператор полного магнитного момента

$$\mathcal{M} = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}) \mathbf{dr}, \quad (1.4)$$

с соотношением

$$[\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j] = 2i\mu_0 \varepsilon_{ijk} \mathcal{M}_k, \quad (1.5)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  – символ Леви-Чевиты. В макроскопическом описании оператор (1.3) заменяется на энергию

$$\mathcal{W}_e = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \mathbf{dr} \int \mathbf{dr}' J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\mathbf{M}(\mathbf{r}), \mathbf{M}(\mathbf{r}')), \quad (1.6)$$

где под  $\mathbf{M}$  понимается макроскопическая намагниченность, т.е. плотность магнитного момента. Используем то, что  $J(r)$  быстро спадающая функция, и раскладываем  $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$  в ряд:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}) + (x'_i - x_i) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \frac{1}{2} (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k}, \quad (1.7)$$

где для удобства обозначено  $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ , а по повторяющимся индексам ведется суммирование. Тогда энергия разделяется на три части:

$$\mathcal{W}_{e0} = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \mathbf{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \mathbf{dr} (\mathbf{M}(\mathbf{r}))^2 = const, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{W}_{e1} = -\frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \mathbf{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (x'_i - x_i) J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \mathbf{dr} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_i}, \quad (1.9)$$

$$\mathcal{W}_{e2} = -\frac{1}{4(2\mu_0)^2} \int \mathbf{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) J(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \mathbf{dr} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k}. \quad (1.10)$$

Если кристалл бесконечный и симметричный, то каждый его узел рассматривается как центр симметрии, тогда  $\mathcal{W}_{e1} = 0$ . Вводя обозначения

$$(A_{ex})_{ik} = \frac{1}{2(2\mu_0)^2} \int \mathbf{dr} x_i x_k J(\mathbf{r}), \quad (1.11)$$

получим

$$W_{e2} = -\frac{1}{2} \int \mathbf{dr} (A_{ex})_{ik} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{1}{2} \int \mathbf{dr} (A_{ex})_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{r})}{\partial x_k} = \int_V w_e \mathbf{dr}, \quad (1.12)$$

где  $w_e$  – плотность обменной энергии.

Легко оценить порядок величины обменной постоянной:

$$(A_{ex})_{ik} \sim \frac{J_0 a^5}{(2\mu_0)^2} \sim \frac{T_c a^2}{\mu_0 M_0},$$

где  $a$  – постоянная решетки,  $J_0$  – обмен между ближайшими соседями,  $M_0 \sim \mu_0/a^3$  – оценка величины намагниченности,  $T_c$  – температура Кюри. Для одноосного кристалла тензор обменного взаимодействия  $(A_{ex})_{ik}$  имеет только диагональные компоненты  $(A_{ex})_i$  ввиду симметрии, и плотность обменной энергии равна

$$w_e = \frac{1}{2} (A_{ex})_1 \left( \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} (A_{ex})_2 \left( \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial z} \right)^2. \quad (1.13)$$

Для кубического  $(A_{ex})_{ik} = A_{ex} \delta_{ik}$ , и следовательно:

$$w_e = \frac{1}{2} A_{ex} (\nabla \mathbf{M})^2. \quad (1.14)$$

## 1.2 Магнитное дипольное взаимодействие

Магнитное дипольное взаимодействие является релятивистским [3] и имеет порядок  $(v/c)^2 \mathcal{W}_e$ , где  $v$  – скорость движения электрона. Следовательно, это взаимодействие в большинстве случаев является малым по сравнению с обменным. Его гамильтониан имеет вид [3]

$$\mathcal{H}_m = 2\mu_0^2 \sum_{l \neq m} \frac{1}{R_{lm}^5} [(\mathbf{S}_l \mathbf{S}_m) R_{lm}^2 - 3(\mathbf{S}_l \mathbf{S}_{lm})(\mathbf{S}_m \mathbf{S}_{lm})]. \quad (1.15)$$

Соответствующая макроскопическая энергия равна

$$\mathcal{W}_m = -\frac{1}{2} v_0^2 \sum_{l \neq j} M_i(\mathbf{R}_l) M_k(\mathbf{R}_j) \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \frac{1}{R_{lj}}, \quad (1.16)$$

$\mathbf{M}(R_l) = (2\mu_0/v_0) \overline{\mathbf{S}}_l$ ,  $v_0$  – объем элементарной ячейки,  $\overline{\mathbf{S}}_l$  – среднее значение спина в элементарной ячейке, по повторяющимся индексам  $i, k$  проводится суммирование. Поясним связь между гамильтонианом (1.15) и макроскопической энергией (1.16):

Поскольку  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 2\mu_0 \sum_m \mathbf{S}_m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)$ , то

$$\overline{\mathbf{M}}(\mathbf{R}_l) = \frac{1}{v_0} \int_{v_0} \mathbf{M}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{2\mu_0}{v_0} \overline{\mathbf{S}}_l. \quad (1.17)$$

Используя очевидное тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = -\frac{\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{x_i x_j}{r^5}, \quad (1.18)$$

из (1.16) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m &= -\frac{1}{2} v_0^2 \left( \frac{2\mu_0}{v_0} \right)^2 \sum_{l \neq j} \mathbf{S}_l(\mathbf{R}_l) \mathbf{S}_n(\mathbf{R}_j) \left( -\frac{\delta_{ij}}{R_{ij}^3} + 3\frac{R_{lj}^i R_{lj}^n}{R_{ij}^5} \right) = \\ &= 2\mu_0^2 \sum_{l \neq j} \left( \frac{(\mathbf{S}_l \mathbf{S}_j)}{R_{ij}^3} - 3\frac{(\mathbf{S}_l \mathbf{R}_{lj})(\mathbf{S}_j \mathbf{R}_{lj})}{R_{ij}^5} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

что совпадает с исходным выражением (1.15).

Для вычисления (1.16) разбиваем сумму на две части: по физически малой сферической окрестности точки  $\mathbf{R}_l$  ( $R_{ij} < \rho$ ) и вне этой окрестности ( $R_{ij} > \rho$ ):

$$\mathcal{W}_m = \mathcal{W}'_m + \mathcal{W}''_m = \sum_{i \neq j, R_{ij} > \rho} + \sum_{i \neq j, R_{ij} < \rho},$$

где  $a \ll \rho \ll L$  ( $a$  – размер ячейки,  $L$  – образца). В первой сумме переходим от суммирования к интегрированию:

$$\mathcal{W}'_m = -\frac{1}{2} \iint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| > \rho} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.20)$$

а во второй сумме полагаем  $M_i(\mathbf{R}_i) \approx M_i(\mathbf{R}'_j) = M_i(\mathbf{r})$ , одно суммирование выполняем непосредственно:

$$\beta_{ik} = v_0 \sum_{j, j \neq l, R_{lj} < \rho} \frac{\partial^2}{\partial R_{lj}^i \partial R_{lj}^k} \left( \frac{1}{R_{lj}} \right), \quad (1.21)$$

а второе суммирование заменяем интегрированием:

$$\mathcal{W}''_m = -\frac{1}{2} \beta_{ik} \int_V d\mathbf{r} M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

В отличие от обменной энергии, в плотность магнитной дипольной энергии входит неинвариантное по отношению к преобразованию системы координат произведение, и, следовательно, энергия зависит от направления намагниченности. В следующем параграфе определяется величина второй части энергии  $\mathcal{W}'_m$ . Для ее вычисления требуется привлечение математического

аппарата, детали которого вынесены в Приложение А.

### 1.2.1 Магнитоэлектростатическая дипольная энергия

Энергия  $W'_m$  может быть выражена при помощи эффективного поля  $\mathbf{H}^m$  внутри ферромагнетика. Это поле обусловлено магнитным дипольным взаимодействием и удовлетворяет уравнениям магнитоэлектростатики, а следовательно, может быть представлено в виде

$$H_i^m = -\nabla\phi = -\int_V \mathbf{dr}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int_V \mathbf{dr}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.23)$$

Здесь  $\phi$  – потенциал магнитоэлектростатического поля. Вывод формулы для потенциала содержится в Приложении А. Последний интеграл разбиваем на две области:  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \rho$  и  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \rho$  (здесь, как и ранее, под  $\rho$  мы понимаем физически малую величину). В интеграле по внутренней области полагаем  $\mathbf{M}(\mathbf{r}') \approx \mathbf{M}(\mathbf{r})$ , и выделяем слагаемые вида

$$M_i(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad M_k(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (i \neq k).$$

Интеграл от первых слагаемых дает  $-(4/3)\pi M_i(\mathbf{r})$ , второй интеграл обращается в нуль. Тогда для магнитного дипольного поля

$$H_i^m = -\frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{r}) + \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'>\rho} \mathbf{dr}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.24)$$

откуда

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'>\rho} \mathbf{dr}' M_k(\mathbf{r}') \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = H_i^m + \frac{4\pi}{3} M_i(\mathbf{r}). \quad (1.25)$$

Таким образом, для энергии  $W'_m$  запишем

$$W'_m = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} \left( \mathbf{H}^m(\mathbf{r}) \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}(\mathbf{r})^2 \right), \quad (1.26)$$

и для полной магнитной дипольной энергии ферромагнетика имеем

$$W_m = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{dr} \left( \beta_{ik} M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^m(\mathbf{r}) \mathbf{M}(\mathbf{r}) + \frac{4\pi}{3} \mathbf{M}(\mathbf{r})^2 \right). \quad (1.27)$$

### 1.2.2 Тензор размагничивающих факторов

Предположим, что тело однородно намагничено:  $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \text{const}$ , тогда дипольное поле внутри ферромагнетика равно

$$H_i^m = M_k \int_V \mathbf{dr}' \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi N_{ik} M_k. \quad (1.28)$$

Величину

$$N_{ik}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \int_V \frac{\mathbf{dr}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.29)$$

называют тензором размагничивающих факторов. В общем случае его компоненты зависят от координат, а значит, внутреннее поле в ферромагнетике неоднородно даже при наличии однородной плотности магнитного момента. Поле будет однородно, если образец представляет собой эллипсоид с полуосями  $a, b, c$ . Тогда интеграл в (1.29) равен [3]

$$\int_V \frac{\mathbf{dr}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \pi abc \int_0^\infty \frac{d\tau}{R_\tau} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \tau} - \frac{y^2}{b^2 + \tau} - \frac{z^2}{c^2 + \tau} \right), \quad (1.30)$$

где  $R_\tau = \sqrt{(a^2 + \tau)(b^2 + \tau)(c^2 + \tau)}$ , и представляет собой квадратичную форму по  $(x, y, z)$ , а значит, тензор не зависит от координат и имеет только диагональные компоненты:

$$n_1 = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\tau}{R_\tau(a^2 + \tau)}, \quad n_2 = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\tau}{R_\tau(b^2 + \tau)}, \quad n_3 = \frac{1}{2} abc \int_0^\infty \frac{d\tau}{R_\tau(c^2 + \tau)}. \quad (1.31)$$

Все компоненты неотрицательны, а их сумма равна единице. Полезный частный случай – эллипсоид вращения (сфероид):  $b = a, c = \xi^{-1}a$ . Для вытянутого сфероида имеем  $\xi < 1$  и

$$n_3 = \frac{\xi^2}{1 - \xi^2} \left( \frac{1}{2\sqrt{1 - \xi^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \sqrt{1 - \xi^2}} - 1 \right) \quad (1.32)$$

а для сжатого  $\xi > 1$  и

$$n_3 = \frac{\xi^2}{\xi^2 - 1} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \right) \right) \quad (1.33)$$

$n_3$  – монотонно возрастающая от нуля до единицы функция  $\xi$ . Оставшиеся две компоненты равны  $n_1 = n_2 = (1 - n_3)/2$ . При  $\xi \rightarrow 1$  оба выражения для размагничивающих факторов стремятся к  $1/3$  (сфера), для плоской бесконечной пленки ( $\xi \rightarrow \infty$ )  $n_3 = 1$  и  $n_1 = n_2 = 0$ , и для бесконечного кругового цилиндра ( $\xi \rightarrow 0$ )  $n_3 = 0$  и  $n_1 = n_2 = 1/2$ .

Во всех случаях, кроме эллипсоидов, размагничивающие факторы зависят от положения в образце, и, следовательно, магнитное поле внутри образца распределено неоднородно.

### 1.3 Магнитная кристаллографическая анизотропия

Магнитная кристаллографическая анизотропия проявляется в виде зависимости магнитных свойств среды от направления намагничивания относительно осей кристаллической решетки. Связь орбитального движения электронов с кристаллической решеткой обуславливает появление в выражении свободной энергии ферромагнетика члена, зависящего от направления намагниченности по отношению к осям решетки. Результирующая свободная энергия кристаллической анизотропии включает кроме энергии естественной кристаллической анизотропии энергию внутренних магнитоэлектрических напряжений, которая также зависит от направления намагниченности относительно осей кристаллической решетки [42]. Анизотропия проявляется в результате спин-орбитального взаимодействия, гамильтониан которого имеет вид [43]:

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_k \mathbf{S}_k \mathbf{A}_k, \quad (1.34)$$

где  $\mathbf{A}_k = -2\mu_0 \mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{H}_k$  – магнитное поле, действующее на электрон в  $k$ -ом атоме из-за движения его в поле  $\mathbf{E}_k$  кристаллической решетки:

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{c} [\mathbf{v}_k, \mathbf{E}_k].$$

Это взаимодействие также является релятивистским, его энергия имеет порядок  $\mu_0(v/c)(e/a^2) \sim (v/c)^2(e^2/a)$ . Для квантово-механического описания необходимо перейти к операторам скорости. Но возможно и описание в рамках модели Гейзенберга, когда для  $S = 1/2$  скорость заменяется на операторы, построенные только из спинов [3]. Структура энергетического спектра вблизи основного состояния не должна меняться. Поэтому гамильтониан должен иметь вид

$$\mathcal{H}_{sl} = \sum_{ik} f(R_{ik}) \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k + (2\mu_0)^2 \sum_{ik} \beta_{ik}(R_{ik}) (3(\mathbf{S}_i \mathbf{R}_{ik})(\mathbf{S}_k \mathbf{R}_{ik}) - \mathbf{S}_i \mathbf{S}_k R_{ik}^2). \quad (1.35)$$

Первая сумма представляет собой поправку к обменному взаимодействию, вторая имеет структуру магнитного дипольного взаимодействия. При описании магнитного дипольного взаимодействия в предыдущем разделе вместо  $\beta_{ik}(R_{ik})$  у нас была достаточно медленно спадающая функция:  $\beta_{ik}(R_{ik}) \sim R_{ik}^{-3}$ . Для корректного учета этой энергии в рамках макроскопического описания пришлось обращаться к уравнениям магнитостатики и привлекать довольно сложные рассуждения. В случае поля анизотропии ситуация несколько проще: здесь  $\beta_{ik}(R_{ik})$  – быстро спадающая функция, и при переходе от суммирования к интегрированию в макроскопическом описании можно ограничиться интегрированием по физически малому объему  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < \rho$ . Структура энергии анизотропии при этом окажется подобна  $W_m''$ , а эффективный гамильтониан

будет иметь вид:

$$\mathcal{H}_{sl} = (2\mu_0)^2 \sum_{ik} \beta_{\alpha\gamma} S_{i\alpha} S_{k\gamma}, \quad (1.36)$$

а энергия

$$\mathcal{W}_{sl} = \frac{1}{2} \int \mathbf{dr} \int \mathbf{dr}' \beta_{ik}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') M_i(\mathbf{r}) M_k(\mathbf{r}'), \quad (1.37)$$

или с учетом того, что  $\beta_{ik}(r)$  быстро спадает, можно ввести плотность энергии анизотропии

$$\mathcal{W}_{sl} = \int w_a(\mathbf{M}) \mathbf{dr}, \quad w_a(\mathbf{M}) = \frac{1}{2} \beta_{ik} M_i M_k, \quad \beta_{ik} = \int \beta_{ik}(\mathbf{r}) \mathbf{dr}. \quad (1.38)$$

Плотность энергии анизотропии – это некоторая функция плотности магнитного момента, зависящая от направления момента. Поэтому при температурах  $T \ll T_c$  ее можно представить в виде ряда по степеням  $M$ , причем ненулевыми слагаемыми будут только те, что сохраняют симметрию кристалла. Кроме того, ввиду инвариантности времени  $t \rightarrow -t$ , должны остаться только слагаемые с четными степенями.

Для кубической симметрии

$$w_a = \frac{K_A}{M_0^4} (M_x^2 M_y^2 + M_y^2 M_z^2 + M_z^2 M_x^2) \quad (1.39)$$

при  $\beta > 0$  намагниченность ориентируется вдоль ребра, при  $\beta < 0$  – вдоль диагонали куба.

#### 1.4 Полная энергия ферромагнетика

Складывается из обмена, дипольного взаимодействия, анизотропии и энергии взаимодействия  $-\mathbf{M}\mathbf{H}_0$  с внешним магнитным полем [3].

$$\mathcal{W} = \int_V \mathbf{dr} \left( F \left( \mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{M}\mathbf{H}^m - \mathbf{M}\mathbf{H}_0 \right), \quad (1.40)$$

где

$$F \left( \mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \alpha_{ik} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_k} + w_a(\mathbf{M}) + f(M^2),$$

где  $f(M^2)$  обычно неизвестная функция квадрата намагниченности, имеющая преимущественно обменную природу.

Иногда энергию (1.40) удобно переписать в виде интеграла по всему пространству. Для этого преобразуем слагаемое  $\mathbf{M}\mathbf{H}^m$ :

$$\mathbf{M}\mathbf{H}^m = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} - \mathbf{H}^m) \mathbf{H}^m = \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} (-\nabla \phi) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}^m)^2 = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{div}(\mathbf{B}\phi) - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H}^m)^2,$$

тогда

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{M} \mathbf{H}^m \mathbf{d}\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{H}^m)^2 \mathbf{d}\mathbf{r} - \frac{1}{8\pi} \int_S \mathbf{B} \phi \mathbf{d}\mathbf{S} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{H}^m)^2 \mathbf{d}\mathbf{r} + \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{H}^m \nabla \phi \mathbf{d}\mathbf{r},$$

откуда

$$-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{M} \mathbf{H}^m \mathbf{d}\mathbf{r} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbf{R}^3} (\mathbf{H}^m)^2 \mathbf{d}\mathbf{r},$$

и

$$\mathcal{W} = \int \mathbf{d}\mathbf{r} \left( F \left( \mathbf{M}, \frac{\partial M_i}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{H}^m)^2 - \mathbf{M} \mathbf{H}_0 \right), \quad (1.41)$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

### 1.5 Магнитоупругое взаимодействие

Основными типами взаимодействий в магнитоупорядоченных веществах являются обменное взаимодействие, магнитное дипольное взаимодействие и магнитная кристаллическая анизотропия. Магнитоупругое взаимодействие является меньшим по отношению к перечисленным, но оно может приводить к тому, что в поведении спиновых волн появляются существенные особенности. В действительности, благодаря магнитоупругой связи колебания спинов сопровождаются колебаниями ионов, а колебания ионов - колебаниями спинов. Таким образом, спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках должны сопровождаться упругими волнами и упругие волны – спиновыми волнами. Строго говоря, в магнитоупорядоченных кристаллах должны распространяться не чисто магнитные и не чисто упругие, а связанные магнитоупругие волны [3, 4].

Магнитоупругое взаимодействие особенно сильно влияет на свойства волн в точках магнитоупругого резонанса. Вдали от резонанса моды можно разделить на квазиупругие и квазимагнитные, но в непосредственной окрестности резонанса такая классификация оказывается невозможной: моды смягчаются, возникает магнитоупругая щель, и приходится иметь дело со связанными магнитоупругими волнами (МУВ). Это приводит к тому, что в магнитоупругих материалах часто обнаруживается множество фазовых переходов разного типа, напрямую связанных с магнитоупругостью [6]. В частности, МУВ дают заметный вклад в теплопроводность и теплоемкость таких материалов.

Первые теоретические построения по магнитоупругости были выполнены А.И.Ахиезером [3], который рассмотрел модуляцию обменного и дипольного взаимодействий колебаниями решетки. Магнитоупругое взаимодействие возникает из-за того, что обменные параметры являются функциями постоянной решетки. При упругих колебаниях меняется расстояние между соседними атомами, что приводит к изменению эффективного значения постоянной решетки и, как следствие, к изменению постоянной обменного взаимодействия. При малых смещениях обмен-

ный параметр можно разложить в ряд Тейлора по атомным смещениям

$$J(R_{lm}) = J + K_{mel}(R_{lm})\varepsilon_{lm}.$$

Обычно для рассмотрения магнитоупругости применяют феноменологический подход, основанный на модели сплошной среды. В ферромагнетике магнитоупругие эффекты феноменологически рассматриваются посредством разложения энергии в ряд Тейлора по компонентам деформации, в линейном приближении имеющем вид

$$\mathcal{W} = \sum_{i,j} F_{ij}(\mathbf{M})\varepsilon_{ij}, \quad (1.42)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты деформации, описывающие смещения в кристалле и связанные с компонентами вектора смещений  $\mathbf{u}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Приведенное выражение описывает явления магнитоупругости, обусловленные однородным вращением вектора намагниченности. Так как магнитокристаллическая энергия должна быть инвариантна относительно инверсии времени, коэффициенты  $F_{ij}(\mathbf{M}) = (\partial \mathcal{W}_{mp} / \partial \varepsilon_{ij})$  должны содержать только четные степени компонент  $\mathbf{M}$ . В линейном приближении по  $\varepsilon_{ij}$  энергия магнитоупругого взаимодействия запишется через квадраты компонент вектора намагниченности  $\mathbf{M}$ , компоненты тензора упругих деформаций  $\hat{\varepsilon}$  и тензора магнитоупругих постоянных  $\hat{\mathbf{b}}$  [44]:

$$W_{me} = b_{iklm} M_l M_m \varepsilon_{ij} \quad (1.43)$$

В случае кубического кристалла выражение для энергии магнитоупругого взаимодействия существенно упрощается в виду симметрии, и может быть записано в виде [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = \frac{b_1}{M_0^2} [M_x^2 \varepsilon_{xx} + M_y^2 \varepsilon_{yy} + M_z^2 \varepsilon_{zz}] + \\ + \frac{b_2}{M_0^2} [M_x M_y (\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) + M_x M_z (\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx}) + M_y M_z (\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy})]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Таким образом, вместо тензора четвертого ранга  $b_{iklm}$  достаточно знать всего лишь две магнитоупругие постоянные  $b_1$  и  $b_2$ .

## 1.6 Сверхтонкое взаимодействие

Описанные выше взаимодействия в ферромагнетике обусловлены взаимным влиянием электронных спинов у атомов кристаллической решетки. Однако в ряде веществ ядро атома также обладает нескомпенсированным магнитным моментом. В результате спины электронов форми-

руют макроскопическую электронную намагниченность и создают большое магнитное поле на ядре, которое взаимодействует с ядерным спином [45]. Такое взаимодействие электронных и ядерных спинов называется сверхтонким и определяет сверхтонкую структуру спектра.

Наличие сверхтонкого взаимодействия усложняет поведение электронной и ядерной намагниченности, однако оно может привести к весьма интересным следствиям, которые, в частности используются в методе ядерного магнитного резонанса (ЯМР). Наиболее распространенным методом исследования магнитного порядка является рассеяние нейтронов. Однако с помощью этого метода оказывается невозможным обнаружение ряда особенностей в веществах со сложным типом магнитного упорядочения. В частности, метод рассеяния нейтронов неприменим для исследования тонких пленок и нанопорошков, в большинстве случаев он не позволяет определить направление киральности в спиральных и геликоидальных магнитных структурах, возникают сложности в определении плоскостей поляризации магнитных моментов в квазидвумерных магнетиках. В этих ситуациях ответ на вопрос о распределении внутренних магнитных полей и взаимодействий в веществе можно получить при помощи метода ядерного магнитного резонанса, и в этом смысле методы рассеяния нейтронов и ЯМР дополняют друг друга. Как отмечено в монографии Е.А.Турова и М.П. Петрова „Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках“ [7], «ядра, обладающие магнитным моментом, представляют собой тончайший естественный зонд, помещенный в электронную систему кристалла, с помощью которого методами ЯМР можно получить много сведений о свойствах этой системы». Сложность применения метода ЯМР в магнитоупорядоченных веществах заключается в том, что он сам по себе представляет сложное явление, в котором участвуют две подсистемы: электронная спиновая и ядерная спиновая. Взаимодействие этих подсистем приводит к ряду особенностей, в результате чего спектры ЯМР становятся чрезвычайно сложными. Тем не менее, методы ядерного магнитного, ядерного квадрупольного резонанса и двойного резонанса успешно применяются для изучения сложного магнитного порядка в геликоидальных магнетиках [46], фрустрированных магнетиках [47] и в высокотемпературных сверхпроводниках [48]. В этих экспериментах ядерный спин является зондом, с помощью которого определяются магнитный порядок его окружения, что становится возможным благодаря сверхтонкому взаимодействию.

Приведем здесь простейшие формулы для сверхтонкого взаимодействия. Электрон, находящийся в точке  $\mathbf{r}$ , обладающий орбитальным моментом  $\mathbf{l}$  и спиновым моментом  $\mathbf{s}$ , создает на ядре ( $\mathbf{r} = 0$ ) локальное магнитное поле, описываемое оператором вида [7, 49–51]

$$\mathbf{H}_e = -g\mu_0 \left\{ \frac{\mathbf{l} - \mathbf{s}}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})}{r^5} + \frac{8\pi}{3} \mathbf{s} \delta(\mathbf{r}) \right\} \quad (1.45)$$

$\mu_0$  – магнетон Бора,  $g$  – фактор спектроскопического расщепления электрона. Последнее слагаемое называется фермиевским контактным полем, первое и второе – поле точечного диполя  $g\mu_0\mathbf{s}$  и орбитальный ток электрона с угловым моментом  $\mathbf{l}$ . В твердых телах поле на ядре у переходных элементов группы железа обусловлено в основном фермиевским контактным вза-

имодействием. Это взаимодействие не равно нулю только для  $s$ -электронов, поскольку только для них электронная плотность на ядре не равна нулю. Далее, локальное поле на ядре отлично от нуля только в том случае, если не равна нулю спиновая плотность  $s$ -электронов:

$$|\psi_{s\uparrow}| - |\psi_{s\downarrow}| \neq 0. \quad (1.46)$$

В  $3d$  элементах основной вклад в локальное поле дают электроны внутренних  $s$ -оболочек атома, которые оказываются спиново-поляризованными благодаря их обменному взаимодействию с электронами нескомпенсированной  $3d$  оболочки. В металлах и сплавах обменное взаимодействие электронов  $3d$  оболочки с  $4s$ -электронами проводимости приводит к спиновой поляризации последних. Этот механизм вносит в фермиевское контактное поле вклад, противоположенный по знаку по сравнению со вкладом от внутренних  $s$ -электронов. Величина локального поля на ядрах  $3d$  элементов достигает  $10^5 - 10^6$  Э. В случае редкоземельных элементов, поля достигают величин порядка  $10^6 - 10^7$  Э.

Взаимодействие ядерного спина  $\mathbf{I}$  с нескомпенсированными электронами  $3d$  или  $4f$  оболочек представляется через гамильтониан сверхтонкого взаимодействия:

$$\mathcal{W}_{hf} = -\mathbf{I} \cdot A\mathbf{S}, \quad (1.47)$$

где  $A$  — постоянная сверхтонкого взаимодействия,  $\mathbf{S}$  — суммарный спин атома. Заметим, что в общем случае сверхтонкое взаимодействие анизотропно, и постоянная  $A$  является тензором, симметрия которого определяется кристаллической решеткой [51].

При описании магнитоупорядоченного состояния кристалла обычно используется понятие подрешетки. К одной и той же магнитной подрешетке относят все магнитные ионы, позиции и магнитные моменты которых могут быть совмещены трансляциями на период магнитной элементарной ячейки. Другими словами, магнитная подрешетка объединяет все магнитные ионы, эквивалентные как в кристаллическом, так и в магнитном отношениях. В частности, ферромагнетик можно представить в виде одной решетки, а антиферромагнетик — в виде двух подрешеток, вставленных одна в другую. Подобное представление о магнитоупорядоченных веществах применимо и к более сложным магнитным структурам. Каждая магнитная подрешетка формирует свою намагниченность. Эта намагниченность создает локальное поле на ядре соответствующей подрешетки. Тогда плотность энергии сверхтонкого взаимодействия можно записать в виде

$$\mathcal{W}_{hf} = -A\mathbf{M} \cdot \mathbf{m}. \quad (1.48)$$

## 2 Связанные электронно-ядерные магнитостатические колебания в ферромагнетиках

Настоящая глава посвящена исследованию поведения спиновых волн в магнитоупорядоченных средах с существенным сверхтонким взаимодействием. Более конкретно, мы будем рассматривать все особенности на примере ферримагнетика  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$ , параметры которого известны с хорошей точностью: намагниченность насыщения электронной подсистемы равна  $M_0 = 560$  Гс, сверхтонкие поля, действующие на ядерную систему со стороны электронной и на электронную со стороны ядерной составляют  $A_0M_0 = 586$  кЭ и  $A_0m_0 = 8$  Э соответственно [52]. Следовательно, сверхтонкая постоянная оказывается равной  $A_0 = 1046$  и ядерная намагниченность  $m_0 = 7.6 \cdot 10^{-3}$  Гс, гиромангнитные отношения для электронной и ядерной подсистем равны  $\gamma_e = 1.58$  ГГц/кЭ,  $\gamma_n = 6.28 \times 10^{-3}$  ГГц/кЭ. Анизотропия в  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$  имеет тип «легкая ось», а величина поля анизотропии  $H_A$  составляет около 1 кЭ.

Как указано в предыдущей главе в разделе о магнитной дипольной энергии, в образце произвольной формы распределение внутренних магнитных полей  $\mathbf{H}^m$  будет неоднородным даже при условии однородной намагниченности  $\mathbf{M}$  образца. Единственное исключение составляют образцы в форме эллипсоида. В них, при однородной намагниченности  $\mathbf{M}$  внутри образца, магнитное поле тоже будет однородным, и его связь с намагниченностью выражается через тензор размагничивающих факторов:  $\mathbf{H}^m = -4\pi\hat{N}\mathbf{M}$ . В главных осях величины компонент тензора  $\hat{N}$  являются функциями полуосей  $a, b, c$  эллипсоида, а для эллипсоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

эти компоненты выражаются через аналитические функции отношения  $\alpha = a/b$ , которое является параметром формы эллипсоида (см. (1.32), (1.33)).

В представленной главе изучаются электронно-ядерные моды магнитостатических колебаний в образце в форме эллипсоида вращения (сфероида). Параметрами модели являются отношение полуосей сфероида  $\alpha$  и постоянная часть внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Структура задачи оказывается следующей. Внутренние магнитные поля, определяющие динамику электронной и ядерной намагниченностей, зависят от соотношения полуосей сфероида. Электронная и ядерная спиновые подсистемы связаны сверхтонким взаимодействием. Поэтому магнитная восприимчивость системы оказывается связанной электронно-ядерной, и к тому же зависящей от формы

образца. Исследование этой зависимости является частью задачи, поставленной в этой главе. Далее, поскольку внутренние магнитные поля удовлетворяют уравнениям магнитостатики, то соответствующие граничные условия приводят к дискретному спектру собственных частот, которые можно назвать магнитостатическими спиновыми модами колебаний [53, 54]. Наконец, благодаря сверхтонкому взаимодействию, дискретный спектр колебаний электронной намагниченности приводит также к дискретизации собственных колебаний ядерной намагниченности, или к ядерным магнитостатическим модам. Изучение влияния внешнего поля и формы образца на частоты и особенности поведения ядерных магнитостатических мод является основной задачей настоящей главы.

Заметим, что задача исследования волн в сферических и эллипсоидальных образцах не является новой. Это обусловлено тем, что в сферических образцах в выражении для частоты ферромагнитного резонанса не содержится манагнитности  $M$ , что делает такие образцы привлекательными для эксперимента [12, 55]. О магнитостатических колебаниях в ферромагнитных эллипсоидах вращения некоторые замечания были сделаны в книге [12], а в статье [56] приводятся теоретические рассуждения о магнитостатических колебаниях в антиферромагнитных сферах. Ядерные магнитостатические моды в сферических образцах были сначала предсказаны теоретически в 1963 г. [57], а затем были обнаружены экспериментально в 1976 г. [58]. Отличие нашей работы от вышеупомянутых в том, что, во-первых, мы рассматриваем связанные электронно-ядерные колебания, во-вторых, указанные колебания мы рассматриваем в сфероидах с произвольным соотношением полуосей. При этом обнаружено несколько новых особенностей поведения колебаний, которые могут быть интересны для эксперимента, и обсуждается управление этими особенностями при помощи внешних параметров.

## 2.1 Постановка задачи

Как было отмечено выше, в настоящей главе мы имеем дело с образцом в форме сфероида (2.1) с полуосями  $a$  в плоскости  $Oxy$  и  $b$  вдоль оси  $Oz$ . Величина  $\alpha = a/b$  является характеристикой формы. При  $\alpha > 1$  мы имеем дело со сжатым эллипсоидом, при  $\alpha < 1$  – с вытянутым, значение  $\alpha = 1$  соответствует сфере. Энергия системы в выбранной геометрии может быть представлена в виде [52, 59]

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & A(M_x m_x + M_y m_y + M_z m_z) - M_z H_A - H_0(M_z + m_z) - h_x(M_x + m_x) - \\ & - h_y(M_y + m_y) + \frac{1}{2}[N_{\perp}(M_x + m_x)^2 + N_{\perp}(M_y + m_y)^2 + N_{\parallel}(M_z + m_z)^2], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{m}$  – электронная и ядерная намагниченности. Первое слагаемое в (2.2) соответствует сверхтонкому взаимодействию между электронными и ядерными спинами, второе связано с магнитной анизотропией типа «легкая ось», следующие три слагаемых описывают Зеемановское взаимодействие с внешним магнитным полем, последнее слагаемое представляет собой магнит-

ную дипольную энергию, записанную через тензор размагничивающих факторов. Постоянное внешнее поле направлено вдоль оси  $Oz$ :  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$ , переменная часть поля ориентирована в плоскости  $Oxy$ :  $\mathbf{h} = (h_x(t), h_y(t), 0)$ , поле магнитной анизотропии  $H_A$  направлено в положительном направлении оси  $Oz$ . Величины  $N_{\perp, \parallel}$  являются компонентами тензора размагничивающих коэффициентов в главных осях. В этом разделе для удобства в них включен множитель  $4\pi$ , так что  $N_{\parallel} + 2N_{\perp} = 4\pi$ ,  $N_{\parallel} = 4\pi n_z$ , а размагничивающий фактор  $n_z$  определяется формулами (1.32), (1.33). Важно, что компоненты тензора размагничивающих факторов для эллипсоида определяются только формой (соотношением между главными полуосями), но не размерами образца. Эти факторы представляют собой гладкие функции параметра  $\alpha$ . При изменении  $\alpha$  от нуля до бесконечности  $N_{\parallel}$  изменяется от 0 до  $4\pi$ , а  $N_{\perp}$  от  $2\pi$  до 0 [59].

Рассматриваемые нами процессы достаточно медленные (имеют порядок частот ФМР), что позволяет пренебречь токами смещения и использовать магнитостатическое приближение в соответствующих уравнениях Максвелла

$$[\nabla \times \mathbf{h}] = 0, \quad \nabla \cdot (\mathbf{h} + 4\pi(\mathbf{M} + \mathbf{m})) = 0. \quad (2.3)$$

Первое уравнение позволяет ввести магнитостатический потенциал  $\mathbf{h} = -\nabla\psi$ , а второе, с учетом симметрии задачи, представляет собой уравнение Уокера

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.4)$$

где  $\mu$  — диагональная компонента тензора магнитной проницаемости

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_1 & 0 \\ -i\mu_1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

который выражается через высокочастотную восприимчивость ( $\hat{\mu} = 1 + 4\pi\hat{\chi}$ ). Тензор  $\hat{\chi}$  связывает намагниченность ферромагнетика с внешним возмущающим полем ( $\mathbf{M} + \mathbf{m} = \hat{\chi}\mathbf{h}$ ) и может быть получен из уравнения Ландау-Лифшица для электронной подсистемы и динамического уравнения для ядерной подсистемы:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\gamma_e[\mathbf{M} \times \mathbf{H}_M] \quad (2.6)$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma_n[\mathbf{m} \times \mathbf{H}_m] \quad (2.7)$$

здесь  $\gamma_{e,n}$  — модули электронного и ядерного гиромагнитных отношений, векторы  $\mathbf{H}_{M,m} = -\delta\mathcal{W}/\delta(\mathbf{M}, \mathbf{m})$  — эффективные магнитные поля, действующие на электронную и ядерную подсистемы. Релаксационными слагаемыми в уравнениях мы пренебрегаем. В линейном прибли-

жении:  $M_{x,y} \ll M_0, M_z \sim M_0, m \ll M$ , эти уравнения легко решаются и позволяют получить компоненты тензора динамической восприимчивости электронно-ядерной системы во внешнем поле:

$$\chi_{xx}^{el} = \chi_{yy}^{el} = \frac{\gamma_e M_0}{\Delta} [(\gamma_n m_0 A_{\perp} - \omega_{nuc})(\gamma_e \gamma_n m_0 M_0 A_{\perp}^2 - \omega_{el} \omega_{nuc}) + \omega^2 (\gamma_n m_0 A_{\perp} - \omega_{el})], \quad (2.8)$$

$$\chi_{yx}^{el} = -\chi_{xy}^{el} = \frac{\omega \gamma_e M_0}{\Delta} [\omega^2 - \omega_{nuc}^2 + \gamma_n m_0 A_{\perp} (\omega_{nuc} - \omega_{el} + \gamma_e M_0 A_{\perp})], \quad (2.9)$$

$$\chi_{xx}^{nuc} = \chi_{yy}^{nuc} = \frac{\gamma_n m_0}{\Delta} [(\gamma_e M_0 A_{\perp} - \omega_{el})(\gamma_e \gamma_n m_0 M_0 A_{\perp}^2 - \omega_{el} \omega_{nuc}) + \omega^2 (\gamma_e M_0 A_{\perp} - \omega_{nuc})], \quad (2.10)$$

$$\chi_{yx}^{nuc} = -\chi_{xy}^{nuc} = \frac{\omega \gamma_n m_0}{\Delta} [\omega_e^2 - \omega^2 + \gamma_e M_0 A_{\perp} (\omega_{nuc} - \omega_{el} - \gamma_n m_0 A_{\perp})]. \quad (2.11)$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$\Delta = (\omega^2 - \omega_{el} \omega_{nuc} + \gamma_e \gamma_n m_0 M_0 A_{\perp}^2)^2 - \omega^2 (\omega_{el} - \omega_{nuc})^2, \quad (2.12)$$

$$\omega_{nuc} = \gamma_n (H_0 - m_0 (N_{\parallel} - N_{\perp}) - M_0 A_{\parallel}), \quad (2.13)$$

$$\omega_{el} = \gamma_e (H_0 + H_a - M_0 (N_{\parallel} - N_{\perp}) - m_0 A_{\parallel}), \quad (2.14)$$

$$A_{\perp} = A_0 + N_{\perp}, \quad A_{\parallel} = A_0 + N_{\parallel}. \quad (2.15)$$

Окончательно, для тензора магнитной восприимчивости имеем:

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi_{xx}^{el} + \chi_{xx}^{nuc} & i\chi_{xy}^{el} + i\chi_{xy}^{nuc} & 0 \\ -i\chi_{xy}^{el} - i\chi_{xy}^{nuc} & \chi_{xx}^{el} + \chi_{xx}^{nuc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

В силу симметрии задачи, всюду ограниченные и стремящиеся к нулю на бесконечности решения уравнения Уокера имеют следующий вид:

$$\psi^{out} = e^{im\varphi} Q_n^m(\zeta\xi) P_n^{|m|}(\eta), \quad (2.17)$$

$$\psi^{in} = C_{nm} e^{im\varphi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(\beta(-\sqrt{-\mu\xi\eta} + \sqrt{\xi^2 \pm 1} \sqrt{1 - \eta^2} \cos(u))) \cos(um) du. \quad (2.18)$$

Здесь  $\psi^{out}$  и  $\psi^{in}$  – магнитостатические потенциалы снаружи и внутри образца,  $P_n^m$  и  $Q_n^m$  – функции Лежандра первого и второго рода [60],  $P_n = P_n^0$  – полином Лежандра первого рода,  $m$  и  $n$  – целые неотрицательные числа, причем  $m \leq n$ ; переменные  $\xi, \eta, \varphi$  являются сфероидальными

координатами, определяемыми выражением:

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 \pm 1} \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi, \\ y &= \frac{d}{2} \sqrt{\xi^2 \pm 1} \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi, \\ z &= \frac{d}{2} \xi \eta, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $d = 2\sqrt{|a^2 - b^2|}$  — расстояние между фокусами. Необходимость использовать сфероидальные координаты обусловлена тем, что для получения характеристического уравнения, определяющего собственные частоты, необходимо использовать граничные условия магнитостатики: непрерывность тангенциальной компоненты поля и нормальной компоненты индукции. Для этого требуется записать уравнение границы в виде простого соотношения. Для сферы радиуса  $a$  естественными переменными являются сферические координаты, уравнения границы в которых имеет вид  $r = a$ . Естественными переменными для сфероидов являются вышеприведенные сфероидальные переменные. Граница сфероида в этих переменных задается в виде

$$\xi = \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{|\alpha^2 - 1|}}. \quad (2.20)$$

К сожалению, сфероидальные координаты (2.19) для вытянутых и сжатых сфероидов определяются различным способом: знак „+“ используется для сжатого сфероида, а знак „−“ — для вытянутого. Поэтому, с точки зрения математики, задачи о сжатом и вытянутом сфероиде оказываются различными, и решать их приходится по отдельности. В дополнение к ним остается выделенный случай  $\alpha = 1$ , когда мы имеем дело со сферой. Аналитически сфероидальные координаты в сферические не переходят, поэтому в настоящей главе мы имеем дело с тремя математическими задачами, не переходящими друг в друга, но из физических рассуждений следует, что их решения должны переходить друг в друга непрерывным и гладким образом.

Итак, физически задачи о сжатом сфероиде, сфере и вытянутом сфероиде связаны и непрерывно переходят одна в другую. Поэтому решения уравнения Уокера (2.17), (2.18) записаны в единой форме. Однако математически это три разные задачи, в связи с чем приходится вводить дополнительные параметры: коэффициент  $\zeta$  при аргументе функции  $Q_n^m(\zeta\xi)$  в уравнении (2.17) и коэффициент  $\beta$  при аргументе полинома Лежандра в подынтегральном выражении в уравнении (2.18):

$$\zeta = \begin{cases} 1, & \alpha < 1 \\ i, & \alpha > 1 \end{cases}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\pm 1 - \xi_0^2(\mu - 1)}},$$

где знак „+“ используется для сжатого сфероида, а знак „−“ — для вытянутого. В случае сферы ( $\alpha = 1$ ) вместо  $(\xi, \eta, \varphi)$  используются обычные сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ , при этом  $Q_n^m(\zeta\xi)$  трансформируется в  $r^{-n-1}$ , вместо  $\eta$  и  $\sqrt{1 - \eta^2}$  следует использовать  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$ .

Коэффициент  $\beta$  при этом равен  $\beta = 1/\sqrt{1-\mu}$ .

Условие непрерывности тангенциальной составляющей поля  $\mathbf{h} = -\nabla\psi$  на поверхности сфероида приводит к непрерывности самой функции  $\psi$ , что позволяет найти коэффициенты  $C_{nm}$ :

$$C_{nm} = \frac{1}{2\pi} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \frac{K}{P_n^m(S)}, \quad (2.21)$$

где  $S = S(\omega) = -\sqrt{-\mu}/\sqrt{\alpha^2 - \mu}$  – новая переменная, введенная для удобства. Поскольку магнитная проницаемость  $\mu$  – функция частоты, то  $S = S(\omega)$ , и, следовательно, постоянные  $C_{nm}$  определяются формой эллипсоида (соотношением полуосей  $\alpha = a/b$ ) и частотой колебаний. Выражение для постоянной  $C_{nm}$  записано в единой форме для всех трех случаев (сжатый и вытянутый сфероиды и сфера), однако ввиду того, что математически это разные задачи, постоянная  $K$  определяется различным способом:

$$K = \begin{cases} Q_n^m(\xi_0), & \alpha < 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ Q_n^m(i\xi_0), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Применение требования непрерывности нормальной компоненты индукции  $\mathbf{b} = \hat{\mu}(-\nabla\psi)$  в сфероидальных координатах оказывается нетривиальной задачей. Во-первых, требуется записать оператор градиента в сфероидальных координатах:

$$\nabla = \frac{2}{d} \left( \mathbf{e}_\xi \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{e}_\eta \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\eta^2+\xi^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

для сжатого сфероида ( $\alpha > 1$ ), и

$$\nabla = \frac{2}{d} \left( \mathbf{e}_\xi \frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \mathbf{e}_\eta \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$$

для вытянутого ( $\alpha < 1$ ). Во-вторых, перейти в тензоре  $\mu$  к новым переменным:

$$\hat{\mu} \rightarrow \hat{\mu}' = T\mu T^{-1},$$

где  $T$  – матрица перехода от декартовых координат к сфероидальным. Для сжатого сфероида эта матрица имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\xi\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \cos \varphi & \frac{\xi\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \sin \varphi & \frac{\eta\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \\ -\frac{\eta\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \cos \varphi & -\frac{\eta\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \sin \varphi & \frac{\xi\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix},$$

а для вытянутого

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\xi\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \cos \varphi & \frac{\xi\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \sin \varphi & \frac{\eta\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \\ -\frac{\eta\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \cos \varphi & -\frac{\eta\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \sin \varphi & \frac{\xi\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}} \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

После нахождения градиента потенциала  $\psi$  в сфероидальных координатах, и перехода к новым координатам в тензоре  $\hat{\mu}$  находим величину магнитной индукции  $\mathbf{b}^{in}$ ,  $\mathbf{b}^{out}$  внутри и вне сфероида и приравниваем компоненты этой индукции вдоль направления  $\mathbf{e}_\xi$  нормали сфероида на его границе  $\xi = \xi_0$  (см. выражение (2.20)). В результате получим характеристическое уравнение относительно переменной  $S$ :

$$L(\xi_0) + S \frac{d}{dS} \ln(P_n^{|m|}(S)) - \frac{m\mu_1}{\alpha^2} = 0. \quad (2.22)$$

Характеристическое уравнение записано в общей форме, однако вид первого слагаемого зависит от математической специфики задачи:

$$L(\xi_0) = \begin{cases} -\xi_0 \frac{d}{d\xi_0} \ln Q_n^{|m|}(\xi_0), & \alpha < 1, \\ n + 1, & \alpha = 1, \\ -i\xi_0 \frac{d}{di\xi_0} \ln Q_n^{|m|}(i\xi_0), & \alpha > 1. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение (2.22) является алгебраическим уравнением относительно  $S$ . Поскольку  $S = -\sqrt{-\mu}/\sqrt{\alpha^2 - \mu}$  – функция частоты, то характеристическое уравнение является алгебраическим относительно частоты. Решение этого уравнения определяет набор собственных частот колебаний намагниченности. Отметим еще одну деталь характеристического уравнения. При  $\mu < 0$  величина  $S$  лежит в интервале  $(-1; 0)$ , если  $\mu > \alpha^2$ , то  $S \in (-\infty, -1)$ , а при  $0 < \mu < \alpha^2$  значение переменной  $S$  оказывается чисто мнимым. Функции Лежандра  $P_n^m$ ,  $Q_n^m$  и их производные, входящие в характеристическое уравнение, вычисляются по различным формулам для указанных трех диапазонов значений  $S$ , а уравнение (2.22) может иметь решение (действительное значение частоты) в каждом из них. Таким образом, с точки зрения математики, задача о собственных модах в сфероидальных образцах разделяется на 9 различных задач. Для каждого из трех случаев формы с разными выражениями для  $L(\xi_0)$  ( $\alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$  и  $\alpha > 1$ ) необходимо рассматривать три ситуации:  $\mu < 0$ ,  $0 < \mu < \alpha^2$  и  $\mu > \alpha^2$ . При этом частоты собственных мод должны непрерывно меняться при переходе от области к области и от задачи к задаче. Далее, для каждого из наборов индексов  $n, m$  характеристическое уравнение будет иметь свою форму. Поэтому собственные частоты будут зависеть от этих индексов:  $\omega = \omega_{nm}$ . Кроме того, при заданных  $n, m$  уравнение, очевидно, может иметь несколько решений, для нумерации которых потребуется третий индекс  $r$ . Итак, мы приходим к заключению, что собственные частоты представляют собой дискретный набор, который задается при помощи трех

индексов:  $\omega = \omega_{nmr}$ . Решение характеристического уравнения представляет собой набор собственных частот связанных колебаний электронной и ядерной намагниченности в сфероидах.

## 2.2 Спектр электронно-ядерных колебаний: аналитические решения

Собственные частоты колебаний определяются характеристическим уравнением (2.22), которое в общем случае можно решить только численными методами. Однако для собственных мод с индексами  $(n, n)$  и  $(n, n - 1)$  задача допускает аналитическое решение [12, 52], которое приводит к наглядным физическим следствиям. Функции Лежандра первого рода можно записать в виде [60]

$$P_n^m(S) = \frac{(-1)^m (1 - S^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^m}{dS^m} \frac{d^n}{dS^n} (S^2 - 1)^n. \quad (2.23)$$

При  $m = n$  и  $m = n - 1$  эти выражения легко представить в аналитическом виде:

$$P_n^n(S) = \frac{(2n)! (-1)^n}{2^n n!} (1 - S^2)^{\frac{n}{2}}, \quad P_n^{n-1}(S) = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^n n!} S (1 - S^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.24)$$

Подставив данные выражения в (2.22) и используя явный вид величин  $S$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\chi}$ , получим квадратное уравнение относительно частоты  $\omega$ , имеющее решения:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} [\omega_{el}^b - \omega_{nuc}^b \pm \sqrt{(\omega_{el}^b + \omega_{nuc}^b)^2 - 4\gamma_e \gamma_n m_0 M_0 (A_{\perp} + \Omega_n^m)^2}]. \quad (2.25)$$

Таким образом, спектр связанных электронно-ядерных колебаний в магнетиках получен в явном виде. Здесь для удобства введены обозначения

$$\omega_{nuc}^b = \gamma_n (H_0 - m_0 (N_{\parallel} - N_{\perp} - \Omega_n^m) - M_0 A_{\parallel}), \quad (2.26)$$

$$\omega_{el}^b = \gamma_e (H_0 + H_a - M_0 (N_{\parallel} - N_{\perp} - \Omega_n^m) - m_0 A_{\parallel}), \quad (2.27)$$

$$\Omega_n^n = 4\pi n / [n + \frac{1 - \xi_0^2}{\xi_0} \frac{\partial}{\partial \xi_0} \ln Q_n^n(\xi_0)], \quad (2.28)$$

$$\Omega_n^{n-1} = 4\pi(n-1) / [\frac{n\xi_0^2 - 1}{\xi_0^2} + \frac{1 - \xi_0^2}{\xi_0} \frac{\partial}{\partial \xi_0} \ln Q_n^{n-1}(\xi_0)]. \quad (2.29)$$

Отметим некоторые асимптотические свойства величин  $\Omega_n^m$ : во-первых для сферического образца ( $a/b = 1$ ) эти величины имеют более простой вид:  $\Omega_n^m = 4\pi m / 2n + 1$ , во-вторых для эллипсоидального образца любой формы справедливо  $\Omega_1^1 = N_{\perp}$ . Сравним полученные результаты со спектром колебаний в безграничном ферромагнетике. В этом случае собственные частоты определяются условием  $\Delta = 0$ , где  $\Delta$  – знаменатель в выражении для восприимчивости (см. выражение (2.12)). Это приводит к собственным частотам

$$\omega_{1,2}^0 = \frac{1}{2} [\omega_{el} - \omega_{nuc} \pm \sqrt{(\omega_{el} + \omega_{nuc})^2 - 4\gamma_e \gamma_n m_0 M_0 A_{\perp}^2}]. \quad (2.30)$$

Сравнивая частоты (2.25) и (2.30), а также определения (2.12) и (2.26), видим, что они переходят друг в друга, если переобозначить размагничивающие факторы:

$$N_{\perp} \rightarrow N_{\perp} + \Omega_n^m.$$

Таким образом, можно сделать следующее заключение. Во-первых, для мод  $(n, n - 1)$  и  $(n, n)$  характеристическое уравнение имеет два решения, причем если величины  $\omega_{el}^b$  и  $\omega_{nuc}^b$  сильно отличаются друг от друга, то одно из решений можно назвать квазиэлектронной модой, а второе – квазиядерной. Во-вторых, для этих мод влияние граничных условий сводится лишь к перенормировке размагничивающих факторов на величину  $\Omega_n^m$ .

Обратимся к простейшим физическим следствиям полученного аналитического решения. Рассмотрим моду колебания с номерами  $(n, n)$  или  $(n, n - 1)$ . Определим для нее внутреннее поле в образце с учетом перенормировки размагничивающих факторов:

$$H_i = H_0 + H_A - M_0(N_{\parallel} - N_{\perp} - \Omega_n^m).$$

Мы получили эквивалентную формулировку задачи: вместо того, чтобы рассматривать колебания намагниченности в конечном образце и учитывать соответствующие граничные условия, можно полагать, что колебания происходят в безграничном образце, но внутреннее поле у каждой моды будет своим. Это внутреннее поле формирует электронную намагниченность  $M_z$ . Магнитное поле  $H_n$ , в котором находится спин ядра атома, имеет порядок  $H_n \sim A_0 M_z$ . Отношение магнитных полей  $H_n$  и  $H_i$  носит название коэффициента усиления ЯМР [7]. В нашем случае, поскольку эффективное внутреннее поле  $H_i$  оказывается различным для различных мод, то для различных мод колебаний окажется различным и коэффициент усиления:

$$\eta(n, m, \xi) = \frac{H_n}{H_i} \approx \frac{M_0 A_0}{H_0 + H_A - M_0(N_{\parallel} - N_{\perp} - \Omega_n^m)}. \quad (2.31)$$

Для демонстрации зависимостей коэффициента усиления от параметра формы сфероидов и номера моды приведена таблица 2.1.

Таблица 2.1 — Коэффициент усиления разных типов магнитостатических колебаний

$H_0=1500 \text{ Э}$	$a/b = 0.5$	$a/b = 1$	$a/b = 2$
$\eta(1, 1)$	82	120	274
$\eta(2, 2)$	78	109	223
$\eta(2, 1)$	90	149	510
$\eta(3, 3)$	77	105	202
$\eta(3, 2)$	83	129	373

В ней приведены коэффициенты усиления ЯМР для вытянутого эллипсоида ( $a/b = 0.5$ ), для сферы ( $a/b = 1$ ) и для сжатого эллипсоида ( $a/b = 2$ ) для мод с наименьшими индексами  $(n, n)$ ,  $(n, n - 1)$ . По таблице можно заметить некоторые закономерности в поведении коэффициента усиления. Во-первых, для сжатого сфероида коэффициент усиления оказывается больше, чем для вытянутого. С увеличением степени сжатия ( $a/b$ ) коэффициент усиления возрастает. Заметим, что коэффициенты усиления в таблице посчитаны для внешнего поля  $H_0 = 1500 \text{ Э}$ . Это поле сравнимо по величине с намагниченностью насыщения  $M_0 = 560 \text{ Э}$  в  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$ , поэтому поле  $H_i$  в знаменателе (2.31) чувствительно к изменению величин  $N_{\parallel}$ ,  $N_{\perp}$ , а значит, и к параметру формы  $\alpha = a/b$ . В больших магнитных полях зависимость от формы будет не столь заметной. Во-вторых, коэффициент усиления мод вида  $(n, n)$  уменьшается с увеличением номера моды  $n$ . Для вытянутых сфероидов уменьшение происходит медленно, а для сжатых довольно быстро. В-третьих, коэффициенты усиления для мод  $(n, n - 1)$  оказываются больше, чем для мод  $(n, n)$ . Этот эффект, как и предыдущий, ярко проявляется для сжатых сфероидов, и слабо выражен для вытянутых.

### 2.3 Особенности связанных электронно-ядерных магнитных колебаний вблизи резонанса и запрещенные зоны

Структура характеристического уравнения (2.22) классифицируется в первую очередь индексами  $(n, m)$ . Это связано с тем, что уравнение (2.22) содержит логарифмическую производную от функции  $P_n^m(S)$ . Поскольку в области  $[-1; 0]$  функция  $P_n^m(S)$  имеет несколько нулей, то левая часть уравнения содержит разрывы второго рода. Корни уравнения следует искать на каждом из интервалов между этими точками разрыва. Однако даже при фиксированных  $(n, m)$  левая часть характеристического уравнения существенно трансформируется при изменении внешнего магнитного поля  $H_0$  и параметра формы  $\alpha$ . Далее для удобства обозначим левую часть (2.22) за  $Y$

$$L(\xi_0) + S \frac{d}{dS} \ln(P_n^{|m|}(S)) - \frac{m\mu_1}{\alpha^2} = Y \quad (2.32)$$

и покажем, как она зависит от формы образца (параметра  $\alpha$ ). Для этого будем использовать известные характеристики ферромагнетика  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$  [52], кооторые приведены в начале данной главы.

Полагаем внешнее постоянное поле  $H_0 = 3 \text{ кЭ}$ . Такая напряженность поля характерна для экспериментов ЯМР, так как она достаточна для насыщения большинства ферромагнетиков. С изменением параметра  $\alpha$  величина  $Y$  изменяется либо по достаточно простому, либо по чрезвычайно сложному сценарию. Первая ситуация реализуется для достаточно малых  $\alpha$ , когда электронные и ядерные моды сильно разнесены. Изменение  $\alpha$  приводит к заметному сдвигу высокочастотной (электронной) части графика зависимости  $Y(\omega)$  и относительно малому сдвигу низкочастотной (ядерной). Число корней уравнения при этом остается неизменным.

В некоторой ограниченной области параметров формы  $\alpha \in (\alpha_{min}; \alpha_{max})$  мы имеем дело со сложной ситуацией. Электронные и ядерные моды находятся близко друг от друга, и их взаимодействие приводит к существенной перестройке уравнения: заметными становятся сдвиги как электронной, так и ядерной ветвей. Более того, могут исчезать некоторые корни уравнения. Число собственных мод колебаний, то есть число корней характеристического уравнения (при фиксированных  $(n, m)$ ), таким образом, зависит от параметра формы  $\alpha$ . Ситуация продемонстрирована на рисунке 2.1, где, выбрана пара индексов  $(n, m) = (4, 0)$ . На этом рисунке сплошная линия – зависимость  $Y(\omega)$ , штриховая прямая –  $Y = 0$ . Масштаб по оси абсцисс выбран так, что отражается область частот  $0 < \omega/(2\pi) < 1.5$  ГГц. Оси на рисунке 2.1 не подписаны, во-первых, чтобы избежать излишней его загроможденности, и во-вторых, с связи с тем, что здесь нас интересует не столько вид зависимости  $Y(\omega)$ , сколько наличие пересечения этой линии с  $Y = 0$ , т. е. решения характеристического уравнения (2.32). Как видно из рисунков с  $\alpha = 3.6; 3.67; 3.68$ , вид функции  $Y(\omega)$  существенно изменяется, но число корней уравнений остается равным четырем. При  $\alpha = 3.7; 3.8$  число корней уже становится равным двум. Причем при изменении с  $\alpha = 3.7$  до  $\alpha = 3.8$  происходит качественный переход: исчезают разрывы второго рода и функция становится непрерывной. Затем начинается область значений  $\alpha$ , где уравнение корней не имеет ( $\alpha = 3.9 - 3.95$ ). При этом, начиная с некоторого  $\alpha$ , опять возникают разрывы второго рода ( $\alpha = 3.95$ ). Далее вновь начинается область, где уравнение имеет корни. Наличие столь интересных особенностей в левой части характеристического уравнения вызывает необходимость исследовать более подробно зависимость собственных частот от соотношения полуосей сфероида. Результаты исследования приведены на рисунке 2.2 для мод с наименьшими значениями  $(n, m)$ :  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(3, 1)$  и  $(4, 0)$ . Простейшая структура получается для  $(n, m) = (1, 1)$ . При  $\alpha < \alpha_1$  есть две разделенные моды: низкочастотная ядерная и высокочастотная электронная (см. рисунок 2.2а). При приближении к левой критической точке  $\alpha = \alpha_1$  разница между их частотами становится малой. В интервале  $(\alpha_1; \alpha_r)$  характеристическое уравнение решений не имеет, и наблюдение собственных мод  $(n, m) = (1, 1)$  становится невозможным. Далее в точке  $\alpha = \alpha_r$  собственные моды появляются снова. При  $\alpha = \alpha_r$  электронная и ядерная частоты равны. С увеличением  $\alpha$  частота одной моды (ядерной) меняется слабо, вторая (электронная) – быстро уменьшается до нуля при некотором значении  $\alpha_0$ . После достижения нуля низкочастотная ветвь снова начинает расти и пересекает слабо изменяющуюся ядерную ветвь. Дальнейшее увеличение  $\alpha$  вновь приводит к хорошо разделенным электронной и ядерной модам. Для моды  $(n, m) = (2, 0)$  (рисунок 2.2б) структура зависимости собственных частот от  $\alpha$  несколько отличается. Левая часть графика ( $\alpha < \alpha_1$ ) аналогична левой части для случая  $(1, 1)$ : имеются две хорошо разделенные моды. Затем, как и ранее, возникает запрещенная зона. Однако поведение мод после запрещенной зоны различно. Сначала возникают две моды с совпадающими частотами. Одна из них остается вблизи ядерной частоты, вторая – с увеличением  $\alpha$  уменьшается до нуля. Далее в фиксированной области изменения

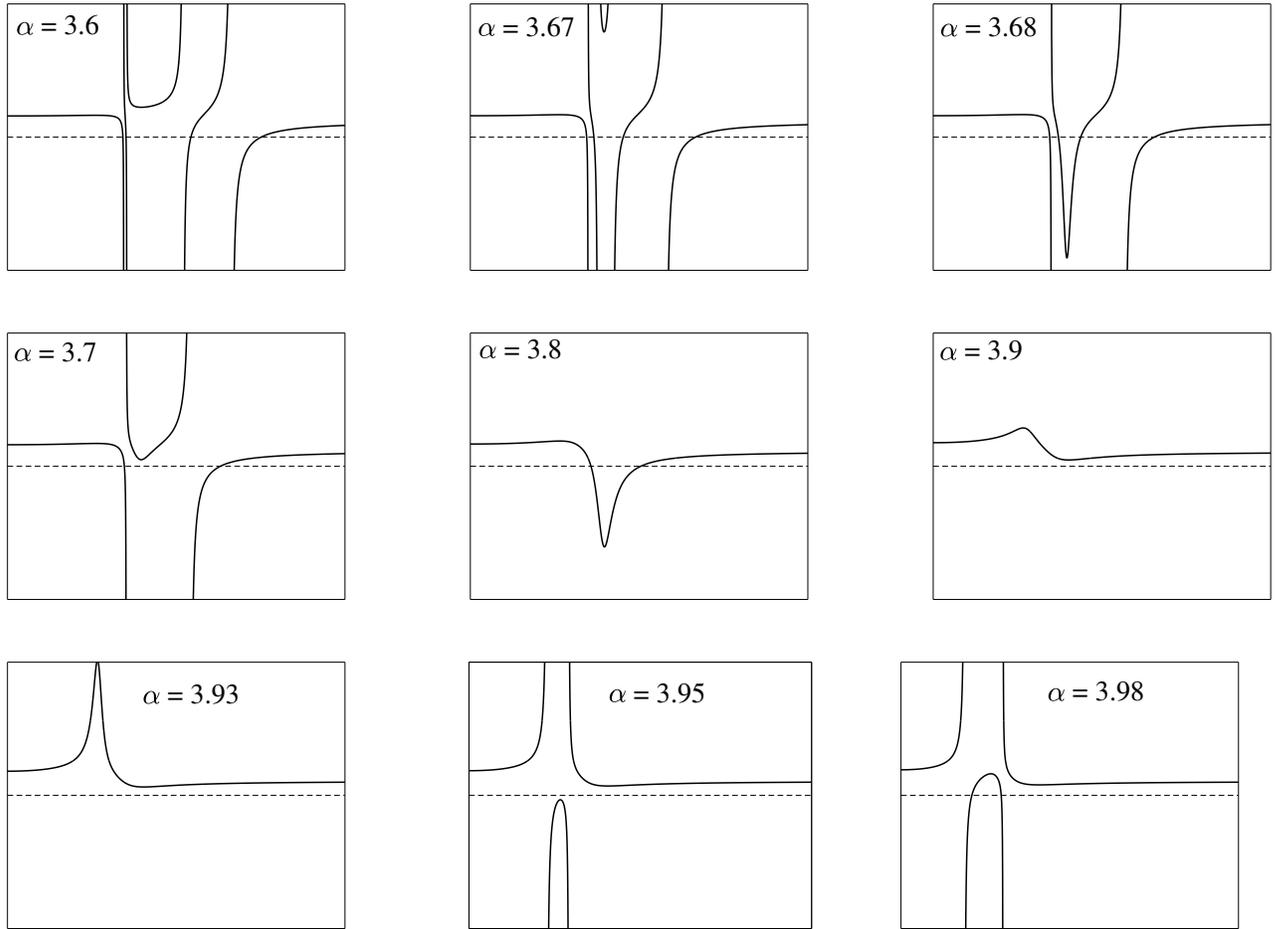


Рисунок 2.1 — Кривые зависимости  $Y(\omega)$  левой части  $Y$  характеристического уравнения (см. (2.32)) от частоты  $\omega$  при  $(n, m) = (4, 0)$  для различных значений параметра формы  $\alpha$ . Штриховая линия соответствует  $Y = 0$ , точки пересечения сплошной и штриховой линий — решения характеристического уравнения (2.32)

$\alpha$  возможна только одна (ядерная) собственная частота. В следующей критической точке снова появляется вторая низкочастотная ветвь (начинается с нулевой частоты): эта мода возрастает до значения ядерной частоты и трансформируется в практически постоянную ядерную моду. При этом та ветвь, что существовала ранее, трансформируется в высокочастотную электронную. Пересечения между низкочастотной и высокочастотной ветвями нет. Моды (2, 1) и (2, 2), (3, 2), (3, 3) имеют такую же структуру, что и мода (1, 1). Мода (3, 0) подобна моде (2, 0). Отличия проявляются только количественные. Для каждой моды будет собственная запрещенная область, собственное значения  $\alpha$ , где одна из частот обращается в нуль, и собственное значение величины  $\alpha$ , при котором электронная и ядерная моды пересекаются. Рассмотренные выше собственные моды имеют простую структуру. Каждой паре индексов  $(n, m)$  соответствует только две собственные моды, которые можно отнести либо к ядерной, либо к электронной подсистемам. На рисунках 2.2в,г изображены более сложные ситуации  $(n, m) = (3, 1)$  и  $(n, m)$

$= (4, 0)$ . В этом случае одной паре  $(n, m)$  соответствует более двух собственных мод и для нумерации этих мод требуется третий индекс  $r$ . Для индексов  $(n, m) = (3, 1)$  (рисунок 2.2в) при малых  $\alpha$  есть три электронные и три ядерные моды. С увеличением  $\alpha$  их частоты сближаются и последовательно «выключаются»: сначала остается четыре моды, потом две, и далее начинается запрещенная область. Затем моды последовательно «включаются» (сначала две моды, потом четыре, потом шесть). При некотором  $\alpha$  частоты всех трех нижних мод обращаются в нуль. Далее остаются три ядерных моды и одна электронная. Последняя сначала является низкочастотной, но потом пересекает ядерные моды и становится высокочастотной. Поведение этой моды аналогично случаю  $(1, 1)$ . Далее при определенном значении  $\alpha$  вновь появляются две низкочастотные электронные ветви, которые возрастают и трансформируются в ядерные моды. При этом две ядерные моды трансформируются в электронные высокочастотные. Их поведение аналогично моде  $(2, 0)$ .

Чуть проще ситуация  $(4, 0)$ , приведенная на рисунках 2.2г. В этом случае имеется две пары мод, поведение которых аналогично модам  $(2, 0)$ . Заметим, что приведенные на рисунке 2.2 моды были построены для поля  $H_0 = 3$  кЭ. Изменение напряженности поля не меняет качественной картины, но приводит к сдвигу критической области, причем уменьшение напряженности приводит к сдвигу влево (к меньшим значениям  $\alpha$ ), а увеличение — к сдвигу вправо. Можно также рассмотреть математически эквивалентную задачу: зафиксировать форму образца (значение  $\alpha$ ) и изменять значение поля  $H_0$ . Результат такого исследования для  $\alpha = 2$  приведен на рисунке 2.3. Очевидно, что все перечисленные особенности поведения собственных частот сохраняются и в этом случае. Сравнение рисунков 2.2 и 2.3 приводит к следующему заключению: эти рисунки симметричны относительно друг друга, а все критические значения параметра  $\alpha$  однозначно преобразуются в соответствующие критические значения внешнего магнитного поля. Из проведенного анализа следует, что роли параметра формы и внешнего постоянного поля скоррелированы. Так, в поле  $H_0 = 3$  кЭ интересные особенности наблюдаются для значения  $\alpha \sim 4$  (см. рисунок 2.3), то есть для достаточно сильно сжатого сфероида. Если взять меньшее значение  $\alpha$ , например  $\alpha = 2$ , то отмеченные особенности должны наблюдаться в полях  $H_0 \sim 1$  кЭ (см. рисунок 2.3).

Для менее сжатых сфероидов критическая область смещается в сторону меньших полей, формально уходя в отрицательную область (поле  $H_0$  переворачивается). Поскольку в нашей постановке задачи полагалось  $H_0 > 0$ , то случай меньших  $\alpha$  с точки зрения изучения критической области интереса не представляет. Исследуем детально зависимость положения критической области от параметров  $H_0, \alpha$ . Ограничимся изучением зависимости границ  $H_1, H_2$  области  $H_1 < H_0 < H_2$ , в которой собственные моды запрещены, от параметра формы. На рисунке 2.4а приведены зависимости критических полей — границ запрещенной зоны от параметра формы  $\alpha$  для  $(n, m) = (1, 1)$  (жирные линии) и  $(n, m) = (3, 1)$  (тонкие линии). Сплошные линии соответствуют нижним границам зон ( $H_1$ ), штриховые — верхним ( $H_2$ ). В области между

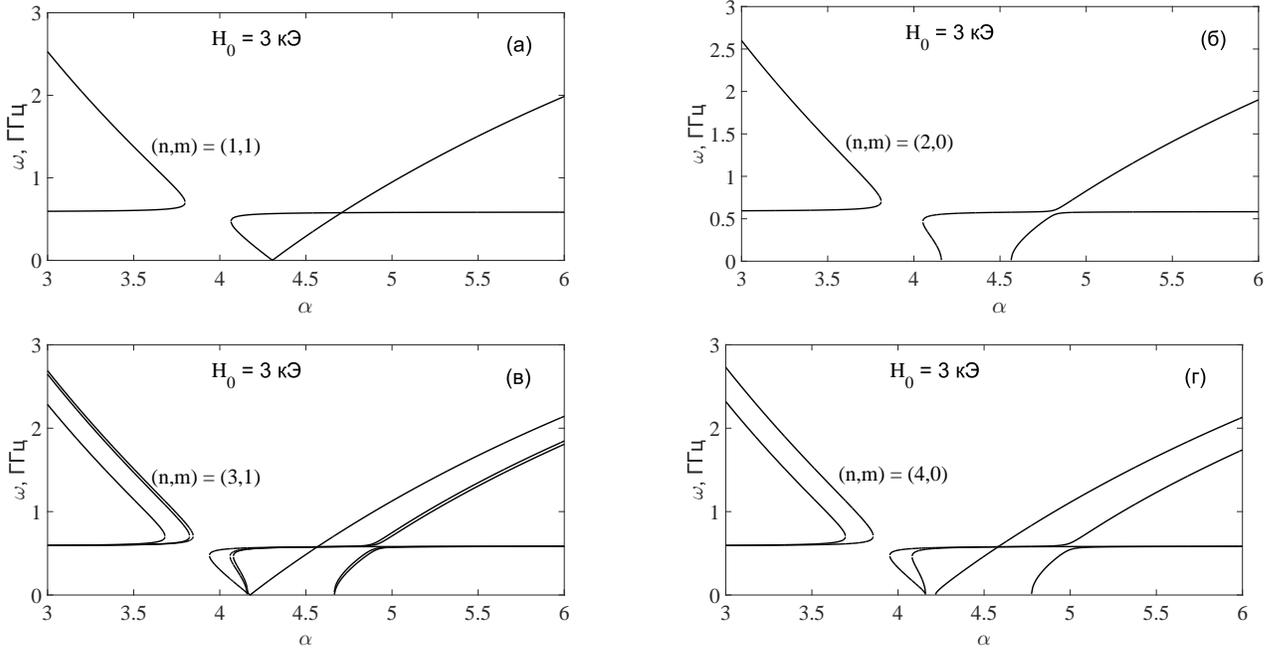


Рисунок 2.2 — Зависимости собственных частот от параметра формы  $\alpha$ .

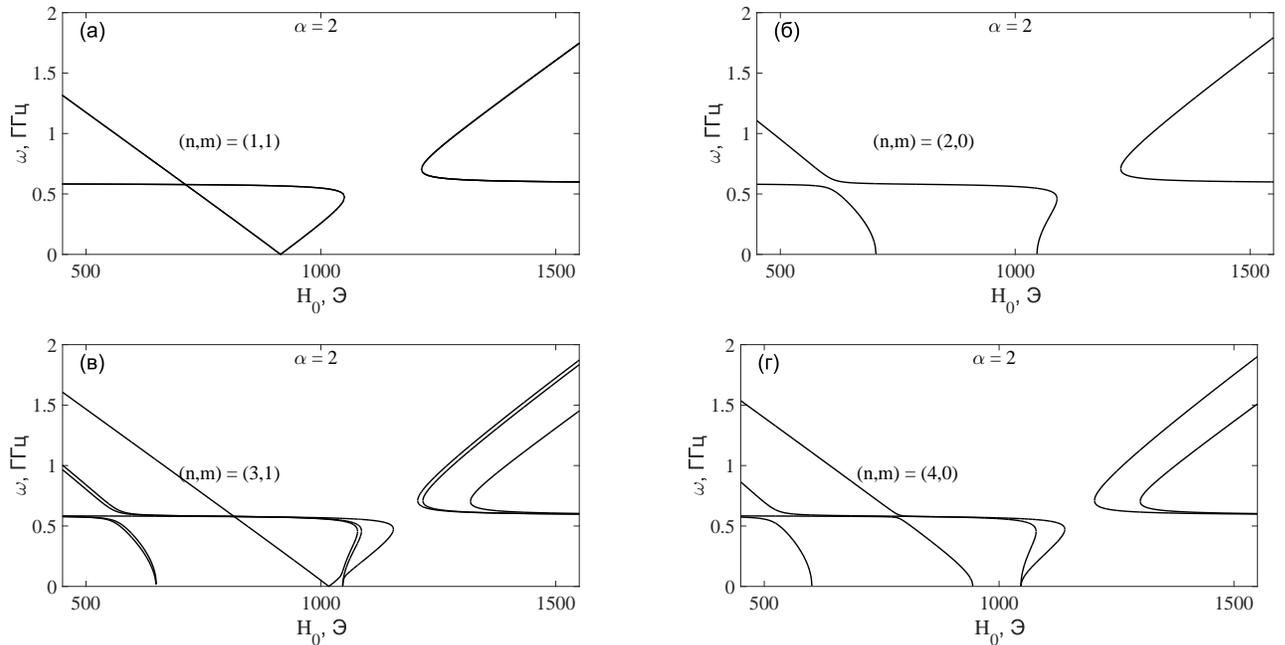


Рисунок 2.3 — Зависимости собственных частот от внешнего поля.

сплошной и штриховой линиями соответствующие моды колебаний существовать не могут. По рисунку 2.4 можно сделать ряд выводов. Во-первых, с увеличением  $\alpha$  (сжатие сфероид) критическая область смещается в сторону более высоких полей. Во-вторых, ширина запрещенной зоны  $\Delta H = H_2 - H_1$  слабо зависит от  $\alpha$ . В-третьих, границы зон зависят от индекса колебания  $(n, m)$ , но на рисунке 2.4а детали этой зависимости не видны. Она продемонстрирована на

рисунке 2.4б, где изображены зависимости ширины запрещенной области от формы образца. Видно, что для мод типа  $(n, n - 1)$  и  $(n, n)$  ширина области  $\Delta H$  практически не зависит от параметра формы  $\alpha$  и слабо зависит от  $n$ , тогда как для остальных мод форма образца кардинально влияет на ширину запрещенной области. Для некоторых мод, например  $(2, 0)$ ,  $(3, 0)$  и  $(4, 1)$ , ширина зоны монотонно возрастает с  $\alpha$ , приближаясь к модам  $(n, n - 1)$  и  $(n, n)$ . Для других мод, таких как  $(3, 1)$ ,  $(4, 0)$  и  $(4, 2)$ , ширина зоны немонотонна: сначала она сужается до некоторого значения  $\alpha$ , а затем начинает расширяться. Рисунки 2.4а, б дополняют друг друга: по (а) можно приблизительно определить положение критической области, а по (б) — ее ширину.

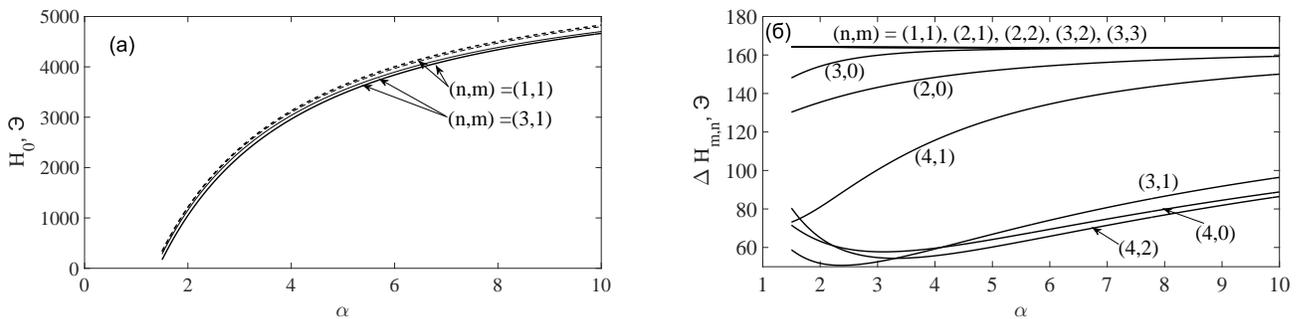


Рисунок 2.4 — Положение (а) и ширина (б) запрещенной зоны в зависимости от параметра формы.

## 2.4 Условия вырождения электронно-ядерных мод колебаний

Решениями характеристического уравнения являются электронные и ядерные резонансные частоты  $\omega(n, m, r, \alpha, H_0)$ , зависящие от индексов задачи, параметра формы и поля. Структура решений характеристического уравнения зависит от напряженности магнитного поля  $H_0$  и от параметра формы  $\alpha$ . Для определенных значений этих параметров собственные частоты ядерных и электронных мод практически совпадают, и трудно отделить одну моду от другой. Это приводит к существенной перестройке собственных мод, в частности к появлению запрещенных зон, рассмотренных в предыдущем разделе. В текущем разделе исследуются собственные моды в области полей справа от критической. Число собственных мод, таким образом, полагается постоянным.

На рисунке 2.5 показаны полевые зависимости частот магнитостатических мод с наименьшими индексами  $(n, m)$ . Для колебаний с  $(n, m) = (1, 1); (2, 0); (2, 1); (2, 2)$ , приведенных на рисунке 2.5а характеристическое уравнение имеет два решения, если магнитное поле  $H_0$  превышает некоторое значение  $H_2$ . Нижняя ветвь представляет собой ядерные колебания, а верхняя относится к электронным. Число мод колебаний с большими значениями  $(n, m)$  может быть больше двух. Например, набор  $(n, m) = (6, 0)$  (см. рисунок 2.5б), допускает шесть ветвей колебаний: три электронные и три ядерные. Для нумерации различных собственных частот необходим третий индекс  $r$ .

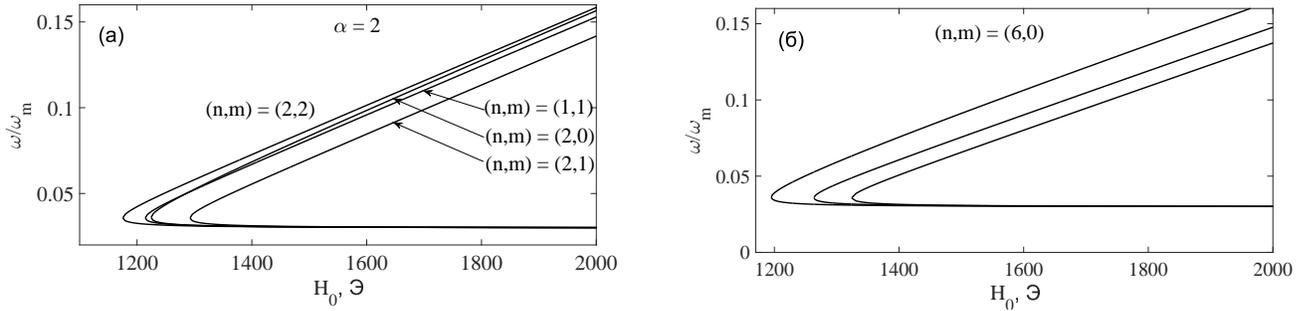


Рисунок 2.5 — Зависимость электронных и ядерных магнитостатических мод от внешнего поля  $H_0$  для  $(n, m) = (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)$  (а) и зависимость электронных и ядерных магнитостатических мод от внешнего поля  $H_0$  для  $(n, m) = (6, 0)$  (б).

Как отмечалось в разделе 2.3, критическое поле  $H_2$ , после которого появляется соответствующая мода, зависит от индексов колебания  $(n, m, r)$  и может быть определено численно. В окрестности поля  $(H_2)_{n,m,r}$  электронные и ядерные моды сильно связаны и имеют сложную полевую зависимость. Кроме того, если мы работаем в критической области, то небольшое изменение поля приводит к изменению числа собственных мод, что отражено на рисунках 2.5 а, б. Мы будем считать поле  $H_0$  достаточно далеким от  $H_2$ , чтобы число собственных мод не менялось, но достаточно близким к  $H_2$ , чтобы оставалась зависимость частоты от поля.

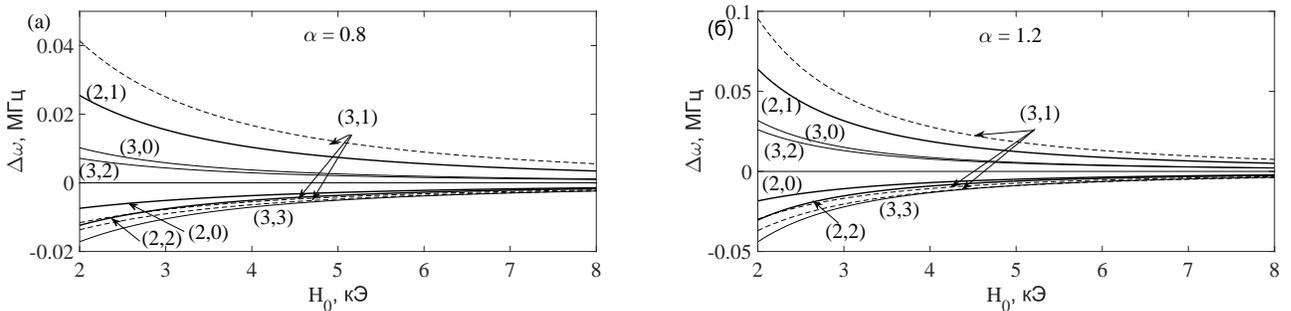


Рисунок 2.6 — Разность частот ядерных колебаний и колебания с индексами  $(1, 1)$  в зависимости от магнитного поля для вытянутого ( $\alpha = 0.8$ ) и сжатого ( $\alpha = 1.2$ ) сфероидов.

Поскольку ядерные моды с различными  $(n, m)$  слабо зависят от частоты, то на графике зависимости  $\omega_{nmr}(H_0)$  трудно показать особенности поведения каждой из мод. Для изучения особенностей удобно перейти к исследованию относительных частот  $\Delta\omega = \omega_{nmr} - \omega_{11}$ . Мода  $(n, m) = (1, 1)$ , относительно которой рассматриваются остальные частоты, представляет собой основную частоту ЯМР. Зависимости  $\Delta\omega(H_0)$  относительных частот от величины внешнего поля для вытянутого и сжатого сфероидов приведены на рисунке 2.6. По рисунку 2.6 заметны несколько особенностей поведения собственных мод. Во-первых, с увеличением поля  $H_0$  уменьшается разница между частотами различных собственных мод. Во-вторых, расстояние между модами сжатого сфероида оказывается больше расстояния между модами вытянутого сфероида.

В-третьих, некоторые собственные моды пересекаются друг с другом. В частности, мода  $(n, m) = (2, 2)$  пересекает  $(n, m, r) = (3, 1, 2)$  и мода  $(n, m, r) = (3, 1, 1)$  пересекает моду  $(n, m) = (3, 3)$ . Обратим внимание, что пересечение мод означает вырождение собственных частот: две разные моды в одном и том же внешнем поле  $H_0$  имеют одинаковую частоту. Заметим, что если мы примем во внимание еще и моды с  $n = 4$  и  $m = 0, 1, 2, 3, 4$ , то общее число собственных типов колебаний будет 19, а число точек пересечения в интересующей нас области ( $\alpha \sim 1$ ,  $H_0 = 1 - 10$  кЭ) увеличивается до 10. Однако, поскольку магнитостатический потенциал  $\psi$  выражается через функции Лежандра  $P_n^m$ , то его структура усложняется с увеличением  $n$  (см. [58, 61–64]). Структура магнитного поля внутри образца  $H = -\nabla\psi$  и намагниченности  $\mathbf{M} = \hat{\chi}\mathbf{h}$  также усложняется, и такие структуры вряд ли можно отнести к экспериментально наблюдаемым. В связи с этим моды с  $n \geq 4$  здесь не рассматриваются. Точки пересечения магнитостатических мод  $(2, 2) - (3, 1, 2)$  и  $(3, 1, 1) - (3, 3)$  исследованы подробно. Результаты представлены на рисунке 2.7. Приведем небольшое пояснение этих результатов. Пусть образец имеет форму сфероида с заданными  $a, b$ . Тогда пересечение мод будет наблюдаться в некотором поле  $H_{dg}$  на частоте  $\omega_{dg}$ . Поле  $H_{dg}$  при этом логично назвать полем вырождения, а соответствующую частоту  $\omega_{dg}$  – частотой вырождения. Если непрерывно менять соотношение  $\alpha = a/b$ , то поле  $H_{dg}$  и соответствующая частота  $\omega_{dg}$  должны быть непрерывными функциями параметра  $\alpha$ . Эти функции построены на основе численного анализа решений характеристического уравнения и приведены на рисунке 2.7.

Рассматриваемый диапазон магнитных полей составлял 2 - 10 кЭ. Эти поля являются обычными в ЯМР-экспериментах. Рисунок 2.7 можно использовать следующим образом: если у нас есть образец с заданными параметрами, мы можем найти магнитное поле вырождения  $H_0 = H_{dg}$  по рисунку 2.7а. Одна кривая на 2.7а соответствует вырождению  $\omega_{22} = \omega_{312}$  а другая соответствует  $\omega_{311} = \omega_{33}$ . Соответствующая частота определяется по рисунку 2.7б. Заметим, что эти частоты вырождения составляют около 580 МГц, что близко к частоте ЯМР  $\text{Mn}^{55}$  в  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$  [7]. Напомним, что согласно нашей модели, характеристическое уравнение на собственные частоты имеет разный вид для случаев вытянутого образца ( $\alpha < 1$ ), сферы ( $\alpha = 1$ ) и сжатого сфероида ( $\alpha > 1$ ) (см. уравнение (2.22)). Решение этого уравнения проходит через точку  $\alpha = 1$  непрерывно. Результат вполне предсказуем, поскольку очевидно, что случай сферы с физической точки зрения не является вырожденным..

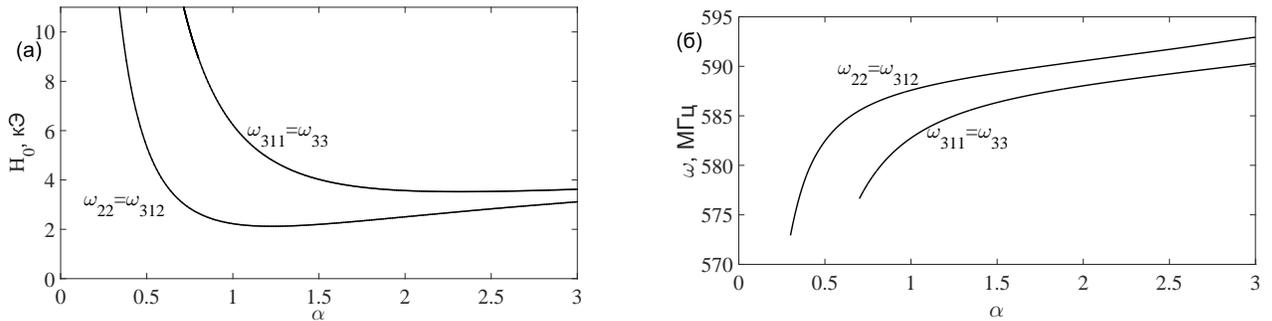


Рисунок 2.7 — Зависимость поля вырождения и частот вырождения от параметра формы образца и частоты.

Зависимость поля вырождения от параметра формы представляет интерес для исследования распределения магнитных полей внутри образца экспериментальными методами по следующим причинам. В магниторезонансных экспериментах (ЯМР, ЭПР, ФМР) наблюдаются пики поглощения на частотах, соответствующих собственным частотам колебаний магнитного момента. Наличие пика в спектре поглощения говорит лишь о наличии собственной частоты, но не о распределении намагниченности в образце. Если исследовать поведение пиков, изменяя внешнее постоянное поле  $H_0$  в окрестности поля вырождения  $H_{dg}$ , то пересечение мод можно обнаружить экспериментально. По положению точки вырождения можно идентифицировать моды, которые пересекаются в данной точке. Если же удалось идентифицировать индексы мод, то можно сказать, как именно распределена намагниченность по объему образца и по его поверхности.

## Выводы к главе 2

В главе 2 исследована задача о связанных колебаниях электронной и ядерной намагниченности в ферромагнитном образце, имеющем форму сфероида. Построена феноменологическая модель описания указанного явления: использовано магнитостатическое приближение, учтены граничные условия, получено характеристическое алгебраическое уравнение для определения собственных частот колебаний. Наиболее важные результаты могут быть структурированы следующим образом:

1. Для собственных мод с индексами  $m = n$  и  $m = n - 1$  получено аналитическое выражение для коэффициента усиления ЯМР и исследована его зависимость от параметра формы и номера моды колебаний.
2. Параметр формы  $\alpha = a/b$  и величина внешнего поля  $H_0$  определяют положение области взаимодействия электронных и ядерных мод (критическая область). Показано, что резонансные частоты определяются не только внешним полем, но и границей образца. Определено, что из-

менение  $\alpha$  и  $H_0$  в критической области приводит не только к существенному изменению частот собственных мод, но и к изменению их числа.

3. Для каждой моды  $(n, m)$  существует запрещенная область полей и форм, где не может реализоваться ни одна из мод  $(n, m, r)$ . В частности, для мод  $(3, 1), (1, 1)$  запрещенная зона лежит в области полей  $H_0 \sim 100 - 5000 \text{ Э}$  и форм  $\alpha \sim 2 - 10$ .

4. Вид зависимостей частот собственных мод от внешнего магнитного поля  $\omega_{nmr}(H_0)$  оказывается различным для различных наборов  $n, m, r$ . Некоторые линии  $\omega_{nmr}(H_0)$  пересекаются, при этом две различные моды имеют одинаковую частоту (точка вырождения) при заданном поле  $H_0$  и параметре формы  $\alpha$ . Установлено, что частоты вырождения мод (311) и (33), и (22) и (312) являются монотонно возрастающими функциями  $\alpha$  (при  $0.3 < \alpha < 3$ ), тогда как поле вырождения зависит от  $\alpha$  немонотонно.

Результаты по данной главе приведены в статьях [A1, A2].

### 3 Фокусировка и каустика спиновых волн

Предыдущая глава была посвящена исследованию взаимодействия электронной и ядерной магнитных подсистем в ферромагнетике. Были изучены связанные колебания электронной и ядерной намагниченности. В этих условиях справедлива феноменологическая модель описания движения спинов, в рамках которой удалось не только учесть все основные взаимодействия в магнетике: обменное, анизотропию, магнитное дипольное и сверхтонкое взаимодействия, но и принять во внимание границу ферромагнетика и исследовать влияние формы образца на частоты собственных мод.

В настоящей главе исследуется поведение спиновых волн в ферро- и антиферромагнетиках в рамках микроскопического (квантовомеханического) описания. Для этого используется модель Гейзенберга – простейшая модель обменного взаимодействия. Кроме того, поскольку в ферромагнетиках обменное взаимодействие является самым сильным [41], то в большинстве случаев мы пренебрегаем всеми прочими взаимодействиями. Размеры ферро- и антиферромагнетиков в настоящей главе полагаются много больше длины волн, что позволяет не принимать во внимание граничные эффекты. Однако, даже столь простая модель допускает весьма необычные режимы распространения спиновых волн.

Интерес, с точки зрения особенных свойств спиновых волн, представляют ферромагнетики на основе редкоземельных элементов типа  $\text{EuS}$  и  $\text{EuO}$  [65–67]. Эти соединения хорошо описываются в рамках модели Гейзенберга, а обменное взаимодействие в них ведет себя довольно сложным образом [68–70]. В частности, величина взаимодействия  $J_1$  спина выбранного атома со спином ближайшего к нему атома может быть того же порядка, что и величина взаимодействия  $J_2$  со спином соседа, следующего за ближайшим. При этом в некоторых веществах значения постоянных взаимодействия могут иметь разные знаки (к примеру, антиферромагнитный обмен с ближайшими соседями и ферромагнитный со вторыми соседями), а в некоторых – иметь один знак (ферро- или антиферромагнитный обмен как с первыми, так и со вторыми соседями). Таким образом, в ферромагнетиках может существовать конкуренция двух обменных взаимодействий, и наша задача – исследовать эффекты, к которым приводит эта конкуренция. В настоящей главе приведено решение двух задач: построена микромагнитная теория спиновых волн в ферромагнетиках с простой кубической, объемно-центрированной (ОЦК) и гранецентрированной (ГЦК) кубическими решетками в рамках модели Гейзенберга с учетом первых и вторых соседей, а также построена теория для антиферромагнетиков с объемно-центрированной

тетрагональной (ОЦТ) кристаллической решеткой. Исследованы различные режимы распространения спиновых волн в указанных системах. Проанализировано влияние отношения обменных постоянных  $\xi = J_2/J_1$  на поведение спиновых волн. Исследованы условия, при которых может наблюдаться фокусировка и каустика спиновых волн в ферро- и антиферромагнетиках.

### 3.1 Спиновые волны в ферромагнетиках

#### 3.1.1 Закон дисперсии спиновых волн в ферромагнетике с кубической кристаллической решеткой

Запишем гамильтониан обменного взаимодействия в спиновых переменных, выделяя явно взаимодействие спина атома с первыми и вторыми ближайшими соседями:

$$\mathcal{H} = -J_1 \sum_{j\delta_1} S_j S_{j+\delta_1} - J_2 \sum_{j\delta_2} S_j S_{j+\delta_2}. \quad (3.1)$$

Здесь  $J_{1,2}$ —постоянные обменного взаимодействия с первой и второй координационными сферами. Внешнее магнитное поле положено равным нулю, потому что его влияние сводится ко сдвигу закона дисперсии по оси частот. Переходя к операторам рождения и уничтожения магнов по методу Гольштейна-Примакова [71], получим выражение

$$\mathcal{H} = \sum_q \{2SJ_1 z_1 (1 - \gamma_q)\} b_q^\dagger b_q + \sum_l \{2SJ_2 z_2 (1 - \gamma_l)\} b_l^\dagger b_l. \quad (3.2)$$

Здесь  $z_{1,2}$  — число атомов в первой и второй координационных сферах, а величины  $\gamma_i$  равны  $z_i^{-1} \sum_\delta e^{i\mathbf{q}\cdot\delta}$ . В выражении (3.2) коэффициент при операторе числа частиц  $b_q^\dagger b_q$  определяет энергию магнона с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Заметим, что величины  $\gamma_i$  являются действительными в силу симметрии решетки: для каждого атома из координационной сферы, находящегося в точке с координатой  $\Delta\mathbf{r}$  относительно выбранного атома, найдется атом в позиции  $-\Delta\mathbf{r}$ . Поэтому сумма, определяющая  $\gamma_i$  состоит из пар слагаемых вида  $e^{i(\mathbf{q}\cdot\Delta\mathbf{r})} + e^{-i(\mathbf{q}\cdot\Delta\mathbf{r})} = 2 \cos(\mathbf{q} \cdot \Delta\mathbf{r})$ .

Поскольку в результате наших действий Гамильтониан приведен к диагональному виду в магновых переменных, то коэффициенты при  $b_q^\dagger b_q$  задают энергию  $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$  соответствующей квазичастицы. Вычисляя величины  $\gamma_i$  для различных типов решетки, найдем законы дисперсии магнов. Имеем

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{q}) &= \frac{2S}{\hbar} [J_1(3 - \cos(aq_x) - \cos(aq_y) - \cos(aq_z)) + \\ &+ 2J_2(3 - \cos(aq_x) \cos(aq_z) - \cos(aq_y) \cos(aq_z) - \cos(aq_x) \cos(aq_y))] \end{aligned} \quad (3.3)$$

для простой кубической решетки,

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{q}) = & \frac{2S}{\hbar} \left[ 2J_1 \left( 3 - \cos\left(\frac{a}{2}q_x\right) \cos\left(\frac{a}{2}q_z\right) - \cos\left(\frac{a}{2}q_y\right) \cos\left(\frac{a}{2}q_z\right) - \cos\left(\frac{a}{2}q_x\right) \cos\left(\frac{a}{2}q_y\right) \right) + \right. \\ & \left. + J_2 \left( 3 - \cos(aq_x) - \cos(aq_y) - \cos(aq_z) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

для гранецентрированной кубической, и

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{q}) = & \frac{2S}{\hbar} \left[ 4J_1 \left( 1 - \cos\left(\frac{a}{2}q_x\right) \cos\left(\frac{a}{2}q_y\right) \cos\left(\frac{a}{2}q_z\right) \right) + \right. \\ & \left. + J_2 \left( 3 - \cos(aq_x) - \cos(aq_y) - \cos(aq_z) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

для объемно-центрированной кубической.

Приведенные законы дисперсии (3.3)-(3.5) определяются следующими параметрами системы: постоянные обменного взаимодействия с первыми  $J_1$  и вторыми  $J_2$  соседями, величина спина атома  $S$  и постоянная решетки  $a$ . Число этих параметров можно существенно уменьшить, введя безразмерную частоту магнонов  $\tilde{\omega} = \omega/\omega_e$ , где  $\omega_e = 2SJ_1/\hbar$  и безразмерный волновой вектор  $aq \rightarrow q$ . В безразмерной форме законы дисперсии определяются при помощи единственного параметра  $\xi = J_2/J_1$  и имеют следующий вид:

Простая кубическая

$$\tilde{\omega}(\mathbf{q}) = 3 - \cos q_x - \cos q_y - \cos q_z + 2\xi (3 - \cos q_x \cos q_z - \cos q_y \cos q_z - \cos q_x \cos q_y). \quad (3.6)$$

Гранецентрированная кубическая

$$\tilde{\omega} = 2 \left( 3 - \cos \frac{q_x}{2} \cos \frac{q_z}{2} - \cos \frac{q_y}{2} \cos \frac{q_z}{2} - \cos \frac{q_x}{2} \cos \frac{q_y}{2} \right) + \xi (3 - \cos q_x - \cos q_y - \cos q_z). \quad (3.7)$$

Объемно-центрированная кубическая

$$\tilde{\omega} = 4 \left( 1 - \cos \frac{q_x}{2} \cos \frac{q_y}{2} \cos \frac{q_z}{2} \right) + \xi (3 - \cos q_x - \cos q_y - \cos q_z). \quad (3.8)$$

Параметр  $\xi$  в различных веществах может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Определим допустимые пределы его изменения. В длинноволновом приближении ( $aq \ll 1$ ) спектры запишутся следующим образом: для простой кубической решетки  $\tilde{\omega}(q) = (1 + 4\xi)\frac{q^2}{2}$ , для ГЦК  $\tilde{\omega}(q) = (1 + \xi)\frac{q^2}{2}$ , для ОЦК  $\tilde{\omega}(q) = (1 + \xi)\frac{q^2}{2}$ . Из этих выражений следует, что значения  $\xi = J_2/J_1$  для простой кубической решетки ограничены выражением  $\xi > -1/4$ , для ГЦК и ОЦК случаев они могут изменяться в пределах  $\xi > -1$ . При прочих значениях  $\xi$  предложенная модель описания оказывается некорректной: либо необходим учет влияния третьих соседей в рамках модели Гейзенберга, либо становится неприменимой сама модель

Гейзенберга. Значения  $\xi$  для разных материалов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 — Параметры взаимодействия с первой и второй координационными сферами

Ферромагнетик	Решетка	$J_1, \text{K}$	$J_2, \text{K}$	$\xi$
Fe [72]	ОЦК	226	129	0.6
Co [72]	ГЦК	171	17.4	0.1
Ni [72]	ГЦК	32.4	0.947	0.03
EuO [68]	ГЦК	0.606	0.119	0.2
EuS [68]	ГЦК	0.236	-0.118	-0.5

Из таблицы 3.1 видно, что величина  $\xi$  может быть как малой (Ni), так и достаточно большой (Fe и EuS), как положительной, так и отрицательной. В дальнейшем мы будем полагать  $\xi$  параметром теории и проведем исследования влияния этого параметра на характеристики волн.

### 3.1.2 Закон дисперсии в ГЦК-ферромагнетиках

Как показывают эксперименты по рассеянию нейтронов [73], спиновые волны в исследуемых ферромагнетиках распространяются анизотропно. Наша теоретическая модель утверждает, что анизотропия в ферромагнетиках с простой кубической, ОЦК и ГЦК решетками может наблюдаться лишь для больших значений волнового числа  $q$ . Для демонстрации этого утверждения рассмотрим закон дисперсии спиновых волн в типичном ГЦК-ферромагнетике EuO, приведенный на рисунке 3.1а. Сплошная линия на этом рисунке соответствует направлению [001], штриховая направлению [110] и пунктирная – [111]. Видно, что отличия наблюдаются лишь при высоких частотах и больших волновых числах. Заметим, что в ГЦК решетках анизотропия будет наблюдаться даже если вторые соседи не будут оказывать никакого влияния ( $\xi = 0$ ), что отражено на рисунке 3.1б. Более того, при  $\xi = 0$ , анизотропия становится более выраженной. Таким образом, положительные значения  $\xi$  уменьшают анизотропию и смещают ее в область более высоких частот. Отрицательные же значения  $\xi$ , наоборот, увеличивают анизотропию системы и смещают ее в область более низких частот, что отражено на рисунке 3.1в.

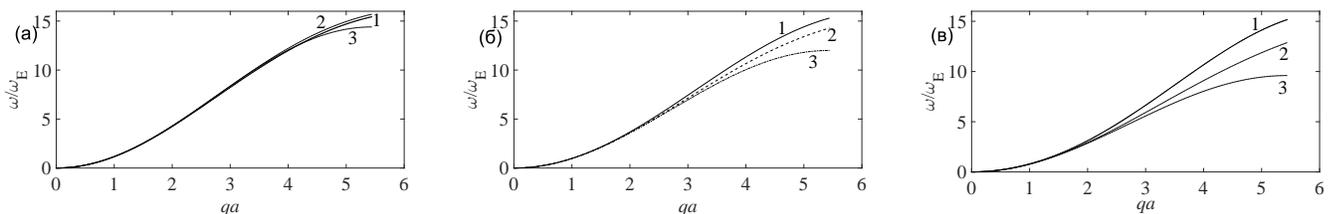


Рисунок 3.1 — Законы дисперсии в ГЦК-ферромагнетиках (а) в EuO ( $\xi = 0.2$ ), (б) при  $\xi = 0$ , и (в) при  $\xi = -0.2$ . Линии 1 соответствуют направлению [001], линии 2 – [110], и линии 3 – [111].



Рисунок 3.2 — Линии постоянной частоты в EuO ( $\xi = 0.2$ ) (а) в плоскости  $\{001\}$  и (б) в плоскости  $\{110\}$ . Линии 1 соответствуют частоте  $0.8\omega_{max}$ , линии 2 –  $0.9\omega_{max}$ , и линии 3 –  $0.999\omega_{max}$ . Штриховыми стрелками обозначены волновые векторы, сплошными – направления групповых скоростей.

В приведенных законах дисперсии частоты спиновых волн ограничены сверху. Величина верхней границы частоты, как следует из рисунка 3.1, зависит от направления распространения. Мы будем работать в диапазоне частот, при котором волны существуют во всех направлениях и границу этого диапазона обозначать  $\omega_{max}$ . Из приведенных рисунков следует, что наиболее яркие особенности в поведении спиновых волн происходят вблизи этой частоты.

Переходим к изучению эффектов фокусировки спиновых волн. Эти эффекты могут быть классифицированы по величине коэффициента усиления, который, в свою очередь, определяется поверхностями постоянного уровня частоты (см. Приложение Б):

$$A = \frac{\Delta\Omega_q}{\Delta\Omega_d} = \frac{\cos\beta}{|K|q^2}, \quad (3.9)$$

где  $\Delta\Omega_d$  - угол, под которым виден детектор из точечного источника волн,  $\Delta\Omega_q$  - телесный угол волновых векторов волн, имеющих направление групповых скоростей внутри  $\Delta\Omega_d$ ,  $\beta$  - угол между групповой скоростью и волновым вектором,  $K$  - гауссова кривизна поверхности [74, 75].

Для начала, построим поверхности уровня для ферромагнетика EuO в кристаллографических плоскостях  $\{001\}$  и  $\{110\}$  (см. рисунок 3.2). В плоскости  $\{001\}$  линии постоянной частоты практически неотличимы от окружностей вплоть до частот, близких к  $\omega_{max}$  (см. рисунок 3.2а). Направления групповых скоростей при этом, очевидно, практически совпадают с направлениями волновых чисел, и коэффициент усиления будет мало отличаться от единицы. Волны в плоскости  $\{001\}$  распространяются изотропно. Намного более интересная ситуация складывается в плоскости  $\{110\}$  (см. рисунок 3.2б). При частотах, далеких от верхней границы ( $\omega = 0.8\omega_{max}$ ,  $\omega = 0.9\omega_{max}$ ), волны распространяются изотропно. Однако при приближении к границе ( $\omega = 0.999\omega_{max}$ ) на линии постоянного уровня появляется особенность вблизи направления  $[111]$  ( $\theta = \arctg(\sqrt{2})$ ). Групповые скорости (сплошные стрелки на рисунке 3.2б) и волновые векторы (штриховые стрелки) в окрестности этого угла не параллельны, и следовательно, коэффициент усиления может существенно отличаться от единицы. Однако заметим,

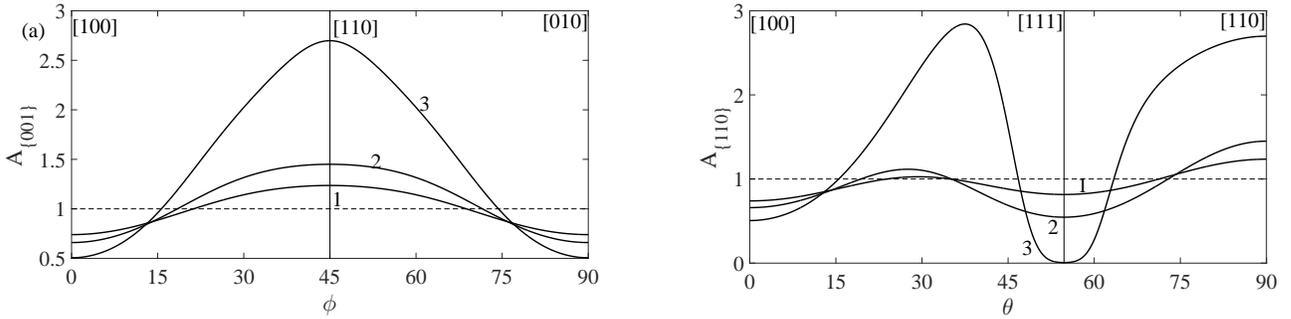


Рисунок 3.3 — Зависимости коэффициента усиления от направления волнового вектора  $\mathbf{q}$  в  $\text{EuO}$  ( $\xi = 0.2$ ) (а) в плоскости  $\{001\}$  и (б) в плоскости  $\{110\}$ . Линии 1 соответствуют частоте  $0.8\omega_{max}$ , линии 2 —  $0.9\omega_{max}$ , и линии 3 —  $0.999\omega_{max}$ .

что поверхность постоянной частоты остается выпуклой при всех углах  $\theta$ . Следовательно, гауссова кривизна поверхности всюду положительна, и расходимостей в коэффициенте усиления не появляется. Каустики в веществах типа  $\text{EuO}$  реализовать не может, однако некоторые эффекты фокусировки при частотах, близких к  $\omega_{max}$  будут наблюдаться.

Более подробный анализ поверхностей постоянной энергии можно провести, рассматривая зависимости коэффициента усиления от направления волнового вектора  $\mathbf{q}$ , приведенные на рисунке 3.3. Видно, что в плоскости  $\{001\}$  коэффициент усиления при малых частотах близок к единице при всех углах, но при больших частотах появляется сильная зависимость от направления. Наибольшая его величина получается в симметричном направлении ( $\varphi = \pi/4$ ) и составляет около 2.5. Наименьшее значение получается в направлениях  $[100]$  и  $[010]$  и составляет примерно 0.5. Таким образом, визуальная близость изолиний на рисунке 3.2а к окружностям оказывается обманчивой и вблизи направления  $[101]$  можно ожидать фокусировку, а вблизи  $[100]$  — дефокусировку. В плоскости  $\{110\}$  ситуация более любопытная. Во-первых, в этой плоскости зависимость  $A(\theta)$  не симметрична. Фокусировка в этой плоскости наблюдается в двух направлениях: при  $\theta \approx 0.6$  и при  $\theta = \pi/2$  (что соответствует направлению  $[110]$ ). Максимальное значение коэффициента усиления в указанных направлениях имеет величину около 3, что примерно соответствует максимуму  $A$  плоскости  $\{001\}$ . Однако, самой любопытной оказывается окрестность направления  $[111]$ . Здесь коэффициент усиления уменьшается практически до нуля, что означает, что в этом направлении волны практически не распространяются. Резюмируя полученные результаты, можно заявить, что эффекты фокусировки в  $\text{EuO}$  выражены слабо (максимальное значение коэффициента усиления всего несколько единиц), однако в окрестности направления  $[111]$  должна наблюдаться ярко выраженная дефокусировка.

### 3.1.3 Коэффициент усиления и каустика в ГЦК-ферромагнетиках

Выше были рассмотрены основные закономерности в законе дисперсии редкоземельного ферромагнетика  $\text{EuO}$ , имеющего ГЦК структуру и соотношение между обменными постоянными



Рисунок 3.4 — Линии постоянной частоты в плоскости  $\{001\}$  при  $\xi = -0.3$  (а) и  $\xi = -0.7$  (б). Линии 1 соответствуют частоте  $0.8\omega_{max}$ , линии 2 –  $0.9\omega_{max}$ , и линии 3 –  $0.999\omega_{max}$ . Штриховыми стрелками обозначены волновые векторы, сплошными – направления групповых скоростей.

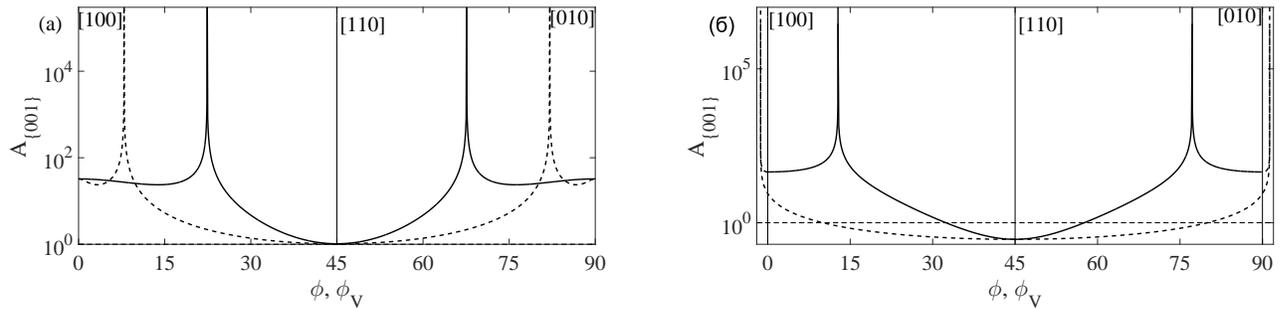


Рисунок 3.5 — Коэффициент усиления в зависимости от направления в плоскости  $\{001\}$  при  $\xi = -0.3$  (а) и  $\xi = -0.7$  (б) при частоте  $0.999\omega_{max}$ . Сплошная линия отражает зависимость  $A(\varphi)$  в пространстве волновых чисел, штриховая  $A(\varphi_V)$  – в пространстве групповых скоростей.

$\xi = 0.2$ . Однако заметим, что в ГЦК-ферромагнетиках параметр  $\xi$  может быть существенно различным по величине, и более того, он может быть как положительным, так и отрицательным. В частности, в EuS этот параметр оказывается равным  $\xi = -0.5$  (см. таблицу 3.1). Поэтому здесь мы полагаем  $\xi$  параметром теории и изучаем, как его величина влияет на особенности поведения спиновых волн в ГЦК ферромагнетиках. Как было отмечено выше, увеличение  $\xi$  приводит к тому, что область, где проявляется анизотропия распространения волн, становится более высокочастотной и при этом более узкой. Потому интерес представляет ситуация, когда параметр  $\xi$  уменьшается и становится отрицательным. Приведем здесь для примера поверхности постоянной частоты для ГЦК ферромагнетиков с  $\xi = -0.3$  и  $\xi = -0.7$ . Сначала рассмотрим сечение этой поверхности плоскостью  $\{001\}$  (см. рисунок 3.4).

Видно, что в отличие от случая положительных  $\xi$ , здесь особенности в линиях постоянного уровня появляются уже и в плоскости  $\{001\}$ . При высоких частотах на линиях появляются практически плоские участки. На этих участках волновые векторы имеют разные направления, а групповые скорости практически параллельны. Эти направления на рисунке 3.4 обозначены стрелочками: штриховые стрелки – волновые векторы, сплошные – направления групповых скоростей. При  $\xi = -0.3$  эта плоская область не слишком явная, а при  $\xi = -0.7$  на поверхности



Рисунок 3.6 — Линии постоянной частоты в плоскости  $\{110\}$  при  $\xi = -0.3$  (а) и  $\xi = -0.7$  (б). Линии 1 соответствуют частоте  $0.8\omega_{max}$ , линии 2 –  $0.9\omega_{max}$ , и линии 3 –  $0.999\omega_{max}$ . Штриховыми стрелками обозначены волновые векторы, сплошными – направления групповых скоростей.

уровня четко видны выпуклые и вогнутые участки и точки нулевой кривизны. Естественно, в указанных направлениях коэффициент усиления будет достигать больших величин.

Коэффициенты усиления  $A(\varphi)$  (см. рисунок 3.5) содержат точки разрыва второго рода, что соответствует появлению каустики. Из рисунка 3.5 видно, что направления групповых скоростей при высоких частотах сильно отличаются от направления волновых векторов, поэтому кроме зависимости коэффициента усиления  $A(\varphi)$  в пространстве волновых чисел, необходимо иметь и зависимости  $A(\varphi_V)$  в пространстве групповых скоростей, для чего используются приведенные в Приложении Б формулы, которые связывают  $\varphi$  и  $\varphi_V$ . Результат представлен в виде штриховых линий на рис 3.5. Очевидно, что направления каустик в  $q$  и  $V$  пространствах различны. Более того, при больших  $|\xi|$  каустика может выходить за границу области  $0 < \varphi < \pi/2$ . Подобный вывод не является неожиданным, и подтверждается рисунком 3.4 с поверхностями уровня, на котором каустике соответствуют центральные стрелки.

Рассмотрим картину фокусировки в плоскости  $\{110\}$ . Изолинии, соответствующие частотам  $0.8\omega_{max}$ ,  $0.9\omega_{max}$ , и  $0.999\omega_{max}$  приведены на рисунке 3.6, а коэффициенты усиления на рисунке 3.7. При  $\xi = -0.3$  картина достаточно простая: для углов, меньших  $\arctg(\sqrt{2})$  (направления  $[111]$ ), линии постоянной частоты выпуклые, в окрестности направления  $[111]$  на линии наблюдается резкий поворот, что, очевидно, соответствует дефокусировке, и для углов, больших  $\arctg(\sqrt{2})$ , но близких к нему при больших частотах возникает перегиб, что соответствует нулевой гауссовой кривизне. При этом волны с разными волновыми векторами имеют одно направление групповой скорости, и, следовательно, наблюдается каустика. Заметим, что направление групповой скорости в области каустики сильно отличается от направления волновых чисел и в пространстве групповых скоростей уходит в область  $\theta_V > \pi/2$  (см. рисунок 3.7).

Ситуация с большими по модулю значениями  $\xi$  становится более сложной. При  $\xi = -0.7$  и при высоких частотах на линии постоянной частоты появляются три точки перегиба, две из которых находятся справа и слева от направления  $[111]$ , а третья – вблизи  $[001]$  (малые  $\theta$ ). Таким образом, в системе реализуются три каустики, причем ведут себя они в  $q$  и  $V$  пространствах со-

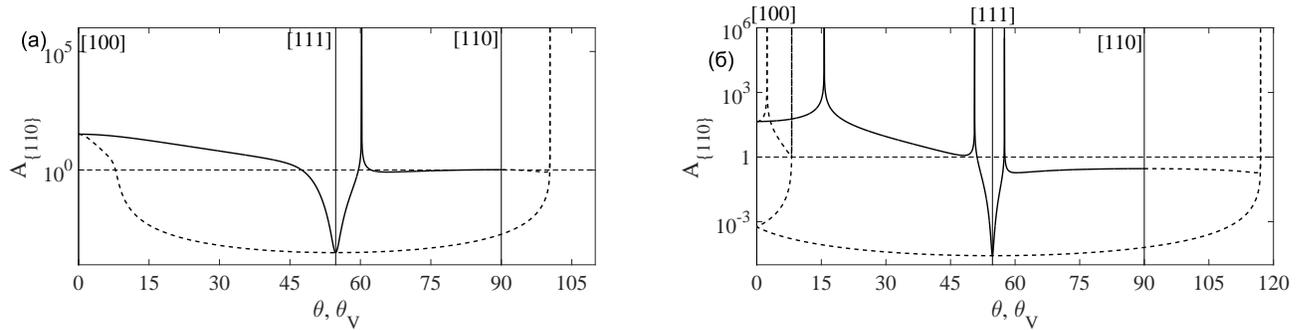


Рисунок 3.7 — Коэффициент усиления в зависимости от направления в плоскости  $\{110\}$  при  $\xi = -0.3$  (а) и  $\xi = -0.7$  (б) при частоте  $0.999\omega_{max}$ . Сплошные линии отражают зависимость  $A(\varphi)$  в пространстве волновых чисел, штриховые  $A(\varphi_V)$  – в пространстве групповых скоростей.

вершено по-разному. Это отражено на рисунке 3.6б, где, как и ранее, штриховые стрелочки – это волновые векторы, сплошные – направления групповых скоростей, центральная стрелочка в тройке соответствует каустике. Так, в пространстве волновых векторов есть каустика при малых углах  $\theta$ , и две близко расположенные каустики слева и справа от  $[111]$ . В пространстве групповых скоростей, очевидно, картина будет другой. Каустики, близкие в  $q$  пространстве, оказываются сильно разнесенными в  $V$ -пространстве: направление групповой скорости волн в каустике справа (на картинке) от  $[111]$  близко к  $[001]$  ( $\theta_V \sim 0$ ), а слева от  $[111]$  – близко к  $[110]$  ( $\theta_V \sim \pi/2$ ). Таким образом, в пространстве групповых скоростей тоже имеется одна отдельная каустика (вблизи  $\theta = \pi/2$ ) и две близко расположенные каустики (вблизи  $\theta = 0$ ), однако близко расположенным в  $q$ -пространстве каустикам соответствуют сильно разнесенные каустики в  $V$ -пространстве. Этим объясняются некоторые сложности в форме зависимостей  $A(\theta)$  и  $A(\theta_V)$ , приведенные на рисунке 3.7б.

Итак, мы выяснили, что при отрицательных  $\xi$  в ГЦК-ферромагнетиках могут реализовываться каустики. При малых значениях  $|\xi|$  в характеристической плоскости  $\{001\}$  возникает две симметричных относительно направления  $[110]$  каустики, а в плоскости  $\{110\}$  реализуется одна каустика. При больших значениях  $|\xi|$  в плоскости  $\{001\}$  по-прежнему две симметричных каустики, а в плоскости  $\{110\}$  появляются три различных направления каустики. Очевидно, что число каустик и их направления определяются частотой спиновых волн: при малых частотах каустик нет вообще, при больших – появляются, но разным частотам соответствуют разные направления. В связи с этим интерес представляет изучение зависимости направления каустики от частоты.

Результаты проведенного исследования представлены на рисунке 3.8 для  $\xi = -0.3$  и на рисунке 3.9 для  $\xi = -0.7$ . При  $\xi = -0.3$  зависимости направления каустики от частоты достаточно простые. В плоскости  $\{001\}$   $\varphi_c(\omega)$  – убывающая функция. При частоте  $\tilde{\omega} \approx 7.05$  каустика возникает при угле, близком к  $45^\circ$ , и при  $\omega = \omega_{max}$  ( $\omega_{max} \approx 8.4$  при  $\xi = -0.3$ ) поворачивается до  $\varphi_c \approx 22^\circ$ . В пространстве групповых скоростей угол каустики также является убывающей

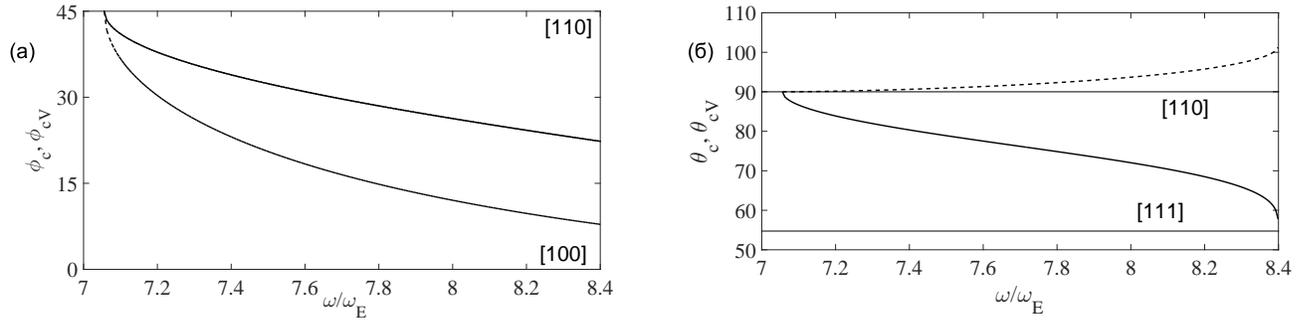


Рисунок 3.8 — Зависимости направления каустики от частоты в плоскости  $\{001\}$  (а) и плоскости  $\{110\}$  (б) при  $\xi = -0.3$ . Сплошные линии соответствуют  $q$ -пространству, штриховые –  $V$ -пространству.

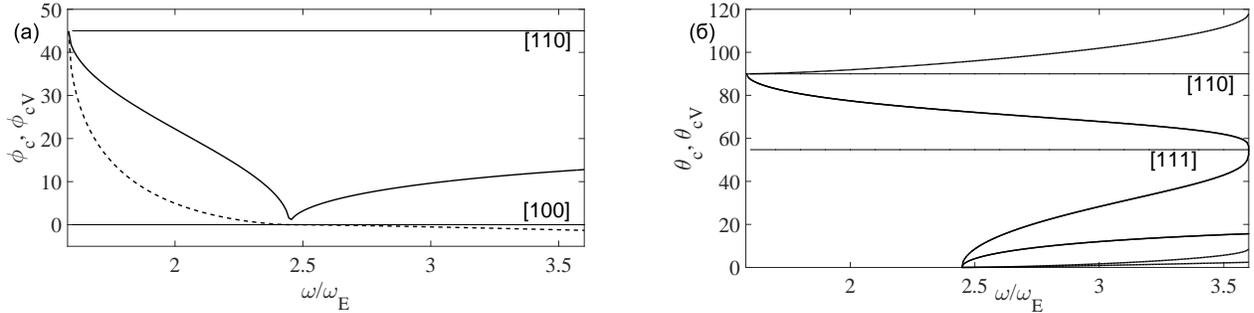


Рисунок 3.9 — Зависимости направления каустики от частоты в плоскости  $\{001\}$  (а) и плоскости  $\{110\}$  (б) при  $\xi = -0.7$ . Сплошные линии соответствуют  $q$ -пространству, штриховые –  $V$ -пространству.

функцией, но меняется в более широком диапазоне. Заметим, что в плоскости  $\{001\}$  имеется симметрия относительно  $\varphi = \pi/4$ . Следовательно, здесь будет также симметричная каустика в области от  $45^\circ$  до  $90^\circ$ . В плоскости  $\{110\}$  ситуация немного другая, но столь же проста: в  $q$ -пространстве  $\theta_c(\omega)$  – убывающая от  $\varphi_c(\omega) = 90^\circ$  при  $\tilde{\omega} \approx 7.05$  до  $\theta_c(\omega) \approx 56^\circ$  при  $\tilde{\omega} = \omega_{max}$ , в  $V$ -пространстве это медленно возрастающая функция вблизи  $90^\circ$ . Диапазон частот каустики оказывается достаточно узким:  $\tilde{\omega} \in (7.05; 8.4)$ , что составляет около 15% всего частотного диапазона.

При  $\xi = -0.7$  (см. рисунок 3.9) ситуация сложнее как в плоскости  $\{001\}$ , так и в  $\{110\}$ . В первой из них направление каустики убывает от  $45^\circ$  при  $\tilde{\omega} \approx 1.6$  до нуля при  $\tilde{\omega} \approx 2.45$ , а затем снова возрастает примерно до  $12^\circ$  при  $\tilde{\omega} = \omega_{max} \approx 3.6$ . В  $V$  пространстве  $\varphi_{cV}(\omega)$  монотонно убывает и начиная с некоторой частоты уходит в область  $\varphi < 0$ . В плоскости  $\{110\}$  в области частот (1.6; 2.45) имеется одна каустика, убывающая в  $q$ -пространстве и возрастающая в пространстве  $V$ , в области частот (2.45; 3.6) появляются еще две каустики. В большей части диапазона с тремя каустиками в  $q$ -пространстве их направления хорошо разделены, а в  $V$ -пространстве две каустики оказываются близкими друг к другу и к направлению  $[001]$ . Заметим, что диапазон частот каустики при  $\xi = -0.7$  оказывается весьма широким.

### 3.1.4 Каустика спиновых волн в ферромагнетиках с ОЦК и простой кубической решетками

В предыдущем параграфе было проведено исследование каустики спиновых волн в ферромагнетиках с гранецентрированной кубической решеткой, в которых существенный вклад в обменное взаимодействие дают вторые соседи. Типичными представителями таких ферромагнетиков являются редкоземельные ферромагнетики  $\text{EuO}$  и  $\text{EuS}$  [76]. В них обе обменные постоянные известны достаточно хорошо, а их отношение  $\xi = J_2/J_1 \approx 0.2$  положительно. В  $\text{EuS}$   $J_2 \approx -0.118$  К и  $\xi \approx -0.5$  [68, 69]. Было установлено, что в материалах с положительным  $\xi$  при высоких частотах могут наблюдаться некоторые эффекты фокусировки, а в материалах с отрицательным  $\xi$  может реализоваться каустика, направление которой определяется частотой волны, причем диапазон частот каустики увеличивается с увеличением  $|\xi|$ .

Поскольку в результате исследования ферромагнетиков с ГЦК решетками получены довольно интересные эффекты, то мы решили проанализировать поведение спиновых волн и в ферромагнетиках с объемно-центрированной и простой кубической решетками. Ферромагнетиков с ОЦК-решеткой в природе довольно много: примерами являются железо и железо-иттриевый гранат (последний, строго говоря, является ферритом, но может быть эффективно описан в рамках модели ОЦК-ферромагнетика). Правда, в этих веществах обычно не требуется учета вторых соседей, и вряд ли можно наблюдать каустику. Что касается ферромагнетиков с простой кубической решеткой, то таковые на настоящий момент неизвестны, что, впрочем, не означает, что они в какой то момент не будут синтезированы.

Исследование проведено по тому же сценарию, что и для ГЦК-ферромагнетиков. Выбраны различные значения  $\xi$ , построены законы дисперсии, выбраны частоты, при которых существенна анизотропия, построены поверхности уровня для этих частот, и найдены коэффициенты усиления. В результате установлено, что при положительных  $\xi$ , подобно ГЦК-ферромагнетикам, в материалах с ОЦК и простой кубической решетками можно ожидать фокусировку, но не каустику. Эти эффекты будут заметны лишь при высоких частотах. При отрицательных  $\xi$  оказывается возможна и каустика. Поскольку каустика представляет наибольший интерес, то приведем здесь зависимости направления каустики от частоты. Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим две кристаллографические плоскости  $\{001\}$  и  $\{110\}$ , и два значения  $\xi$ :  $\xi = -0.3$  и  $\xi = -0.7$  для ОЦК, и  $\xi = -0.15$  и  $\xi = -0.24$  для простой кубической. Выбор различных наборов  $\xi$  обусловлен ограничением, о котором упоминалось в начале этой главы:  $\xi > -1$  для решеток ГЦК и ОЦК,  $\xi > -0.25$  для простой кубической решетки.

В ферромагнетиках с ОЦК решеткой получилась достаточно простая зависимость направления каустики от частоты (см. рисунок 3.10). В плоскости  $\{001\}$  в области углов  $(0; 45^\circ)$  реализуется одна каустика. Зависимость ее направления от частоты – это убывающая от  $45^\circ$  до  $0^\circ$  функция как в  $q$ , так и в  $V$ -пространствах. В плоскости  $\{110\}$   $\theta_c(\omega)$  монотонно убывает от  $90^\circ$  (направление  $[110]$ ) почти до  $55^\circ$  (направление  $[111]$ ), тогда как в  $V$ -пространстве

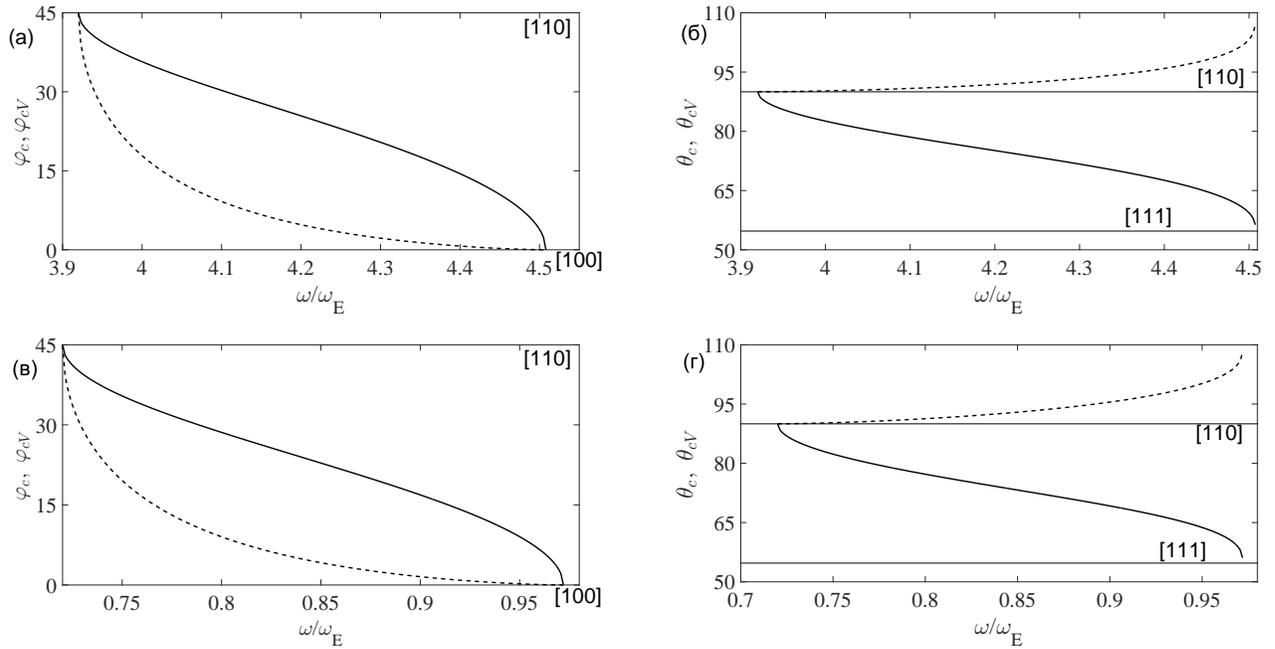


Рисунок 3.10 — Зависимости направления каустики от частоты для ОЦК-ферромагнетика в плоскости  $\{001\}$  (а,в) и плоскости  $\{110\}$  (б,г) при  $\xi = -0.3$  (а,б) и  $\xi = -0.7$  (в,г). Сплошные линии соответствуют  $q$ -пространству, штриховые –  $V$ -пространству.

направление каустики  $\theta_{cV}(\omega)$  – возрастающая функция частоты от  $90^\circ$  примерно до  $108^\circ$ . С увеличением  $\xi$  меняется лишь диапазон частот:  $\tilde{\omega}_{max} \approx 4.51$  для  $\xi = -0.3$  и  $\tilde{\omega}_{max} \approx 0.97$  для  $\xi = -0.7$ , но не характер зависимости  $\theta_c(\omega)$ . В этом смысле ситуация оказывается проще, чем для ГЦК-ферромагнетиков.

В случае ферромагнетика с простой кубической решеткой картина каустики получается достаточно сложной (см. рисунок 3.11). В плоскости  $\{001\}$  в  $q$ -пространстве функция  $\varphi_c(\omega)$  монотонно убывает от  $45^\circ$  до  $0^\circ$ . Однако, в отличие от случая с ОЦК-решеткой, в пространстве групповых скоростей направление каустики  $\varphi_{cV}(\omega)$  с частотой возрастает. Диапазон изменения углов  $\varphi_{cV}$  зависит от частоты: при  $\xi = -0.15$  максимальный угол  $\varphi_{cV}$  составляет примерно  $55^\circ$ , а при  $\xi = -0.15$  – примерно  $78^\circ$ . Кроме того, заметим, что при  $\xi = -0.24$  каустика наблюдается почти во всем частотном диапазоне. В плоскости  $\{110\}$  частотный диапазон каустик можно разделить на две части: в низкочастотном реализуется одна каустика, в высокочастотном к ней добавляются еще две. С увеличением  $|\xi|$  область с одной каустикой сужается, с тремя – расширяется. В отличие от ГЦК-решетки, здесь дополнительные две каустики появляются не при  $\theta_c = 0^\circ$ , а при угле, близком к  $30^\circ$ , и при повышении частоты быстро расходятся друг от друга, так что при  $\omega \rightarrow \omega_{max}$  в  $q$ -пространстве формируются три хорошо разделенные каустики. Как и в ГЦК-решетке, здесь направления групповых скоростей в двух дополнительных каустиках сильно отличаются от волновых чисел и поведение зависимостей  $\theta_{cV}(\omega)$  в них существенно меняется при изменении параметра  $\xi$ . По приведенным картинкам на рисунке 3.11 (б,г) можно лишь заметить, что в целом разница в направлениях каустик в  $V$ -пространстве оказывает

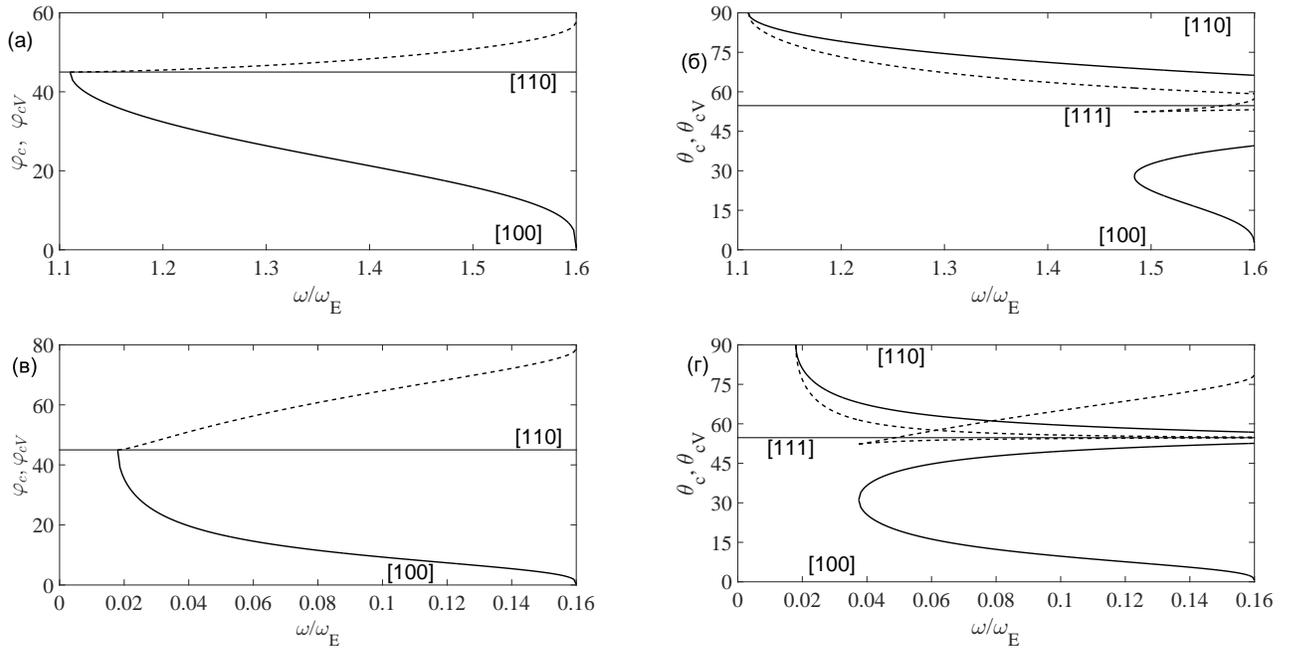


Рисунок 3.11 — Зависимости направления каустики от частоты для ферромагнетика с простой кубической решеткой в плоскости  $\{001\}$  (а,в) и плоскости  $\{110\}$  (б,г) при  $\xi = -0.15$  (а,б) и  $\xi = -0.24$  (в,г). Сплошные линии соответствуют  $q$ -пространству, штриховые –  $V$ -пространству.

ся меньше, чем в  $q$ -пространстве, а при  $\omega \rightarrow \omega_{max}$  в пространстве групповых скоростей два направления каустики оказываются близкими, а третье от них достаточно отдалено.

### 3.2 Спиновые волны в антиферромагнетиках

В разделе 3.1 рассматривались спиновые волны в ферромагнитных материалах. Это простейший тип магнитного упорядочения, и описывается он с помощью представления в виде одной магнитной решетки. В настоящем разделе рассматриваются антиферромагнетики. Описание их в рамках модели Гейзенберга предполагает наличие двух эквивалентных подрешеток, спины которых направлены в противоположные стороны. Класс веществ такого рода достаточно широк. Для примера можно отметить дифториды со структурой рутила ( $MnF_2$ ,  $FeF_2$ ,  $CoF_2$ ,  $NiF_2$ ) [77–80]. Подобные материалы считаются перспективными для спинтроники [81]. Магнитные атомы в них располагаются в узлах объемно-центрированной тетрагональной решетки (ОЦТ) и формируют две подрешетки (спин вверх/спин вниз) [82, 83]. Для этих кристаллов характерна анизотропия типа «легкая ось». ОЦТ структура характеризуется двумя периодами решетки:  $c$  – вдоль оси  $Oz$  и  $a$  – вдоль осей  $Ox, Oy$ . Элементарная ячейка ОЦТ решетки состоит из центрального атома, атомов вдоль вертикальной оси  $[001]$  на расстоянии  $c$  от центрального, и атомов в углах параллелепипеда второй координационной сферы (направления типа  $[111]$ ). В направлении  $[001]$  спины упорядочены сонаправленно, соседние спины в направлениях  $[111]$  направлены противоположно центральному. Поскольку ближайшие атомы направлены про-

твояположно, то постоянная обменного взаимодействия  $J_1$  между ними будет отрицательна. Напомним, что в предыдущем разделе было  $J_1 > 0$ , а постоянная  $J_2$  полагалась параметром теории и могла быть как положительной, так и отрицательной. Сейчас задача ставится аналогичным образом, но, во-первых, вместо кубической мы исследуем ОЦТ решетку, и во-вторых, сейчас  $J_1$  полагается отрицательным, а  $J_2$  по прежнему считается параметром теории.

В разделе 3.1 сначала исследовались «базовые» ферромагнетики  $\text{EuO}$ ,  $\text{EuS}$  с ГЦК решеткой, а потом исследовали особенности спиновых волн во всевозможных ферромагнетиках с простой кубической, ГЦК и ОЦК решетками. Здесь мы поступим аналогичным образом. Сначала исследуем характеристики спиновых волн в «базовом» антиферромагнетике  $\text{MnF}_2$ , структура которого достаточно хорошо изучена, а потом исследуем различные теоретически возможные антиферромагнетики с ОЦТ структурой. Структура  $\text{MnF}_2$  детально изучена основными экспериментальными методами: рассеянием нейтронов [84], антиферромагнитным резонансом [85] и комбинационным рассеянием света [86]. Элементарная ячейка  $\text{MnF}_2$  устроена следующим образом. Магнитные ионы  $\text{Mn}^{2+}$  занимают позиции с координатами  $(0; 0; 0)$  и  $(0.5; 0.5; 0.5)$ . Ионы  $\text{F}^-$  располагаются в нецентросимметричных положениях между ионами  $\text{Mn}^{2+}$  в точках  $(u; u; 0)$ ,  $(-u; -u; 0)$ ,  $(0.5 + u; 0.5 - u; 0.5)$  и  $(0.5 - u; 0.5 + u; 0.5)$  с  $u \approx 0.31$ . Обменные постоянные  $\text{MnF}_2$  определены достаточно точно:  $|J_1| = 0.152 \text{ МэВ}$ ,  $J_2 = 0.028 \text{ МэВ}$  [84].

### 3.2.1 Спектр магнонов в ОЦТ-антиферромагнетике

В материалах с ОЦТ-решеткой важную роль играет одноосная анизотропия. Поэтому простейший гамильтониан должен включать в себя обменное взаимодействие и магнитную анизотропию [84, 87, 88]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = J_1 \sum_{j, \delta_1} \left( \mathbf{s}_j^{(1)} \mathbf{s}_{j+\delta_1}^{(2)} + \mathbf{s}_j^{(2)} \mathbf{s}_{j+\delta_1}^{(1)} \right) - J_2 \sum_{j, \delta_2} \left( \mathbf{s}_j^{(1)} \mathbf{s}_{j+\delta_2}^{(1)} + \mathbf{s}_j^{(2)} \mathbf{s}_{j+\delta_2}^{(2)} \right) - \\ - J_3 \sum_{j, \delta_3} \left( \mathbf{s}_j^{(1)} \mathbf{s}_{j+\delta_3}^{(1)} + \mathbf{s}_j^{(2)} \mathbf{s}_{j+\delta_3}^{(2)} \right) - D \sum_j (S_{jz}^{(1)})^2 - D \sum_j (S_{jz}^{(2)})^2, \quad (3.10) \end{aligned}$$

где  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  — обменные постоянные взаимодействия между ближайшими спинами  $\text{Mn}^{2+}$  в направлениях  $[111]$ ,  $[001]$  и  $[100]$  соответственно. Для краткости эти взаимодействия будут называться взаимодействиями с первыми, вторыми и третьими соседями. Верхний индекс (1) относится к первой подрешетке (спин вверх), индекс (2) ко второй подрешетке (спин вниз). Суммирование по  $j$  включает все  $N$  атомов подрешетки, индексы  $\delta_1, \delta_2$  и  $\delta_3$  нумеруют первые, вторые и третьи соседи выбранного атома  $j$ , соответственно. В первом слагаемом в гамильтониане учтено то, что постоянная взаимодействия с ближайшими соседями в антиферромагнетике отрицательна, поэтому оно записано со знаком „+“, далее полагается  $J_1 > 0$ . Два последних слагаемых описывают энергию анизотропии ( $H_A = SD/\mu_0$  — поле анизотропии, а  $\mu_0$  — магнетон Бора). Гамильтониан (3.10) в линейном приближении приводится к диагональной форме

по спиновым бозе-операторам, для чего используется стандартная процедура [87]. В результате получается закон дисперсии

$$\tilde{\omega}^2 = \left\{ 1 + \frac{\xi}{2} \sin^2 \left( \frac{cq_z}{2a} \right) + \frac{\eta}{2} \left[ \sin^2 \left( \frac{q_x}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{q_y}{2} \right) \right] + \varepsilon_A \right\}^2 - \left\{ \cos \left( \frac{q_x}{2} \right) \cos \left( \frac{q_y}{2} \right) \cos \left( \frac{cq_z}{2a} \right) \right\}^2. \quad (3.11)$$

Здесь  $\tilde{\omega} = (\omega/\omega_{exch})^2 = \omega/(16SJ_1/\hbar)$ ,  $\varepsilon_A = \mu_0 H_A/8J_1 S$ . Для кристалла  $MnF_2$ , согласно работе [84], постоянная анизотропии равна  $H_A = SD/\mu_0$ , спин  $S$  равен  $5/2$ , и, следовательно,  $\varepsilon_A = 0.017$ . Закон дисперсии (3.11) симметричен относительно перестановки величин  $q_x$  и  $q_y$ , ось  $Oz$  является выделенным направлением;  $\mathbf{q}$  – волновой вектор магнонов,  $q_i$  – его проекция на декартовы оси (ось  $Oz$  направлена вдоль оси  $c$ , оси  $Ox$ ,  $Oy$  направлены вдоль ребер). Параметр  $\eta$  в Формуле (3.11) можно легко оценить. Значения обменных интегралов определяются перекрывающимися волновыми функциями электронов соседних атомов. Так как волновые функции (достаточно далеко от центра) уменьшаются экспоненциально, то отношение  $\eta/\xi \approx \exp(-(a-c)/a_0) \approx 0.05$  ( $a_0$  – борковский радиус). Поэтому мы можем пренебречь вкладом третьих соседей и предположить  $\eta = 0$ . Авторы работ [84, 88] пользовались тем же приближением. При ОЦТ-симметрии характеристическими плоскостями будут  $\{100\}$ ,  $\{101\}$ ,  $\{110\}$  и  $\{001\}$ , характерными направлениями –  $[100]$ ,  $[001]$ ,  $[110]$ ,  $[101]$ ,  $[111]$ .

Закон дисперсии (3.11) в длинноволновом приближении ( $q \ll 1$ ) имеет вид

$$\tilde{\omega}(\mathbf{q}) = \varepsilon_A^2 + 2\varepsilon_A + \frac{q^2}{4} (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + (1 + \varepsilon_A) \xi c^2 \cos^2 \theta) \quad (3.12)$$

где  $\theta$  – угол между осью  $Oz$  и вектором  $\mathbf{q}$ . Заметим, что если  $\xi > -1/(1 + \varepsilon_A)$ , то  $\omega(q)$  является возрастающей функцией, в то время как для  $\xi < -1/(1 + \varepsilon_A)$  она имеет локальный минимум. Следует также отметить, что даже в длинноволновом приближении частота спиновых волн (3.12) зависит от направления волнового вектора, в отличие от спектра кубических решеток. Такая особенность проявляется в ОЦТ системах, поскольку  $a \neq c$ .

### 3.2.2 Коэффициент усиления и каустика

В этом разделе изучается фокусировка спиновых волн в антиферромагнетиках с ОЦТ решеткой. Для этого используется математический аппарат, развитый в разделе 3.1: исследуются поверхности постоянной частоты, при этом внимание уделяется особенностям этих поверхностей, в частности, точкам с нулевой гауссовой кривизной, поскольку вблизи таких направлений наиболее ярко проявляется эффекты фокусировки спиновых волн. В спектре антиферромагнетика (3.11) уравнение  $\omega(\mathbf{q}) = const$  имеет решения для любого направления  $(\theta, \varphi)$  только в том случае, если частота  $\omega$  меньше некоторого значения  $\omega_{max}$ , зависящего от параметра  $\xi$  (взаи-

модействием с третьими соседями, как это было отмечено ранее, мы пренебрегаем и полагаем  $\eta = 0$ ). Напомним, что аналогичная ситуация была и для спектра ферромагнетиков. Подобно предыдущему разделу, мы будем рассматривать лишь тот диапазон частот спиновых волн, в котором магноны существуют для любого направления волнового вектора  $\mathbf{q}$ . Как и в задаче для ферромагнетика, сначала мы изучим закон дисперсии для базового антиферромагнетика  $\text{MnF}_2$ , параметры обменного взаимодействия и параметры  $a, c$  кристаллической решетки которого известны:  $J_1 = 0.152 \text{ МэВ}$ ,  $J_2 = 0.028 \text{ МэВ}$  [84] ( $\xi \approx 0.2$ ). Для этих параметров  $\tilde{\omega}_{max} = 1.0$ . Далее мы будем полагать  $\xi$  параметром теории и посмотрим, к каким эффектам может привести изменение параметра взаимодействия со вторыми соседями в ОЦТ-антиферромагнетиках.

Как и для ферромагнетиков, мы рассмотрим поведение волнового вектора  $\mathbf{q}$  в характеристических плоскостях ( $\{100\}$ ,  $\{001\}$ ,  $\{110\}$ , и  $\{101\}$ ) и построим в этих плоскостях линии постоянной энергии. При определении плоскостей имеется тонкость, связанная с тем, что решетка тетрагональная и параметры  $a$  и  $c$  отличаются друг от друга. Плоскости  $\{100\}$ ,  $\{001\}$  и  $\{110\}$  задаются так же, как в кубической решетке:  $\varphi = 0$  для  $\{100\}$ ,  $\theta = \pi/2$  для  $\{001\}$  и  $\varphi = \pi/4$  для  $\{110\}$ . В плоскости  $\{101\}$  необходимо произвести преобразование системы координат и использовать новую переменную  $\varphi'$ , представляющую собой угол в плоскости  $\{101\}$ , откладываемый от направления  $[101]$ . Углы  $(\theta, \varphi)$  базовой системы координат выражаются через угол  $\varphi'$  следующим образом:

$$\theta = \arccos(\sin \Phi \cos \varphi'), \quad \varphi = \arctg(\tg \varphi' / \cos \Phi),$$

где угол  $\Phi = \arctg(a/c)$  характеризует отличие ОЦТ решетки от кубической.

Линии постоянной частоты и коэффициенты усиления для  $\text{MnF}_2$  приведены на рисунке 3.12. Видно, что трансформация анизотропных свойств здесь происходит по более сложному сценарию, чем в кристаллах с кубической решеткой. Так, в плоскостях  $\{100\}$  и  $\{110\}$  спектр анизотропен даже при низких частотах, что находится в согласии с формулой (3.12). При повышении частоты в этих плоскостях анизотропия уменьшается. Коэффициент усиления в этих плоскостях является плавно меняющейся функцией угла и остается в достаточно узком диапазоне:  $0.2 < A < 4.6$  для плоскости  $\{100\}$  и  $0.3 < A < 1.6$  для плоскости  $\{110\}$ . Для плоскостей  $\{001\}$  и  $\{101\}$  картина фокусировки более похожа на случай кубических ферромагнетиков: при низких частотах спектр изотропен, при возрастании частоты проявляются анизотропные свойства. Анизотропия в плоскости  $\{001\}$  симметрична относительно  $\varphi = \pi/4$ , в плоскости  $\{101\}$  такой симметрии нет, что связано с различием в параметрах решетки  $a \neq c$ . Участки с меньшей кривизной, а следовательно, и с большим коэффициентом усиления, возникают вблизи симметричных направлений  $[100]$ , а наименьший коэффициент усиления будет наблюдаться в направлении  $[110]$ . Диапазон изменения коэффициентов усиления в плоскостях  $\{001\}$  и  $\{101\}$ , так же как и в плоскостях  $\{100\}$  и  $\{110\}$  достаточно узкий:  $0.2 < A < 4.6$ . Поскольку для  $\text{MnF}_2$  кривизна поверхностей постоянной частоты меняется в достаточно узких пределах, то различие в направлениях групповых скоростей и волновых чисел также невелико. Поэтому кривые зави-

симости коэффициента усиления  $A(\theta)$  и  $A(\varphi)$  в пространстве волновых векторов оказываются близкими к соответствующим кривым  $A(\theta_V)$  и  $A(\varphi_V)$  в пространстве групповых скоростей (см. рисунки 3.12, 3.13). На этом мы заканчиваем исследование  $\text{MnF}_2$ , и далее изучаем законы дисперсии в ОЦТ-антиферромагнетиках при произвольных  $\xi$ .

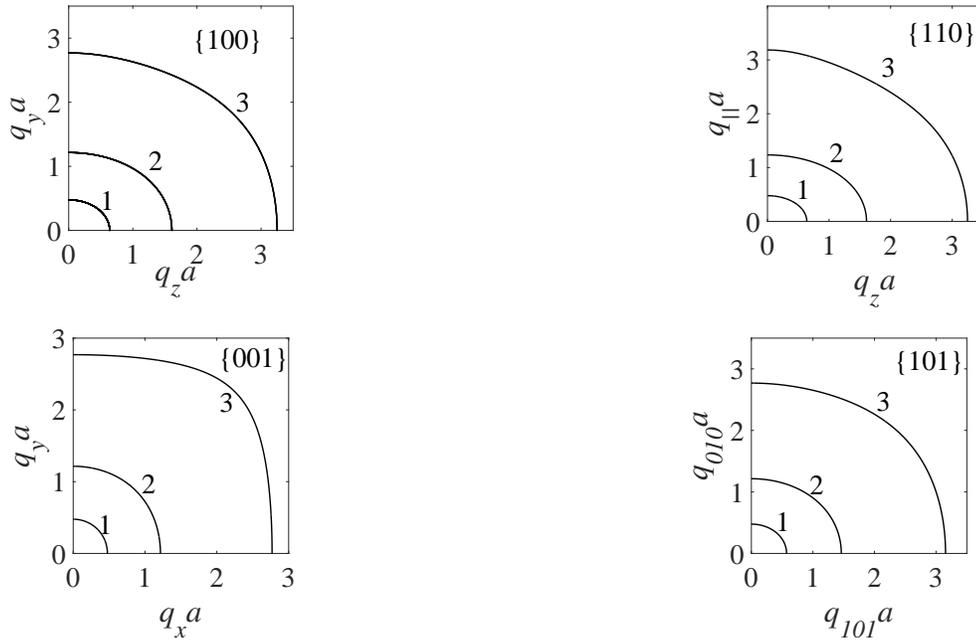


Рисунок 3.12 — Исоповерхности в ОЦТ-антиферромагнетике при  $\xi = 0.2$  в сечениях  $\{100\}$ ,  $\{001\}$ ,  $\{110\}$  и  $\{101\}$  для частот  $\tilde{\omega} = 0.3$ ,  $\tilde{\omega} = 0.6$  и  $\tilde{\omega} = 1$ .

Для начала рассмотрим как будет изменяться значение коэффициента усиления в характеристических направлениях при изменении параметра  $\xi$  при частотах, близких к  $\tilde{\omega}_{max}$ . Результаты сведены в таблице 3.2. Анализ данных таблицы удобно провести, отталкиваясь от значений

Таблица 3.2 — Коэффициенты усиления в ОЦТ решетке

$\xi$	-0.8	-0.5	-0.2	0	0.2	0.8
$\tilde{\omega}_{max}$	0.61	0.76	0.91	0.99	1	0.9
$A_{[100]}$	12.6	33.1	510.3	21.2	4.6	1.40
$A_{[001]}$	1.48	2.20	4.27	2.08	1	1.16
$A_{[110]}$	8.87	16.9	126.6	1.46	0.2	0.37
$A_{[101]}$	22.9	2.33	0.6	0.46	0.82	1.22
$A_{[111]}$	5.34	14.0	1.09	0.28	0.82	1.1

$A$  для  $\text{MnF}_2$  ( $\xi = 0.2$ ). Для него максимальная фокусировка будет вдоль направления  $[100]$  ( $A = 4.6$ ), максимальная дефокусировка – вдоль  $[110]$  ( $A = 0.2$ ). В остальных направлениях коэффициенты усиления принимают промежуточное значение и близки к единице. При увеличении  $\xi$   $[100]$  по прежнему остается направлением фокусировки, а  $[110]$  – дефокусировки,

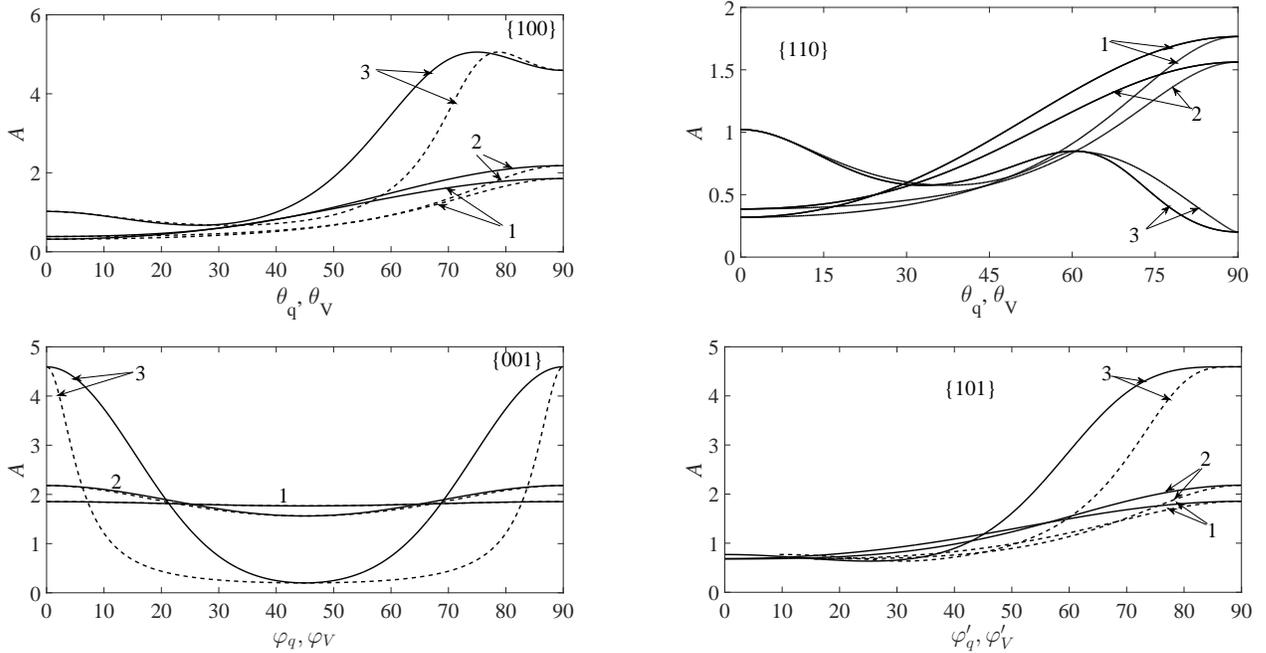


Рисунок 3.13 — Зависимости коэффициента усиления в ОЦТ-антиферромагнетике при  $\xi = 0.2$  в сечениях  $\{100\}$ ,  $\{001\}$ ,  $\{110\}$  и  $\{101\}$  для частот  $\tilde{\omega} = 0.3$ ,  $\tilde{\omega} = 0.6$  и  $\tilde{\omega} = 1$ . Сплошные линии – коэффициент усиления в пространстве волновых чисел, штриховые – в пространстве групповых скоростей.

однако эти эффекты оказываются намного более сглаженными:  $A_{[100]} = 1.4$ ,  $A_{[110]} = 0.37$ . В направлениях  $[101]$  и  $[111]$  дефокусировка сменяется на фокусировку, однако коэффициент усиления остается близким к 1. В целом при  $\xi = 0.8$  мы наблюдаем намного более изотропную картину. Если пренебречь влиянием вторых соседей ( $\xi = 0$ ), то анизотропия становится существенно больше. Это обусловлено тем, что в рассматриваемой ОЦТ-решетке сильно различаются параметры:  $a = 4.8734 \text{ \AA}$ ,  $c = 3.3103 \text{ \AA}$ . Самая сильная фокусировка по-прежнему будет в направлении  $[100]$ , в направлении  $[110]$  дефокусировка сменится на фокусировку, а в направлениях  $[101]$ ,  $[111]$  дефокусировка будет проявляться более ярко.

При отрицательных значениях  $\xi$  данные таблицы, очевидно, плохо поддаются объяснению. Коэффициент усиления может достигать огромных значений, например,  $A_{[100]} \approx 510$  при  $\xi = -0.2$ . Далее, в направлениях  $[100]$ ,  $[001]$ ,  $[110]$  коэффициент усиления уменьшается при возрастании  $|\xi|$  от 0.2 до 0.8, для направления  $[101]$  он при этом возрастает, а для  $[111]$  вообще оказывается функцией с максимумом. При  $\xi = -0.2$  четыре из пяти выбранных направлений соответствуют фокусировке, а при  $\xi = -0.5$ ,  $\xi = -0.8$  фокусировка будет вообще вдоль всех пяти характерных направлений.

Для объяснения столь больших различий в коэффициентах усиления и столь сложном его поведении, необходимо детально исследовать угловые зависимости поверхностей постоянной частоты и коэффициентов усиления для положительных и отрицательных  $\xi$ . Сначала посмотрим, как на поведении системы скажется значительное увеличение параметра  $\xi$  по величине, а

затем рассмотрим ситуацию, когда может меняться и его знак. Роль увеличения  $\xi$  описывается предельно просто: с увеличением  $\xi$  спектр становится более изотропным. Это отражено на рисунке 3.14, построенном для  $\xi = 0.8$  (при этом  $\tilde{\omega}_{max} = 0.9$ ). Здесь, по сравнению с  $\text{MnF}_2$ , линии постоянного уровня становятся более похожими на окружности для всех частот и во всех характеристических плоскостях. Различия в направлениях  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{V}_g$  становятся еще менее выраженными. Коэффициент усиления, изображенный на рисунке 3.15, меняется еще в более узком диапазоне, а различие в кривых  $A(\theta)$  и  $A(\theta_V)$  становится еще менее заметным.

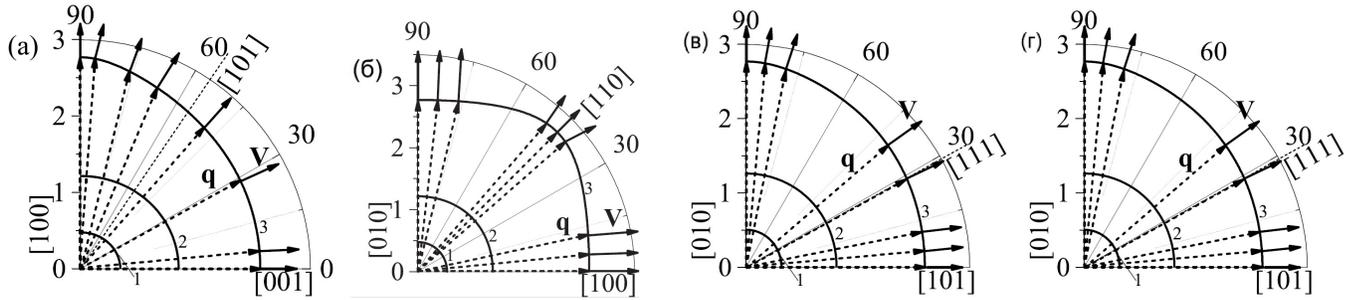


Рисунок 3.14 — Сечения поверхностей постоянной энергии ( $\tilde{\omega}(\mathbf{q}) = \text{const}$ ) в антиферромагнетике с  $\xi = 0.8$  в плоскостях  $\{100\}$  (а),  $\{001\}$  (б),  $\{110\}$  (в) и  $\{101\}$  (г) для нормированной частоты  $\tilde{\omega} = 0.3$  (1),  $\tilde{\omega} = 0.6$  (2) and  $\tilde{\omega} = 0.9$  (3). Стрелками показаны волновые вектора ( $\mathbf{q}$ ) и групповые скорости ( $\mathbf{V}_g$ ) магновнов.

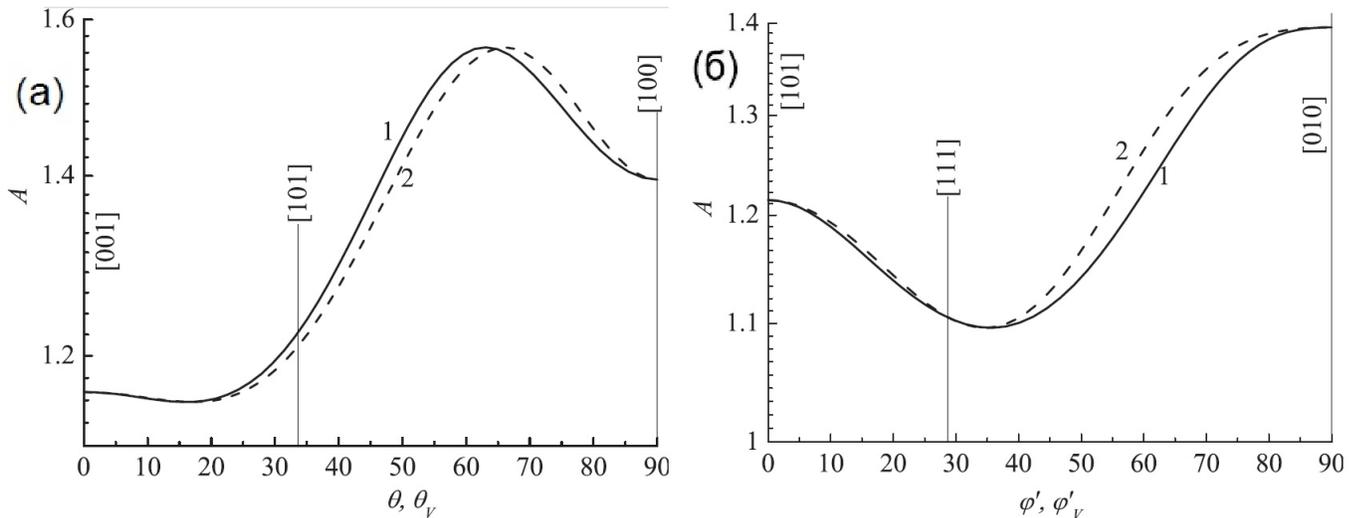


Рисунок 3.15 — Угловые зависимости коэффициента усиления  $A(\theta)$ ,  $A(\theta_V)$  в плоскости  $\{100\}$  (а) и  $A(\varphi')$ ,  $A(\varphi'_V)$  в плоскости  $\{101\}$  (б) при  $\xi = 0.8$  и  $\tilde{\omega} = 0.9$ . Кривые 1 представляют зависимости  $A(\theta_V)$  и  $A(\varphi'_V)$  ( $V$ -пространство), кривые 2 показывают зависимости  $A(\theta)$  и  $A(\varphi')$  ( $q$ -пространство).

Сейчас переходим к случаю отрицательных  $\xi$ . Заметим, что  $\xi < 0$  означает, что в нашей задаче оба обменных параметра  $J_1$ ,  $J_2$  оказываются соответствующими антиферромагнитному упорядочению: спины и первых и вторых ближайших к атому соседей стремятся упорядочиться

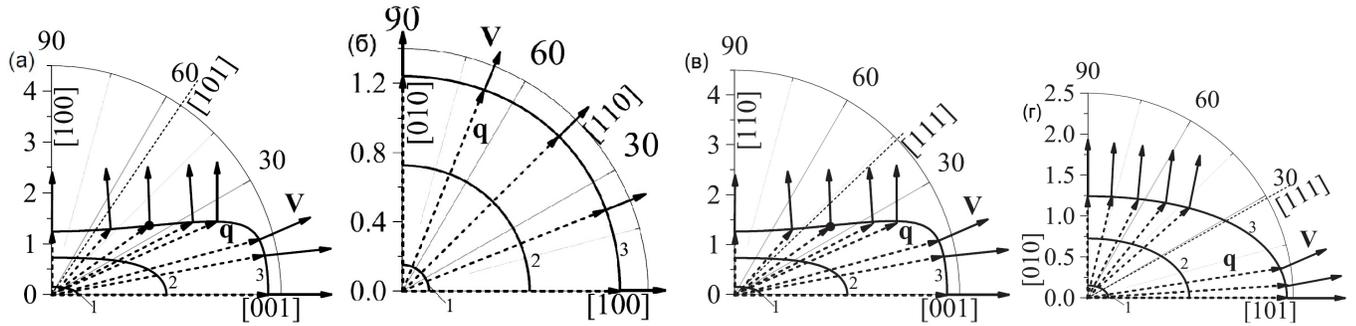


Рисунок 3.16 — Линии постоянной частоты  $\tilde{\omega}(\mathbf{q}) = \text{const}$  при  $\xi = -0.8$  в плоскостях  $\{100\}$  (а),  $\{001\}$  (б),  $\{110\}$  (в) и  $\{101\}$  (г) для частот  $\tilde{\omega} = 0.2$  (1),  $\tilde{\omega} = 0.4$  (2) и  $\tilde{\omega} = 0.61$  (3). Стрелками показаны волновые вектора ( $\mathbf{q}$ ) и групповые скорости ( $\mathbf{V}_g$ ) магнонов.

с ним в противоположных направлениях. В результате этого в системе появляется неустойчивость: ближайший атом стремится развернуть спин в одном направлении, а следующий за ближайшим – в противоположном. Эта неустойчивость приводит к появлению интересных особенностей в законах дисперсии спиновых волн. В качестве примера рассмотрим случай больших по модулю отрицательных  $\xi$ . На рисунке 3.16 показаны поверхности постоянной частоты для  $\xi = -0.8$  ( $\tilde{\omega}_{max} = 0.61$ ). Видно, что картина фокусировки изменилась принципиально. Рассмотрим сначала плоскости  $\{100\}$  и  $\{110\}$ . Как и для  $\text{MnF}_2$ , линии постоянной частоты в этих плоскостях анизотропны уже при малых частотах, однако сейчас с возрастанием частоты анизотропия не уменьшается, а становится выраженной более ярко. При частотах, близких к  $\tilde{\omega}_{max}$  линии  $\omega = \text{const}$  содержат как выпуклые, так и вогнутые участки, между которыми появляются точки нулевой кривизны (жирные точки на рисунке 3.16). Заметим, что направление групповых скоростей в этих точках существенно отличается от направлений  $\mathbf{q}$ , однако угол между  $\mathbf{V}_g$  и  $\mathbf{q}$  также сильно отличен от  $\pi/2$ . Таким образом, при этих углах следует ожидать каустику магнонов. Картина фокусировки в плоскости  $\{001\}$  тоже стала другой: при отрицательных  $\xi$  волны в этой плоскости распространяются практически изотропно. Что касается плоскости  $\{101\}$ , то в этой плоскости также при высоких частотах будут выполняться условия каустики. Важно, что в отличие от плоскостей  $\{100\}$ ,  $\{110\}$ , в этом случае угол между волновым вектором и групповой скоростью в направлении каустики оказывается малым, еще одна примечательная особенность состоит в том, что в сечении  $\{101\}$  на изоповерхности не видны вогнутые участки, но они есть в тех сечениях, которые перпендикулярны  $\{101\}$ .

Каустика наблюдается в плоскостях  $\{100\}$ ,  $\{110\}$  и  $\{101\}$ , но для плоскостей  $\{100\}$  и  $\{110\}$  линии уровня оказались одинаковыми. Следовательно, все особенности, наблюдаемые в плоскости  $\{100\}$ , будут проявляться и в плоскости  $\{110\}$ . Поэтому для получения полной картины фокусировки достаточно исследовать поведение коэффициента усиления в плоскостях  $\{100\}$ , и  $\{101\}$ . Все результаты, полученные для  $\{100\}$  будут справедливы и для  $\{110\}$  (важно лишь помнить, что угол  $\pi/2$  соответствует направлению  $[100]$  в первом случае, и направлению  $[110]$  во втором). Результат приведен на рисунке 3.17. Сплошные линии на этом рисунке – это зависимо-

сти  $A(\theta_V)$ ,  $A(\varphi'_V)$  в прямом пространстве, штриховые – зависимости  $A(\theta)$ ,  $A(\varphi')$  в пространстве волновых чисел. При  $\theta_c \approx 35.5^\circ$  коэффициент усиления обращается в бесконечность, что соответствует каустике магнонов. В прямом пространстве этот угол соответствует  $\theta_{cV} \approx 95.1^\circ$ , что полностью соответствует картине линий постоянной частоты (см. рисунок 3.16). Для плоскости  $\{101\}$  угол каустики оказался равным  $\varphi'_c \approx 9.2^\circ$  в  $q$ -пространстве, что соответствует  $\varphi'_{cV} \approx 8.0^\circ$ . Заметим, что направления групповых скоростей и волновых векторов в плоскости  $\{101\}$  оказываются достаточно близкими, тогда как в плоскости  $\{100\}$  они близки лишь в окрестности направлений  $[100]$  и  $[001]$ , и существенно различны в остальных случаях.

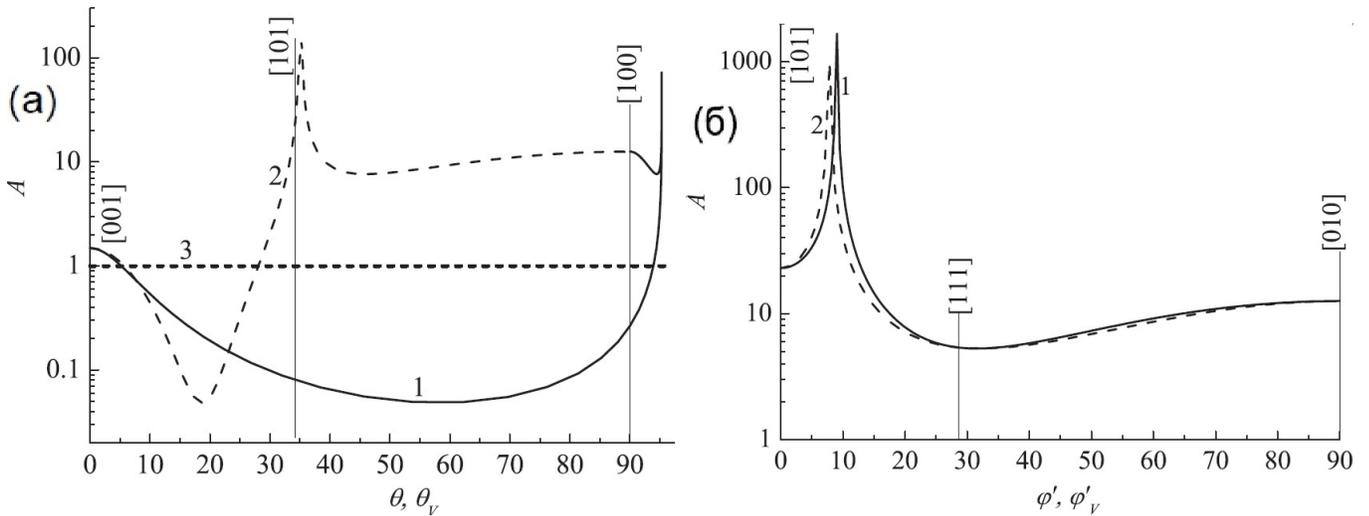


Рисунок 3.17 — Угловые зависимости коэффициента усиления  $A(\theta)$ ,  $A(\theta_V)$  в плоскости  $\{100\}$  (а) и  $A(\varphi')$ ,  $A(\varphi'_V)$  в плоскости  $\{101\}$  (б) при  $\xi = -0.8$  и  $\tilde{\omega} = 0.61$ . Кривые 1 представляют зависимости  $A(\theta_V)$  и  $A(\varphi'_V)$  ( $V$ -пространство), кривые 2 показывают зависимости  $A(\theta)$  и  $A(\varphi')$  ( $q$ -пространство), кривая 3 изображает изотропный случай ( $A = 1$ ).

Итак, мы установили, что в плоскостях  $\{100\}$  и  $\{101\}$  может наблюдаться каустика при достаточно высоких частотах (вблизи  $\tilde{\omega}_{max}$ ). Исследуем теперь зависимости направления каустики от частоты. Технически, эта задача сводится к решению уравнения  $K(\theta) = 0$  (для плоскости  $\{100\}$ ) и уравнения  $K(\varphi') = 0$  (для плоскости  $\{101\}$ ). Для каждого выбранного значения  $\xi$  определяется диапазон частот  $\omega_{min} < \tilde{\omega} < \omega_{max}$ , где эти уравнения имеют решения, и для каждой выбранной из этого диапазона частоты решается уравнение. Численный анализ показал, что каустика (при заданных  $a, c$ ) возможна лишь при  $\xi \leq -0.2$ , а частотный диапазон каустики сильно зависит от  $\xi$ . Результаты представлены на рисунке 3.18 для плоскости  $\{100\}$  и на рисунке 3.19 для плоскости  $\{101\}$ . Как можно заметить, область каустики очень узка для малых по модулю  $\xi$ . В частности, при  $\xi = -0.2$  необходимые для каустики частоты лежат в интервале  $0.912 < \tilde{\omega} < 0.917$ , что составляет лишь около 0.5% всего частотного диапазона, причем верхняя граница этого интервала равна  $\tilde{\omega}_{max}$ . Функция  $\theta_c(\tilde{\omega})$  – угол каустики в зависимости от частоты, уменьшается от  $\theta_c \approx 90^\circ$  до  $\theta_c \approx 35^\circ$  с возрастанием частоты  $\tilde{\omega}$  внутри указанного интервала. Отметим, что соответствующий угол каустики  $\theta_{cV}(\tilde{\omega})$  в  $V$ -пространстве при этом

является медленно возрастающей функцией  $\tilde{\omega}$ , причем изменение этой функции мало и сконцентрировано в окрестности направления  $[100]$ . В частности, левая граница области каустика в прямом пространстве составляет угол  $\theta_{cV}(\omega_{min}) \approx 90^\circ$ , а правая – лишь  $\theta_{cV}(\omega_{max}) \approx 90.5^\circ$ .

С увеличением  $|\xi|$  увеличивается и частотный интервал каустика. Так, если  $\xi = -0.5$ , то каустики возможны при частотах  $0.725 < \tilde{\omega} < 0.77$ , что составляет примерно 6% всей области частот ( $0; \tilde{\omega}_{max}$ ), а при  $\xi = -0.8$  диапазон частот каустики уже равен  $0.47 < \tilde{\omega} < 0.615$  (около 24% всех частот). Угол каустики в  $q$ -пространстве остается убывающей функцией частоты  $\tilde{\omega}$  и изменяется в той же области  $35^\circ \lesssim \theta_c \lesssim 90^\circ$ . Угол каустики в  $V$ -пространстве также остается возрастающей функцией, причем по прежнему  $\theta_{cV}(\omega_{min}) \approx 90^\circ$ , но область углов каустики становится шире с увеличением  $|\xi|$ . Максимальное значение  $\theta_{cV}$  для  $\xi = -0.5$  составляет  $92.5^\circ$ , а для  $\xi = -0.8$  – примерно  $96^\circ$ .

В виду того, что линии постоянной частоты (соответственно и коэффициенты усиления) в плоскостях  $\{100\}$  и  $\{110\}$  ведут себя одинаково, можно заключить, что каустики будут наблюдаться и в плоскости  $\{110\}$  в том же интервале частот и углов. В частности, при достаточно больших по модулю  $\xi$  угол  $\theta_{cV}$ , определяющий направление каустики в пространстве групповых скоростей будет около  $90^\circ$ , то есть вблизи направления  $[110]$ .

Для завершения описания явления каустики необходимо рассмотреть также плоскость  $\{101\}$ . В этой плоскости условия каустики реализуются при тех же значениях  $\xi$  и в тех же частотных диапазонах, что и для плоскостей  $\{100\}$  и  $\{110\}$ , однако в поведении каустики появляются некоторые отличия. Во-первых, диапазон углов каустики зависит от величины  $\xi$ : при  $\xi = -0.2$  он составляет  $30^\circ \lesssim \varphi' \lesssim 90^\circ$ , а при  $\xi \leq -0.5$  составляет  $0^\circ \lesssim \varphi' \lesssim 90^\circ$ . Во-вторых, углы каустики  $\varphi'_c$  и  $\varphi'_{cV}$  в  $q$ - и  $V$ -пространствах меняются в одних и тех же пределах. Обе функции  $\varphi'_c(\tilde{\omega})$  и  $\varphi'_{cV}(\tilde{\omega})$  являются монотонно возрастающими и отличаются лишь в деталях. В-третьих, разница в направлениях каустики в  $q$ - и  $V$ -пространствах с увеличением  $|\xi|$  становится меньше.

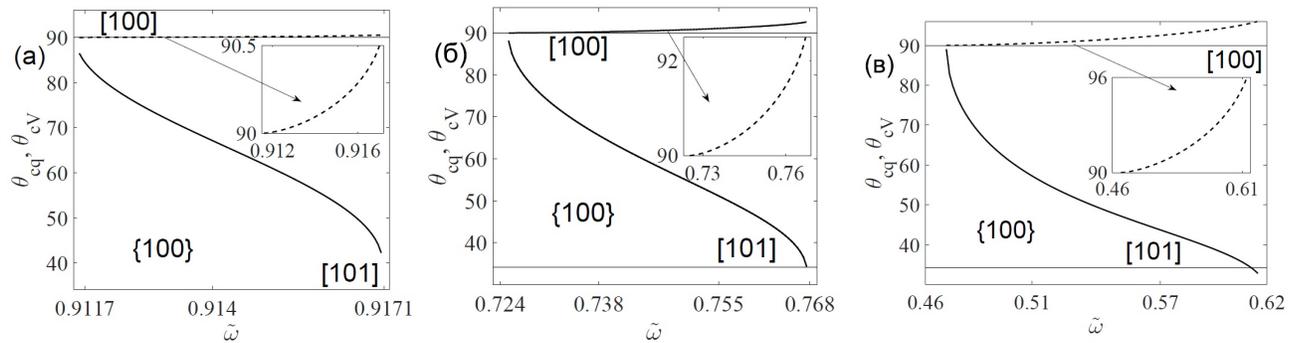


Рисунок 3.18 — Углы каустики в плоскости  $\{100\}$  для  $\xi = -0.2$  (а),  $\xi = -0.5$  (б), и  $\xi = -0.8$  (в).

Таким образом, при отрицательных  $\xi$  в антиферромагнетиках с кристаллической решеткой ОЦТ-типа возможна каустика. Ее можно наблюдать в различных кристаллографических плоскостях. Положение каустики определяется частотой волны, а зависимость направления каустики от частоты оказывается достаточно сложной. Это объясняет разброс значений коэф-

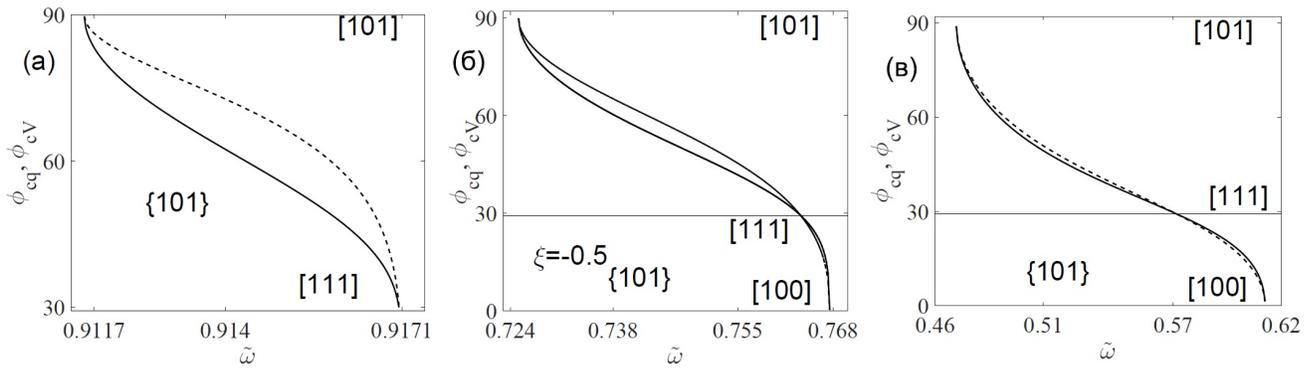


Рисунок 3.19 — Углы каустики в плоскости  $\{101\}$  для  $\xi = -0.2$  (а),  $\xi = -0.5$  (б), и  $\xi = -0.8$  (в).

коэффициента усиления для характерных направлений  $[100]$ ,  $[001]$ ,  $[110]$ ,  $[101]$ ,  $[111]$ , собранных в таблице 3.2. Если выбранное направление оказывается близким к направлению каустики, то, очевидно, и коэффициент усиления для него окажется большим, если более далеким – то величина  $A$  будет существенно меньше. Часть таблицы 3.2 с отрицательными  $\xi$  является просто отражением этого утверждения: при выбранном для таблицы 3.2 наборе  $(\xi, \tilde{\omega})$  одни направления оказались ближе к каустике, другие – дальше. Величина  $A$  при этом определяется степенью удаленности направления от ближайшей каустики.

### Выводы к главе 3

В главе 3 проанализировано поведение спиновых волн в гейзенберговских ферромагнетиках и антиферромагнетиках. Методом являлось изучение поверхностей постоянной частоты. Используемая характеристика интенсивности распространения волны в заданном направлении (коэффициент усиления) – отношение потока волн через элемент поверхности внутри телесного угла в реальном кристалле к соответствующему потоку в изотропной среде, определяется геометрической характеристикой поверхности – гауссовой кривизной. Основные выводы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Исследована фокусировка спиновых волн в ферромагнетиках с ГЦК, ОЦК и простой кубической решетками, и в антиферромагнетиках с ОЦТ-решеткой с различными значениями  $\xi = J_2/J_1$ . Установлено, что при  $\xi > 0$  в магнетиках существуют направления фокусировки и дефокусировки, однако эти эффекты выражены слабо. При  $\xi < 0$  на поверхностях постоянной частоты могут содержаться как выпуклые, так и вогнутые участки, и линии нулевой кривизны, которые означают появление каустики спиновых волн.

2. Найдены зависимости направления каустики от частоты и величины  $\xi$  в плоскостях  $\{100\}$  и  $\{110\}$  для ферромагнетиков с различными типами кубической решетки и ОЦТ- антиферромагнетиков. Определено, что с увеличением  $|\xi|$  область частот каустики сдвигается в область

меньших частот, а ширина области становится больше.

3. Определены особенности фокусировки спиновых волн в ГЦК-ферромагнетиках  $\text{EuO}$  ( $\xi = 0.2$ ) и  $\text{EuS}$  ( $\xi = -0.5$ ) и ОЦТ-антиферромагнетике  $\text{MnF}_2$  ( $\xi = 0.2$ ). Показано, что в  $\text{MnF}_2$  и  $\text{EuO}$  возможна фокусировка, а в  $\text{EuS}$  – каустика магнонов.

Результаты по данной главе приведены в статьях [A3–A7].

## 4 Фокусировка магнитоупругих волн в ферромагнетиках

Предыдущая глава была посвящена спиновым волнам в ферромагнетиках с кубическими и антиферромагнетиках с объемно-центрированной тетрагональной решетками. Исследовался диапазон достаточно коротких длин волн, сравнимых с периодом решетки, для чего было необходимо использовать микроскопическую модель описания движения. Поскольку основной акцент был сделан на исследовании влияния вторых соседей на закон дисперсии спиновых волн, то в микроскопической модели принималось во внимание только обменное взаимодействие и энергия магнитной анизотропии, причем для последней рассматривался самый простой случай одноосной анизотропии. Прочие взаимодействия полагались малыми. Разумеется, пренебрежение остальными взаимодействиями сильно упрощает картину распространения волн, однако есть основания полагать, что основные особенности их поведения – фокусировка и каустика, будут наблюдаться и в реальных ферромагнитных кристаллах, пусть и в несколько искаженной форме. Напомним, что каустика в рамках вышеописанной микромагнитной модели возможна лишь в условиях, достаточно сложно реализуемых: во-первых, нужен специфический ферро- или антиферромагнетик с довольно необычным соотношением между обменными постоянными, во-вторых, должна быть высокая по меркам спиновых волн частота (сотни гигагерц), и в-третьих, волны должны быть с большими волновыми числами. В настоящей главе рассматривается более простая с точки зрения реализации в эксперименте ситуация. Здесь будет идти речь о волнах с более низкими частотами и малыми волновыми числами, для которых справедливо феноменологическое описание. В рамках феноменологической модели основные взаимодействия записываются в более простой форме, а уравнения движения спинов имеют более простой вид [89–93]. В главе 4, кроме обмена и анизотропии, учитываются взаимодействие с внешним магнитным полем, магнитное дипольное взаимодействие, а также взаимодействие между магнитной и упругой подсистемами твердого тела. Все расчеты проведены для вещества, которое является одним из наиболее изученных и очень часто используемых в экспериментах и промышленных приборах – железо-иттриевого граната. Физические характеристики – намагниченность насыщения, постоянные анизотропии, упругие модули, и магнитоупругие постоянные ЖИГ известны с хорошей точностью [4, 44]. В настоящей главе исследуются особенности магнитоупругих волн в ЖИГ, которые могут наблюдаться в реальном эксперименте. При этом акцент, как и в предыдущей главе, делается на изучении эффектов фокусировки.

#### 4.1 Закон дисперсии магнитоупругих волн

Энергию ферромагнетика в рамках феноменологического подхода можно полагать состоящей из трех частей:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{el} + \mathcal{W}_m + \mathcal{W}_{mp}, \quad (4.1)$$

где  $\mathcal{W}_{el}$  – энергия упругой подсистемы,  $\mathcal{W}_m$  – магнитной,  $\mathcal{W}_{mp}$  – энергия магнитоупругого взаимодействия. Здесь мы ограничимся рамками гармонического приближения. Тогда, поскольку ЖИГ имеет кубическую кристаллическую структуру, то плотность упругой энергии записывается в виде [4]

$$\mathcal{W}_{el} = \frac{1}{2}c_{11}(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + c_{12}(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}) + 2c_{44}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2), \quad (4.2)$$

где  $c_{11}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{12}$  – упругие модули второго порядка,  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$  – симметричный тензор деформаций,  $u_i$  – малое упругое смещение. Магнитная энергия образца состоит из суперпозиции обменной энергии, энергии взаимодействия с внешним магнитным полем, кубической магнитной анизотропии и энергии магнитного дипольного взаимодействия:

$$\mathcal{W}_m = \frac{A_{ex}}{M_0^2}[(\nabla M_x)^2 + (\nabla M_y)^2 + (\nabla M_z)^2] - M_z H_0 + \frac{K_A}{M_0^4}(M_x^2 M_y^2 + M_y^2 M_z^2 + M_z^2 M_x^2) - \frac{1}{2}\mathbf{M} \cdot \mathbf{H}_d. \quad (4.3)$$

Здесь  $A_{ex}$  – постоянная обменного взаимодействия,  $K_A$  – константа анизотропии, вектор намагниченности равен  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$ ,  $M_0$  – намагниченность насыщения,  $\mathbf{H}_0 = (0, 0, H_0)$  – постоянное внешнее магнитное поле,  $\mathbf{H}_d$  – поле, обусловленное магнитным дипольным взаимодействием. Как было указано в Главе 1, это поле удовлетворяет уравнениям магнитостатики и для образцов эллипсоидальной формы выражается через тензор размагничивающих факторов  $\mathbf{H}_d = -4\pi\hat{N}\mathbf{M}$ . Магнитоупругое взаимодействие обусловлено магнон-фононным взаимодействием и в гармоническом приближении для кубических кристаллов может быть представлено в виде [4]

$$\mathcal{W}_{mp} = \frac{b_1}{M_0^2}(M_x^2\varepsilon_{xx} + M_y^2\varepsilon_{yy} + M_z^2\varepsilon_{zz}) + \frac{2b_2}{M_0^2}(M_x M_y \varepsilon_{xy} + M_y M_z \varepsilon_{yz} + M_x M_z \varepsilon_{xz}). \quad (4.4)$$

Здесь  $b_1$ ,  $b_2$  – магнитоупругие постоянные. Все введенные здесь параметры для ЖИГ известны:  $A_{ex} = 4.3 \cdot 10^{-7}$  эрг см<sup>2</sup>,  $K_A = -0.062 \cdot 10^5$  эрг см<sup>-3</sup>,  $4\pi M_0 = 1750$  Гс,  $c_{11} = 2.69 \cdot 10^{12}$  дин см<sup>-2</sup>,  $c_{44} = 0.764 \cdot 10^{12}$  дин см<sup>-2</sup>,  $c_{12} = 1.077 \cdot 10^{12}$  дин см<sup>-2</sup>,  $b_2/M_0^2 = 225$  [44, 94, 95]. Типичные значения внешних полей  $H_0 \sim 1 - 10$  кЭ. Поскольку внешнее поле направлено вдоль оси  $Oz$ , то равновесная намагниченность также ориентирована вдоль этой оси, а кубическая магнитная анизотропия ведет себя подобно одноосной с полем  $H_A = 2K_A/M_0$ . Эффективное магнитное поле внутри ферромагнетика в равновесном состоянии, таким образом, оказывается равным  $H_i = H_0 + H_A - N_z M_0$ . Поле анизотропии в ЖИГ оказывается достаточно малым:

$H_A = 2K_A/M_0 = 2 \cdot (-0.062 \cdot 10^5)/139.3 \approx -90 \text{ Э}$ . Если постоянное внешнее магнитное поле достаточно велико ( $H_0 > 10 \text{ кЭ}$ ), то разница между внешним и внутренним полем будет относительно невелика, но в меньших полях внутреннее поле существенно отличается от внешнего, причем это различие существенно зависит от формы образца (напомним, что  $N_z = 4\pi/3$  для сферы,  $N_z = 0$  для протяженного цилиндра,  $N_z = 4\pi$  для бесконечной пластинки).

Уравнения динамики для упругого смещения и намагниченности имеют следующий вид

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \gamma [\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{eff}], \quad (4.5)$$

где  $\sigma_{ik}$  – тензор деформации, определяемый как  $\sigma_{ik} = \partial \mathcal{W} / \partial \varepsilon_{ik}$  при  $i \neq k$ , и  $\sigma_{ik} = 0.5 \partial \mathcal{W} / \partial \varepsilon_{ik}$  при  $i = k$ ,  $\rho = 5.7 \text{ г/см}^{-3}$  – плотность,  $\gamma = 2.8 \cdot 10^6 \text{ Э}^{-1} \text{ с}^{-1}$  – гиромангнитное отношение, эффективное магнитное поле определяется через вариационную производную от энергии  $\mathbf{H}_{eff} = -\delta \mathcal{W} / \delta \mathbf{M}$ .

Магнитоупругие волны мы будем рассматривать в линейном приближении

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{m}, \quad \mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{i0} + \mathbf{h},$$

где  $m \ll M_0$ ,  $h \ll H_{i0}$ . Поскольку  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  направлены вдоль оси  $Oz$ , то  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{h}$  лежат в плоскости  $Oxy$ . Будем сначала полагать, что образец достаточно большой и граничными условиями можно пренебречь, тогда, во-первых, можно учитывать влияние размагничивающих факторов только во внутреннем поле ферромагнетика, постоянную часть которого обозначать  $H_i$ , а во-вторых, переменную часть поля и намагниченности можно представить в виде интегралов Фурье

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \mathbf{h}(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}, \quad \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \mathbf{m}(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}.$$

Так как переменная часть поля удовлетворяет уравнениям магнитостатики

$$[\nabla \times \mathbf{h}] = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{h}) = -4\pi(\nabla \cdot \mathbf{m}),$$

то для Фурье-образа  $\mathbf{h}(k, \omega)$  имеем

$$\mathbf{h} = -\frac{4\pi}{q^2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q}.$$

Линеаризованные уравнения (4.5) имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho\omega^2 u_x = \\ \quad = c_{11}q_x^2 u_x + c_{12}(q_x q_y u_y + q_x q_z u_z) + c_{44}(q_y^2 u_x + q_x q_y u_y + q_z^2 u_x + q_x q_z u_z) + \frac{ib_2}{M_0} q_z m_x, \\ \rho\omega^2 u_y = \\ \quad = c_{11}q_y^2 u_y + c_{12}(q_x q_y u_x + q_y q_z u_z) + c_{44}(q_x^2 u_y + q_x q_y u_x + q_z^2 u_y + q_y q_z u_z) + \frac{ib_2}{M_0} q_z m_y, \\ \rho\omega^2 u_z = c_{11}q_z^2 u_z + c_{12}(q_y q_z u_y + q_x q_z u_x) + \\ \quad + c_{44}(q_y^2 u_z + q_y q_z u_y + q_x^2 u_z + q_x q_z u_x) + \frac{ib_2}{M_0} (q_y m_y + q_x m_x), \\ (i\omega - \frac{4\pi M_0}{q^2} q_x q_y) m_x = \gamma(\frac{2A}{M_0} q^2 + H_i + \frac{4\pi M_0}{q^2} q_y^2) m_y - ib_2(q_z u_y + q_y u_z), \\ (i\omega + \frac{4\pi M_0}{q^2} q_x q_y) m_y = -\gamma(\frac{2A}{M_0} q^2 + H_i + \frac{4\pi M_0}{q^2} q_x^2) m_x + ib_2(q_x u_z + q_z u_x). \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Заметим, что в линейном приближении при выбранной ориентации внешнего магнитного поля уравнения не содержат постоянной  $b_1$  и магнитоупругие свойства, по существу, определяются одной постоянной  $b_2$ . Далее обратим внимание на то, что анизотропия упругих свойств ЖИГ  $k-1 = (c_{12} + 2c_{44} - c_{11}) / (c_{11} - c_{44}) \approx -0.04$  очень мала. Поэтому в дальнейшем мы будем полагать  $c_{12} = c_{11} - 2c_{44}$  и считать ЖИГ упруго-изотропным. Учет столь малой анизотропии не приводит к значимым эффектам, однако приводит к значительно более громоздким аналитическим выражениям. При  $k-1 = 0$  слагаемые с упругими постоянными симметричны относительно перестановки  $x, y, z$ , а слагаемые с магнитными и магнитоупругими параметрами симметричны относительно перестановки  $x, y$ . Это говорит о том, что направление  $z$  в задаче является выделенным, а в плоскости  $Oxy$  задача является симметричной, т. е. если рассматривать задачу в сферической системе координат  $q, \theta, \varphi$ , то собственные частоты и амплитуды не будут зависеть от угла  $\varphi$ . Поэтому без ограничения общности можно рассматривать двумерную задачу и полагать, что волновой вектор  $\mathbf{q}$  лежит в плоскости  $Oxz$ . Если полагать  $\mathbf{q} = q(\sin\theta, 0, \cos\theta)$  и перейти к естественным переменным для упругих смещений

$$u_l = u_z \cos(\theta) + u_y \sin(\theta), \quad u_t = -u_z \sin(\theta) + u_y \cos(\theta),$$

то получим более простую систему однородных уравнений, условием существования нетривиальных решений которой является равенство нулю определителя

$$\det \begin{pmatrix} (S_L^2 - S^2) & 0 & 0 & 2i\frac{b_2}{M_0 q \rho} n_x n_z & 0 \\ 0 & 0 & (S_T^2 - S^2) & 0 & i\frac{b_2}{M_0 q \rho} n_z \\ 0 & (S_T^2 - S^2) & 0 & i\frac{b_2}{M_0 q \rho} (n_z^2 - n_x^2) & 0 \\ 0 & 0 & -ib_2 \gamma n_z & -iS & S_s \\ 2ib_2 \gamma n_z n_x & ib_2 \gamma (n_z^2 - n_x^2) & 0 & -S_s & -iS \end{pmatrix} = 0, \quad (4.7)$$

где  $S = \omega/q$ ,  $S_L = \sqrt{c_{11}/\rho}$ ,  $S_T = \sqrt{c_{44}/\rho}$ ,  $S_s = \frac{\gamma}{q} \left( \frac{2A}{M_0} q^2 + H_i \right)$ ,  $n_x = \sin \theta$ ,  $n_z = \cos \theta$ ,  $\mathbf{q} = q(n_x, 0, n_z)$ .

В отсутствии магнитоупругого взаимодействия ( $b_2 = 0$ ) этот определитель, очевидно, факторизуется. Первые три сомножителя описывают упругие колебания. При этом одна мода имеет частоту  $\omega = q\sqrt{c_{11}/\rho}$  и поляризована вдоль направления волнового вектора, две другие имеют одинаковую частоту  $\omega = q\sqrt{c_{44}/\rho}$  и поляризованы в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{q}$ . Последний сомножитель определителя (при  $b_2 = 0$ ) задает магнитную моду с частотой  $\omega = \gamma(H_i + \frac{2A}{M_0} q^2)$  поляризованную в плоскости  $Oxy$ .

При включении магнитоупругого взаимодействия ( $b_2 \neq 0$ ) определитель представляет собой уравнение 4 степени относительно  $S^2$ :

$$(S^2 - S_L^2) \left\{ (S^2 - S_T^2)^2 (S^2 - S_s^2) - (S^2 - S_T^2) \frac{b_2^2 \gamma}{M_0 \rho q} \times [S_m n_z^2 + S_s (n_z^2 - n_x^2)] - \right. \\ \left. - \frac{b_2^4 \gamma^2}{M_0^2 \rho^2 q^2} n_z^2 (n_z^2 - n_x^2) \right\} - 4(S^2 - S_T^2) \frac{b_2^2 \gamma}{M_0 \rho q} n_x^2 n_z^2 \left\{ S_s (S^2 - S_T^2) + \frac{b_2^2 \gamma}{M_0 \rho q} n_z^2 \right\} = 0. \quad (4.8)$$

Очевидно, что магнитные и упругие волны оказываются связанными друг с другом. Для симметричных направлений: [101] ( $\theta = \pi/4$ ) и [001] ( $\theta = 0$ ), продольная фоннная мода выделяется в виде сомножителя, и, следовательно, становится несвязанной модой. Для прочих направлений она не выделяется. Поперечные упругие моды остаются взаимодействующими с магнитной модой во всех направлениях распространения. Единственное аналитическое решение получается при  $q \rightarrow 0$ , когда закон дисперсии факторизуется, и мы имеем дело с тремя упругими модами и одной магнитной. Таким образом, спектр магнитоупругих волн содержит четыре ветви: три квазиупругих и одну квазимагнитную, причем в общем случае уравнение (4.7) решается при помощи численных методов.

Результаты численного решения дисперсионного уравнения приведены на рисунке 4.1. Законы дисперсии содержат две резонансные точки. В первой сближаются продольная квазиупругая и квазимагнитные моды ( $mL$ -резонанс). В этой точке в симметричных направлениях [001], [100] моды не взаимодействуют (магнитная и упругая ветви пересекаются), а в несимметричных направлениях (например [101]) моды взаимодействуют: квазимагнитная ветвь переходит в продольную квазиупругую, а продольная квазиупругая – в магнитную. Ветви расталкиваются и между ними формируется магнитоупругая щель. Во второй точке резонанса встречаются поперечные упругие ветви и магнитная ветвь ( $mT$ -резонанс). При этом квазимагнитная мода трансформируется в квазиупругую поперечную, одна из квазиупругих поперечных мод остается квазиупругой поперечной, а вторая – преобразуется в квазимагнитную. Во второй точке резонанса моды взаимодействуют для всех направлений распространения и ветви не пересекаются. Таким образом закон дисперсии состоит из четырех ветвей: магнитная ветвь, переходящая в продольную упругую (линия I на рисунке 4.1), продольная упругая, преобразующуюся в маг-

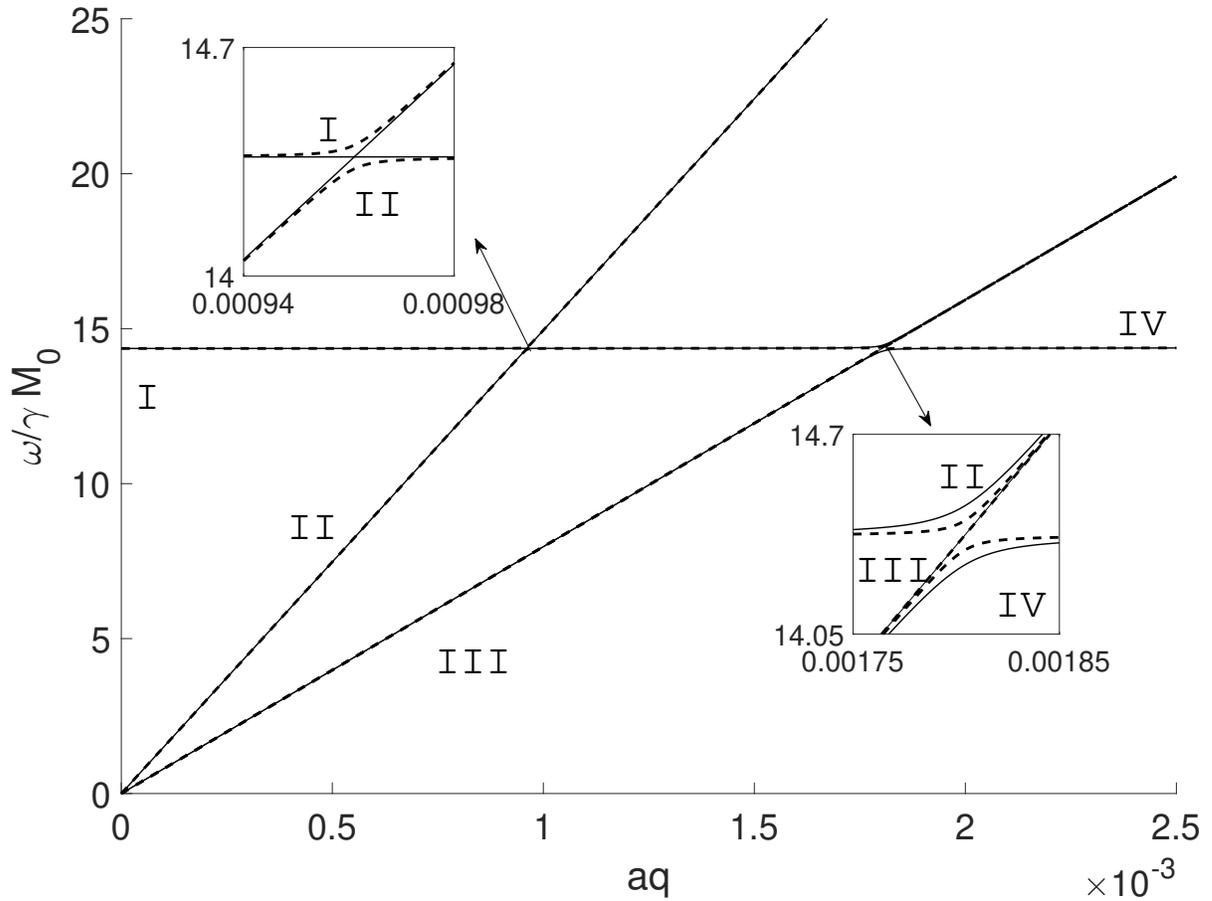


Рисунок 4.1 — Закон дисперсии магнитоупругих волн в рамках феноменологической модели для направлений [001] (сплошные линии) и [101] (штриховые линии). Римскими цифрами обозначены ветви закона дисперсии.

нитную и затем снова в упругую, но уже поперечную (линия II на рисунке 4.1), не меняющаяся квазиупругая поперечная ветвь и поперечная упругая, преобразующуюся в магнитную (линия IV на рисунке 4.1).

Классификацию мод можно провести, исследуя поляризацию. Соответствующий вектор поляризации  $(u_x, u_y, u_z, m_x, m_y)$  находится из решения системы уравнений (4.6) и является нормированным пятимерным вектором. Компоненты  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  определяют амплитуду колебаний в упругой подсистеме,  $m_x, m_y$  — в магнитной. Для удобства представим упругие компоненты в виде части, параллельной волновому вектору  $\mathbf{q} = q\mathbf{n}$  и перпендикулярной ему части:  $u_l = |(\mathbf{u}, \mathbf{n})|$ ,  $u_t = \sqrt{|\mathbf{u}|^2 - (u_l)^2}$ . Магнитная часть поляризации равна  $m = \sqrt{|m_x|^2 + |m_y|^2}$ .

На рисунке 4.2 представлены зависимости величин  $u_l, u_t$  и  $m$  от волнового числа  $aq$  для направления  $\theta = \pi/4$ . Для моды I на рисунке 4.1 продольная упругая компонента близка к нулю слева от  $mL$ -резонанса, и близка к единице справа от резонанса (см. рисунок 4.2). Магнитная мода (линия обозначена точками) при этом близка к единице слева от резонанса и становится

близкой к нулю справа от резонанса. Поперечная компонента (сплошная линия) на  $mL$  моде практически равна нулю. Таким образом, моду I можно назвать  $mL$ -модой: слева от резонанса  $mL$  мода является практически магнитной, а справа – практически продольной упругой.

Аналогичная картина наблюдается для остальных мод. Приведем подробное описание. Вторую моду можно назвать  $LmT$  модой: слева от  $mL$ -резонанса продольная компонента (штриховая линия на рисунке 4.2б) близка к единице, поперечная упругая и магнитная компоненты практически равны нулю. По существу, мы имеем дело с продольной волной. Между  $mL$  и  $mT$  резонансами магнитная компонента возрастает почти до единицы, продольная и поперечная упругие компоненты (штриховая и сплошная линии) становятся почти нулевыми. На этом участке волну можно считать магнитной. Справа от  $mT$  резонанса магнитная компонента уходит в нуль, а поперечная (сплошная линия) возрастает к единице. Следовательно, волна быстро становится упругой поперечной.

Мода III является  $T$ -модой (рисунок 4.2в): поперечная упругая компонента практически равна единице, остальные компоненты практически нулевые. Отклонения не заметны даже в окрестности  $mT$ -резонанса. Мода является поперечной упругой с хорошей точностью. Мода IV — это  $Tm$ -мода (рисунок 4.2г): слева от второй точки резонанса преобладает поперечная упругая компонента, т. е. моду можно считать поперечной упругой, справа от резонанса преобладает магнитная мода. Продольная компонента волны практически нулевая во всем диапазоне волновых чисел.

Наличие магнитоупругости приводит к двум эффектам, а именно к снятию вырождения упругих мод и появлению магнитных компонент в упругих ветвях, а в магнитных ветвях – упругих компонент, а также в продольных модах появляются поперечные составляющие и в поперечных – продольные. Моды, таким образом, становятся связанными. Они становятся квазимагнитными, квазипродольными и квазипоперечными квазиупругими. Поэтому традиционная фононная классификация [32]: продольные, быстрые и медленные поперечные моды для магнитоупругих волн становится неприемлемой.

## 4.2 Фокусировка и каустика магнитоупругих волн

Наиболее интересная трансформация закона дисперсии происходит в окрестности точек резонанса. Именно эту область и следует исследовать с точки зрения изучения зависимости закона дисперсии от направления, и связанных с ним эффектов фокусировки. Обе резонансные частоты находятся вблизи  $\omega_0 = \gamma H_i$  – частоты магнитной ветви при  $q \rightarrow 0$ . Окрестность этой частоты необходимо исследовать подробно. Для этого были построены изолинии для следующих частот:  $\omega = \gamma_e H_i (1 + \delta)$ , где  $\delta = (-5; -3; -1; 1; 3; 5)10^{-4}$ . Результат приведен на рисунке 4.3, линии на котором соответствуют различным  $\delta$  и сгруппированы по типам мод (I-IV). Штриховые линии семейства (I) представляют собой  $mL$  моду. Этот тип волн существует только для положительных  $\delta$  и сохраняется почти изотропным. Набор линий (II) на рисунке 4.3 соответ-

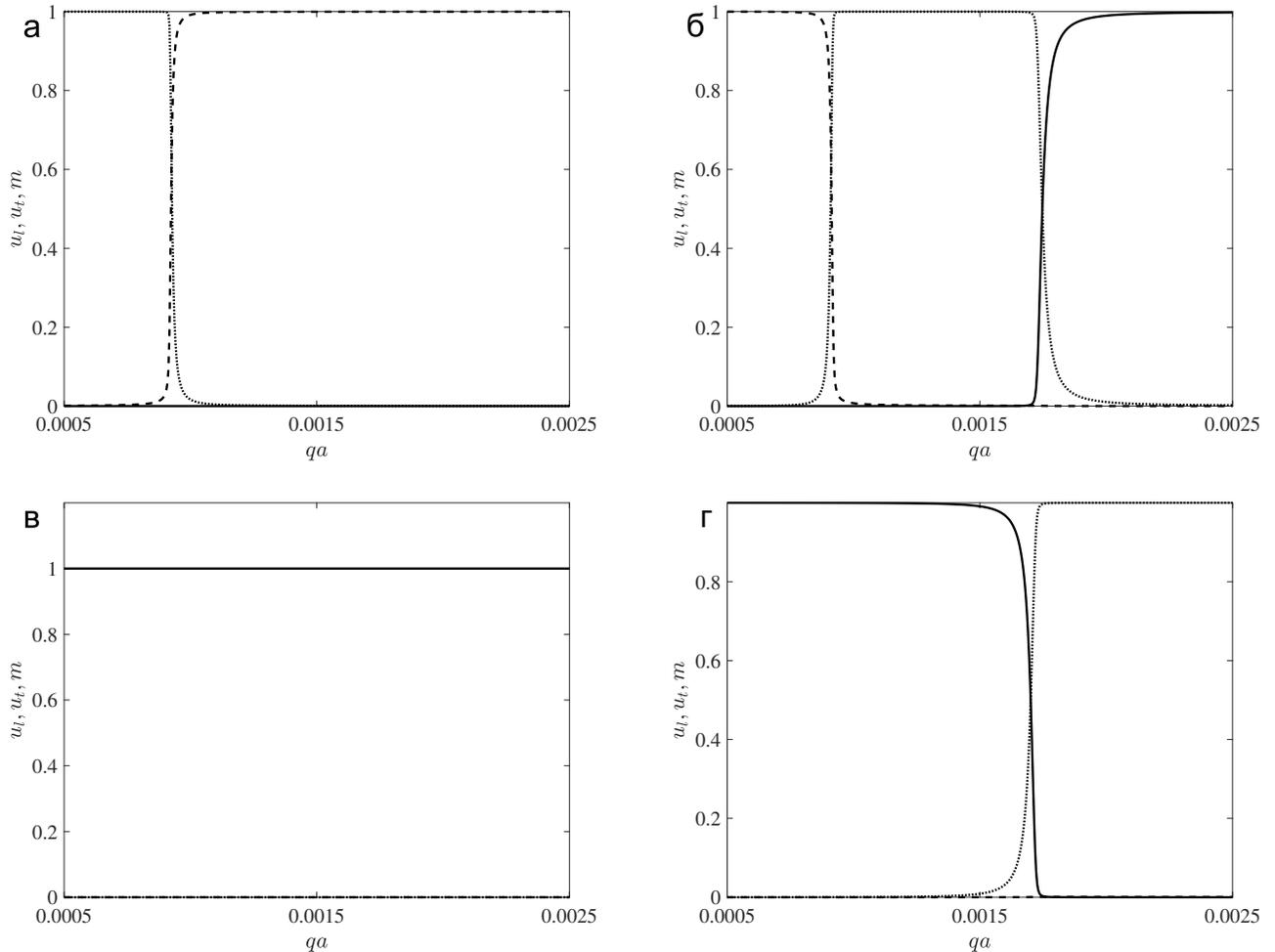


Рисунок 4.2 — Поляризация для мод  $mL$  (а),  $LmT$  (б),  $T$  (в),  $Tm$  (г). Штриховая линия – продольная упругая компонента, сплошная – поперечная упругая, точками обозначена магнитная компонента. Расчёты проведены для ЖИГ,  $H_0 = 2$  кЭ,  $\theta = \pi/4$

существует  $LmT$  моде. Эта группа существует как для положительных, так и для отрицательных  $\delta$  и демонстрирует анизотропию в специфической области значений  $\delta$ . Трансформация линий из группы (II) выглядит следующим образом. Линии остаются почти изотропными для отрицательных  $\delta$ , но модуль  $q$  увеличивается при изменении  $\delta$  от  $-5 \cdot 10^{-4}$  до  $-3 \cdot 10^{-4}$ . Затем для значений от  $-3 \cdot 10^{-4}$  до  $+1 \cdot 10^{-4}$  ситуация усложняется. Модуль волнового вектора  $q$  остается прежним в направлении  $[100]$  ( $\theta = \pi/2$ ) и  $[001]$  ( $\theta = 0$ ), но становится существенно больше в других направлениях. При этом ярко выражена анизотропия моды. Дальнейшее увеличение частоты приводит к увеличению волнового числа во всех направлениях, и анизотропия уменьшается. Группа линий постоянной энергии (III) (штриховые линии на рисунке 4.3) соответствует  $T$  моде. Она практически изотропна и не меняется при переходе через резонанс. Последняя группа линий (IV) представляет собой  $Tm$  моды. Они демонстрируют малую анизотропию для малых положительных  $\delta$  и становятся изотропными для больших  $\delta$ .

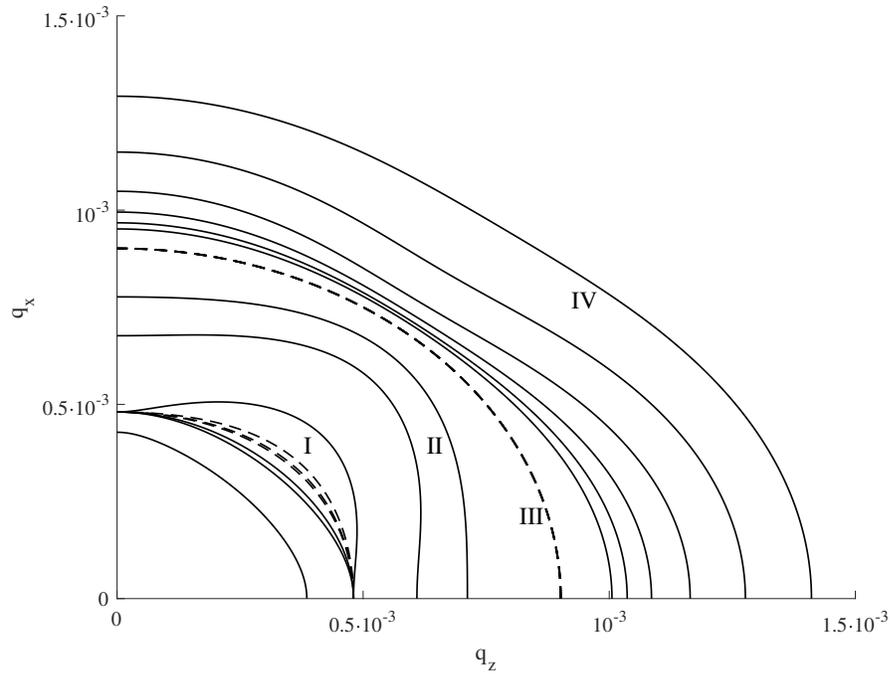


Рисунок 4.3 — Изолинии в плоскости  $\{100\}$   $mL$  моды (набор линий I),  $LmT$  моды (II),  $T$  моды (III) и  $Tm$  моды (IV) для постоянных частот  $\omega = \gamma_e H_i (1 + \delta)$  при  $\delta = (-5; -3; -1; 1; 3; 5)10^{-4}$ .

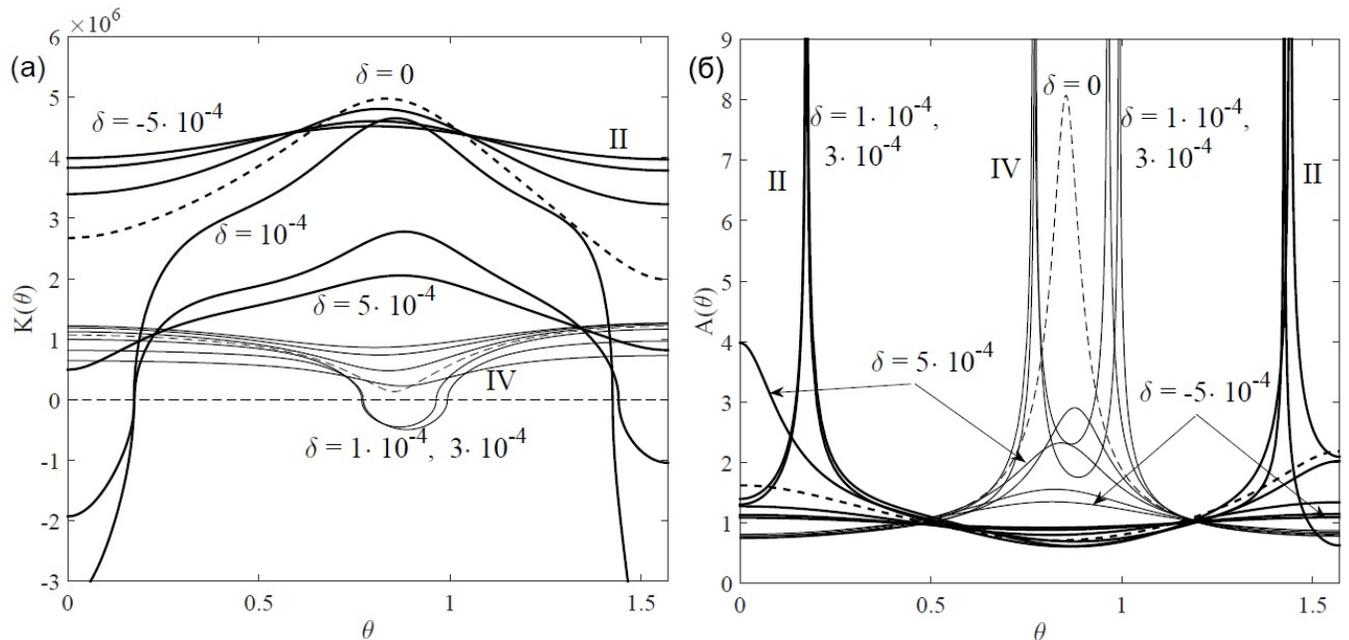


Рисунок 4.4 — Гауссова кривизна (а) и коэффициент усиления (б) для  $LmT$  моды (II) и  $Tm$  моды (IV) при частотах  $\omega = \gamma_e H_i (1 + \delta)$  при  $\delta = (-5; -3; -1; 1; 3; 5)10^{-4}$ .

Наиболее заметное отличие изолиний от окружностей наблюдается для  $LmT$  и  $Tm$  мод. Чем больше особенности поверхностей постоянной частоты, тем более ярко представлены эффекты фокусировки. Поэтому для  $LmT$  и  $Tm$  необходимо подробно изучить поведение кривизны и

коэффициента усиления. Результат исследования представлен на рисунке 4.4. Обсудим сначала трансформацию кривизны поверхности при изменении частоты волны (см. рисунок 4.4а). В случае  $LmT$  моды при  $\delta \leq 0$  кривизна остается положительной для всех значений углов  $\theta$ , но если вдали от резонанса ( $\delta = -5 \cdot 10^{-4}$ ) кривизна практически постоянна, то при приближении к нему ( $\delta = 0$ ) появляется сильная зависимость от угла  $\theta$ : значение  $K(\pi/4)$  почти в два раза больше  $K(0)$ . При малых положительных  $\delta$  ( $\delta = 10^{-4}$  и  $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$ ) часть кривой в окрестности  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  становится вогнутой, и появляются точки нулевой кривизны. С дальнейшим увеличением частоты ( $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ ) вся кривая  $K(\theta)$  вновь становится выпуклой и точки нулевой кривизны исчезают. Эти особенности четко прослеживаются и на графике зависимости коэффициента усиления от угла (см. рисунок 4.4б). При отрицательных  $\delta$  функция  $A(\theta)$  слабо меняется вблизи значения  $A = 1$ , имеет слабо выраженный минимум вблизи  $\theta = \pi/4$ . При малых положительных  $\delta$  функция  $A(\theta)$  имеет разрывы второго рода – точки каустики вблизи  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ . Положение этих каустик слабо зависит от частоты: левая точка каустики ( $\theta \approx 10^\circ$ ) практически не изменяется при  $\delta = 10^{-4}$  и  $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$ , а правая точка ( $\theta \approx 82^\circ$ ) немного сдвигается при изменении  $\delta$  от  $10^{-4}$  до  $3 \cdot 10^{-4}$ .

Теперь изучим внимательно поведение кривизны и коэффициента усиления  $Tm$  моды. При отрицательных  $\delta$  кривизна моды всюду положительна и от угла  $\theta$  зависит слабо, на кривой  $K(\theta)$  есть неярко выраженный минимум вблизи  $\theta = \pi/4$ , величина которого уменьшается при увеличении  $\delta$  от  $-5 \cdot 10^{-4}$  до 0. При малых положительных  $\delta$  минимум кривой  $K(\theta)$  смещается в отрицательную область, и образуются точки нулевой кривизны. При больших положительных  $\delta$  кривизна снова становится всюду положительной и точки нулевой кривизны исчезают. Это поведение также четко отслеживается на зависимостях коэффициента усиления от угла (см. рисунок 4.4б). При отрицательных  $\delta$  коэффициент усиления – слабо меняющаяся вблизи  $A = 1$  функция. При увлечении  $\delta$  от  $-5 \cdot 10^{-4}$  до 0 на функции  $A(\theta)$  формируется максимум вблизи  $\pi/4$ , при  $\delta = 10^{-4}$  и  $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$  коэффициент усиления имеет две точки разрыва второго рода – каустики, которые при дальнейшем увеличении частоты исчезают. Как и в случае  $LmT$  моды, левая точка каустики при изменении частоты практически не меняет своего положения, а правая – слабо зависит от частоты. Эта асимметрия обусловлена тем, что направление  $[001]$  в нашей задаче является выделенным: мы полагаем, равновесное внутреннее поле  $\mathbf{H}_i$  и равновесная намагниченность  $\mathbf{M}_0$  ориентированы вдоль этой оси. Поскольку положение левой и правой точек каустики отличаются друг от друга лишь небольшими деталями, то можно сделать вывод о том, что магнитное поле оказывает лишь слабое влияние на фокусировку и каустику. В основном эти эффекты обусловлены сложным балансом между обменным, упругим и магнитоупругим взаимодействиями.

Таким образом, несмотря на то, что магнитоупругое взаимодействие достаточно мало, в окрестности резонанса оно приводит к интересным особенностям в спектре магнитоупругих волн. В частности, в некоторых направлениях появляется возможность наблюдения каусти-

ки. Заметим, что в Главе 3 условия каустики реализовывались лишь в весьма специфических ферро- и антиферромагнетиках для высоких частот и коротких длин волн, что ставит под вопрос возможность их наблюдения. Здесь же делается вывод о том, что каустику можно ожидать в образцах ЖИГ – материала, часто используемого в реальных экспериментах, при условиях, вполне реализуемых экспериментально. Единственная сложность заключается в том, что область частот оказалась довольно узкой:  $\delta \sim 10^{-4}$ , т. е. все происходит на частотах вблизи резонансной с точностью до 0.01%. В абсолютных единицах эти цифры означают следующее: частота резонанса  $\omega_{res}/(2\pi) \sim$  составляет 2.8 ГГц (в поле  $H_0 = 1$  кЭ), а ширина области каустики составляет  $\delta\omega \sim 0.28$  МГц. Мы рассматривали распространение волн в кристаллографической плоскости  $\{100\}$ , но, поскольку ЖИГ фактически является упруго-изотропным кристаллом, то эта плоскость эквивалентна любой другой плоскости, содержащей направление  $[001]$ . Поэтому если рассматривать трехмерную задачу, то направления каустики будут образовывать конусы. Итак, если в эксперименте удастся попасть в нужную область частот и создать точечный источник магнитоупругих волн, то  $LmT$  моды будут преимущественно распространяться вдоль конусов с углами раствора  $\theta \sim 10^\circ$  и  $\theta \sim 80^\circ$ , а  $Tm$  моды – вдоль конусов с углами раствора  $\theta \sim 40^\circ$  и  $\theta \sim 50^\circ$ . Эффекты фокусировки в модах  $mL$  и  $T$  особо проявляться не будут.

### 4.3 Магнитоупругие волны в пленках

В предыдущем разделе мы полагали, что наш ферромагнетик был достаточно большого размера. Это существенно упростило задачу. Нам не нужно было принимать во внимание граничные эффекты, и можно было использовать интегралы Фурье для решения линеаризованной задачи. Кроме того, все действие магнитного поля свелось к использованию величины  $\mathbf{H}_i$ . Если образец безграничен, то внутреннее поле в ферромагнетике – это единственное поле, которое нам важно, а природа этого поля остается за рамками задачи. Если рассматривать образец конечного размера, то возникает вопрос о природе внутреннего поля. Мы можем контролировать лишь внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ , а внутреннее поле в ферромагнетике равно сумме внешнего поля, поля анизотропии, магнитного дипольного поля, эффективного поля, возникающего из-за магнитоупругого взаимодействия и т. д. На внутреннее поле мы можем лишь как-то влиять, но о полном контроле внутреннего поля можно говорить лишь для образцов эталонного состава, строго заданной формы и при условии, что мы точно знаем все взаимодействия в ферромагнетике. Ясно, что в реальных экспериментах такого достигнуть не удастся. Поэтому важно знать, как сильно будет изменяться описанная в предыдущем разделе картина фокусировки и каустики магнитоупругих волн, если внешнее поле сильно отличается от внутреннего.

Для решения этой задачи мы рассмотрим образец в виде пленки достаточно большой толщины. Для определенности пленку полагаем вырезанной таким образом, что направление  $[001]$  перпендикулярно ее поверхности. Магнитное поле прикладываем вдоль оси  $Oz$ , так же перпендикулярной плоскости пленки. В этой геометрии равновесное положение намагниченности,

будет, как и ранее, ориентировано вдоль  $Oz$ , внутреннее поле в состоянии равновесия также ориентировано вдоль оси  $Oz$  и имеет величину  $H_0 + H_A - N_z M_0$ . Поскольку мы рассматриваем пленку, то далее просто везде полагаем  $N_z = 4\pi$ . Строгое решение задачи о законе дисперсии магнитоупругих волн состоит из двух частей: во первых, из линеаризованных уравнений движения (4.5) мы определяем связь между малыми колебаниями внешнего магнитного поля  $\mathbf{h}$  и колебаниями намагниченности  $\mathbf{m}$ , т. е. находим компоненты тензора динамической магнитной восприимчивости  $\hat{\chi}(\mathbf{q}, \omega)$  и магнитной проницаемости  $\hat{\mu}(\mathbf{q}, \omega)$ . Затем, поскольку ЖИГ является ферромагнитным диэлектриком, то мы потребуем выполнения граничных условий магнитостатики, причем поскольку мы рассматриваем магнитоупругие волны, то эти граничные условия также должны быть переписаны с учетом магнитоупругости [3]. В результате мы получим, подобно задаче, рассмотренной в Главе 2, некоторое характеристическое уравнение, решая которое, найдем дискретный спектр собственных частот. Ясно, что принципиально эта задача не является запредельно сложной, но она будет чрезвычайно громоздкой. Здесь мы рассматриваем лишь часть данной задачи. Пленка полагается достаточно толстой, мы рассматриваем только объемные волны и, более того, интересуемся только волнами в глубине образца достаточно далеко от поверхности. Для этих волн, очевидно, граничные эффекты не должны оказывать существенного влияния, и поведение этих волн можно описывать теми же уравнениями, что и волны в безграничном образце. Мы можем, по-прежнему, пользоваться Фурье-образами для переменной части магнитного поля и намагниченности

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \mathbf{h}(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t}, \quad \mathbf{m}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \mathbf{m}(\mathbf{q}, \omega) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega t},$$

удовлетворяющими уравнениям магнитостатики

$$[\mathbf{q} \times \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)] = 0, \quad (\mathbf{q} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{k}, \omega)) = -4\pi \mathbf{m}(\mathbf{k}, \omega),$$

и связью между Фурье-образами поля и намагниченности

$$\mathbf{h} = -\frac{4\pi}{q^2} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{q}) \mathbf{q}.$$

Линеаризованная система уравнений движения имеет тот же вид, что и ранее (см. (4.6)), за исключением того, что вместо постоянного поля  $H_i$  здесь приходится использовать сумму  $H_0 + H_A - 4\pi M_0$ . Таким образом, мы не решаем полностью задачу о магнитоупругих волнах в ферромагнитных пленках. По сути, мы лишь исследуем влияние размагничивающих факторов на объемные магнитоупругие волны вдали от поверхности пленки. В этой формулировке закон дисперсии, как и ранее, определяется из условия существования нетривиальных решений в системе уравнений, то есть равенства нулю определителя системы. Сейчас его удобно записать

в виде

$$\det \begin{pmatrix} (S_L^2 - S^2) & 0 & 0 & 2i \frac{b_2}{M_0 q \rho} n_x n_z & 0 \\ 0 & 0 & (S_T^2 - S^2) & 0 & i \frac{b_2}{M_0 q \rho} n_z \\ 0 & (S_T^2 - S^2) & 0 & i \frac{b_2}{M_0 q \rho} (n_z^2 - n_x^2) & 0 \\ 0 & 0 & -ib_2 \gamma n_z & -iS & S_s \\ 2ib_2 \gamma n_z n_x & ib_2 \gamma (n_z^2 - n_x^2) & 0 & -S_m & -iS \end{pmatrix} = 0, \quad (4.9)$$

где  $S_s = \frac{\gamma}{q} \left( \frac{2A}{M_0} q^2 + H_i \right)$  и  $S_m = \frac{\gamma}{q} \left( \frac{2A}{M_0} q^2 + H_i + 4\pi M_0 n_x^2 \right)$ ,  $n_x = \sin \theta$ ,  $n_z = \cos \theta$ ,  $\mathbf{q} = q(n_x, 0, n_z)$ . Закон дисперсии, как и в предыдущем разделе, представляет собой уравнение четвертой степени относительно  $S^2$ . Снова одно из решений представляет собой квазимагнитную моду, второе - квазиупругую продольную, и два остальных - квазиупругие поперечные. Как и ранее, в системе есть две резонансные точки, так же в первой резонансной точке моды пересекаются при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  и не пересекаются в прочих направлениях, а во второй точке резонанса моды не пересекаются при любых углах  $\theta$ . Можно использовать ту же классификацию мод, что и ранее:  $mL$ ,  $LmT$ ,  $T$  и  $Tm$ . Единственное отличие оказывается в поведении магнитной моды: различие между внешним магнитным полем и внутренним приводит к существенной зависимости частоты моды от направления. В частности, в пределе  $q \rightarrow 0$  имеем

$$\omega_{mL}(0) = \omega_0 = \gamma \sqrt{H_i (4\pi M_0 \sin^2 \theta + H_i)}. \quad (4.10)$$

Моды с разными направлениями распространения имеют различные частоты даже в пределе  $q \rightarrow 0$ . Разумеется, положение резонансных точек так же оказывается зависящим от направления распространения волн. Графики законов дисперсии для некоторых направлений волнового вектора  $\mathbf{q}$ , отражающие отмеченные особенности, приведены на рисунке 4.5.

Отмеченная особенность частот собственных мод: их зависимость от направлений при  $q \rightarrow 0$ , приводит к необходимости быть особенно аккуратными при построении поверхностей постоянной энергии. Область частот магнитоупругих волн делится на три части:  $\omega < \omega_1$ ,  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  и  $\omega > \omega_2$ , где

$$\omega_1 = \gamma H_i$$

-частота  $mL$  моды в направлении  $[100]$  при  $q \rightarrow 0$ ,

$$\omega_2 = \gamma \sqrt{H_i (H_i + 4\pi M_0)}$$

-частота  $mL$  моды в направлении  $[001]$  при  $q \rightarrow 0$ . Для низких частот ( $\omega < \omega_1$ ), как видно из рисунка 4.5, уравнение  $\omega(\mathbf{q}, \theta) = \omega = const$  имеет три корня для всех значений угла  $\theta$ . В области высоких частот ( $\omega > \omega_2$ ) уравнение  $\omega(\mathbf{q}, \theta) = const$  имеет четыре корня для всех направлений распространения. Наиболее интересна промежуточная ситуация  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ . Здесь для углов

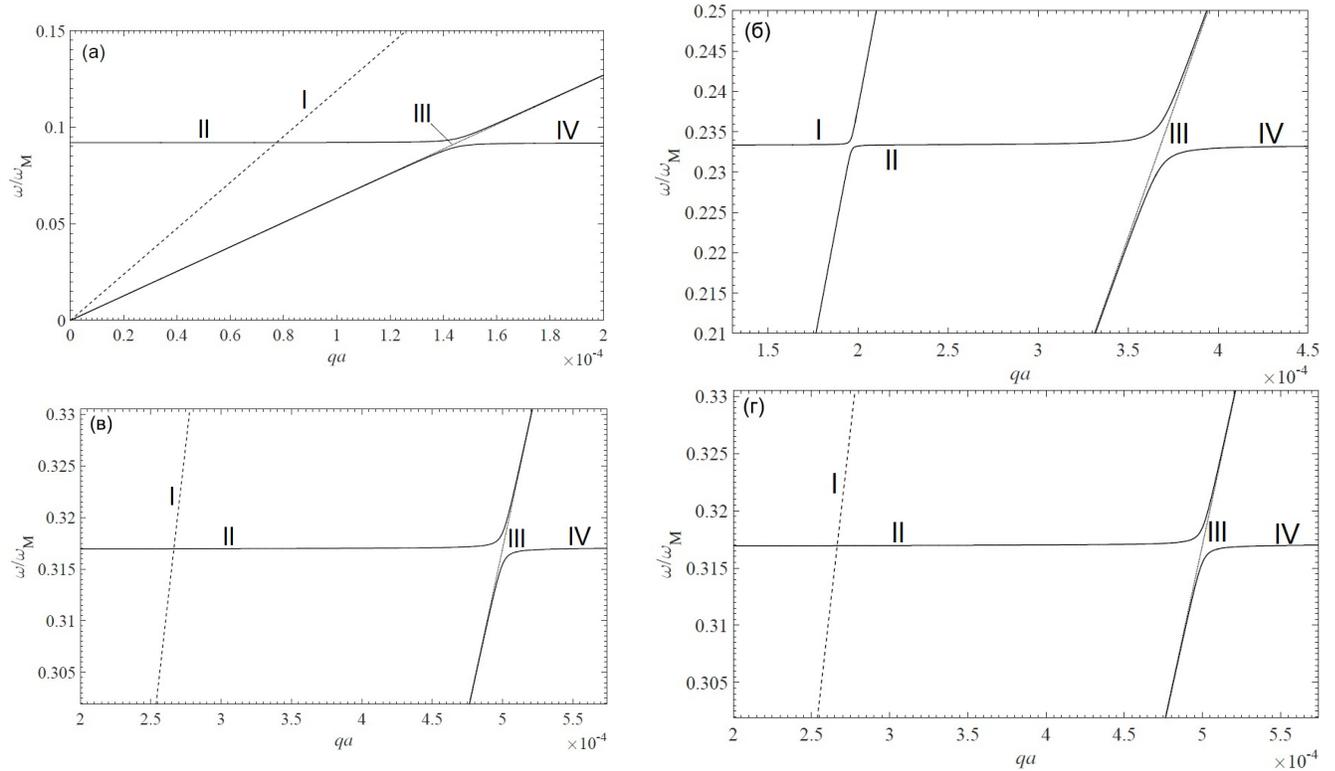


Рисунок 4.5 — Закон дисперсии магнитоупругих волн в ферромагнитной пленке, распространяющихся в направлениях [100] (а), [101] (б), [111] (в) и [001] (г).

$0 < \theta < \theta_0$ , где

$$\theta_0 = \arcsin \frac{\Omega^2 - (\gamma H_i)^2}{(\gamma H_i)\omega_M}, \quad (4.11)$$

уравнение имеет четыре корня, а для углов  $\theta_0 < \theta < \pi/2$  – три корня. Таким образом, в этой области частот направление определяет не только величину волнового числа, но и число собственных мод. Поверхности постоянной частоты должны иметь существенные особенности в этой области, поэтому эту область следует исследовать подробно на предмет появления каустики.

Переходим непосредственно к изучению поверхностей постоянной энергии. Интерес, как и в случае бесконечного ферромагнетика, представляют  $Tm$  и  $LmT$  моды. Сначала рассмотрим изоповерхность с наибольшими величинами волнового вектора, т. е. моду  $Tm$ . При низких частотах  $\omega < \omega_1$  это практически изотропная квазиупругая поперечная мода (линия 1 на рисунке 4.6). При приближении к частоте  $\omega_1$  вблизи направления [001] появляется сильно анизотропная область: на кривых  $\omega = const$  при  $q \rightarrow 0$  начинает расти «хвост» (см. линии 2-3 на рисунок 4.6). С дальнейшим увеличением частоты этот «хвост» уходит в область намного больших волновых чисел (линии 4,5). В итоге формируется практически изотропная (квазиупругая) область вблизи  $\theta = \pi/2$  с малыми волновыми числами ( $qa \sim 10^{-4}$ ), и практически изотропная (квазимагнитная) область вблизи  $\theta = 0$  с большими волновыми числами ( $qa \sim 10^{-2}$ ). В промежуточной обла-

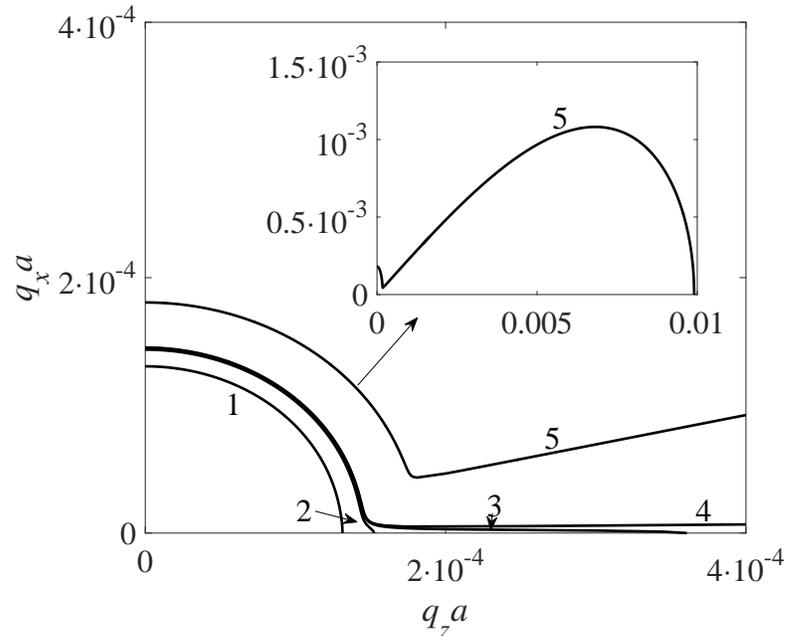


Рисунок 4.6 — Линии постоянной частоты для  $Tm$  моды. Линия 1 соответствует частоте  $0.9\omega_1$ , линия 2 —  $0.99\omega_1$ , 3 —  $0.999\omega_1$ , 4 —  $1.001\omega_1$ , 5 —  $\omega_1 + 0.1(\omega_2 - \omega_1)$ .

сти на поверхности постоянной частоты есть существенные особенности: меняется характер выпуклости, и, следовательно, появляются точки нулевой кривизны (см. линию 5 на вставке на рисунке 4.6). Таким образом, на  $Tm$  моде следует ожидать появления каустики. Однако заметим, что повышение частоты быстро смещает особенности в сторону больших волновых чисел и при  $\omega \sim \omega_2$  волновые числа оказываются порядка  $qa \sim 10^{-2} \div 10^{-1}$ , что уже не слишком хорошо удовлетворяет приближению феноменологической теории  $qa \ll 1$ . В связи с этим мы не исследовали подробно поведение каустики  $Tm$  моды, а вместо этого сконцентрировали свое внимание на моде  $LmT$ .

Все особенности  $LmT$  моды, в отличие от  $Tm$  моды, происходят в области малых  $qa$ . Соответствующие линии постоянной частоты приведены на рисунке 4.7. При малых энергиях ( $\omega < \omega_1$ ) эта ветвь закона дисперсии является практически изотропной квазиупругой продольной модой (см. линии 1,2 на рисунке 4.7). В области частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  линии постоянной частоты состоят из трех участков: на первом участке при больших углах мода остается практически изотропной квазиупругой продольной, на втором при малых углах эта мода становится практически изотропной квазиупругой поперечной, на третьем участке в окрестности угла  $\theta_0$  имеется узкая сильно анизотропная переходная область, где мода переходит из квазиупругой продольной в магнитную, а затем в квазиупругую поперечную. С увеличением частоты переходная область смещается в сторону больших углов (см. линии 3-7). В области больших частот ( $\omega > \omega_2$ ) мода быстро становится практически изотропной квазиупругой поперечной (линия 8). Заметим, что изломы, видимые на кривых на рисунке 4.7, вызваны тем, что переходные области

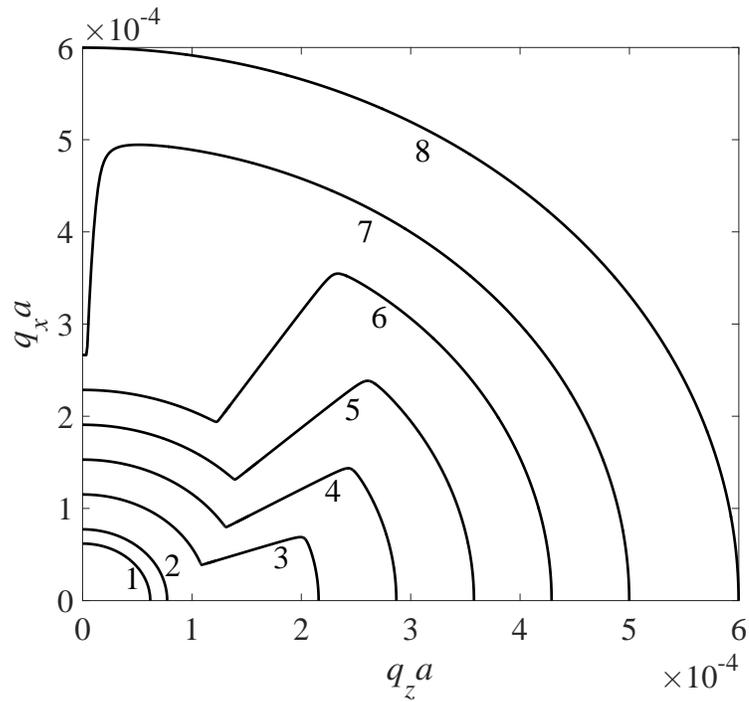


Рисунок 4.7 — Линии постоянной частоты для  $LmT$  моды. Линии 1-8 соответствуют частотам  $0.8\omega_1$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_1 + 0.2(\omega_2 - \omega_1)$ ,  $\omega_1 + 0.4(\omega_2 - \omega_1)$ ,  $\omega_1 + 0.6(\omega_2 - \omega_1)$ ,  $\omega_1 + 0.8(\omega_2 - \omega_1)$ ,  $\omega_1 + 0.9999(\omega_2 - \omega_1)$ , и  $1.2\omega_2$ .

намного более узкие по сравнению с областями справа и слева от них. Если соответствующие области построить в надлежащем масштабе, то можно убедиться в том, что все приведенные кривые являются гладкими.

В переходной области, очевидно, дважды меняется характер кривизны линии постоянной энергии. Следовательно, в области вблизи  $\theta_0$  имеются две точки нулевой кривизны, которые соответствуют каустикам магнитоупругих волн. Эти точки нулевой кривизны надежно определяются численными методами. Поскольку переходная область меняется с частотой, то меняется и направление каустики. Другими словами, направление каустики задается частотой магнитоупругой волны. Графики зависимости направления каустики от частоты приведены на рисунке 4.8. В пространстве волновых чисел эти направления оказываются очень близкими, что очевидно ввиду того, что вся переходная область узкая. Однако в пространстве групповых скоростей направления каустики оказываются хорошо разнесены. Первое из направлений каустики (линия 1) оказывается вблизи центра переходной области. В этой области направление нормали к поверхности (т. е. направление групповой скорости), оказывается практически перпендикулярно направлению волнового вектора (см. линии постоянной частоты на рисунке 4.7). Поэтому в пространстве групповых скоростей эта ветвь смещается в область  $\theta > \pi/2$  (см. рисунок 4.8б). Второе направление каустики (линия 2) оказывается близким к переходу от квазиупругой продольной моды к магнитной. При этом значении  $\theta$  угол между направлениями волнового вектора и групповой скорости оказывается малым и кривая 2 в  $V$ -пространстве

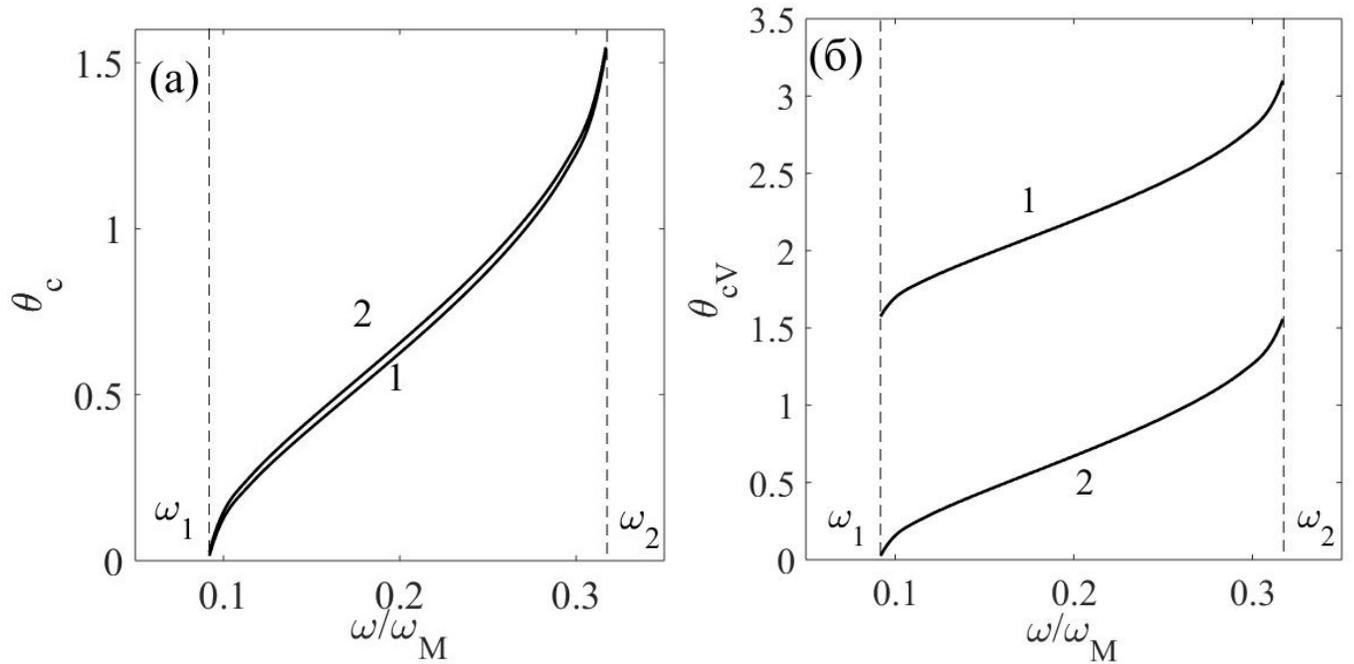


Рисунок 4.8 — Зависимости направления каустики  $LmT$  моды от частоты в  $q$ -пространстве (а) и в пространстве групповых скоростей (б).

оказывается практически такой же, как и в  $q$ -пространстве.

В окончании раздела добавим два замечания. Во-первых, коэффициент усиления определяется не только гауссовой кривизной поверхности, но и углом  $\beta$  между направлениями групповой скорости и волнового вектора:  $A = \cos \beta / (|K|q^2)$ . У нас в одной каустике (линия 1) этот угол оказался близок к  $\pi/2$  (но не равен ему в точности), а во второй каустике (линия 2) – близок к нулю. Следовательно, во второй каустике множитель  $\cos \beta$  себя проявлять не будет, а в окрестности первой существенно уменьшит коэффициент усиления. Следовательно, в системе магнитоупругих волн будет одна «сильная» каустика, и одна «слабая». Во-вторых, все проведенное в настоящей главе исследование сделано для плоскости  $\{010\}$ . Однако, как было отмечено, для упруго-изотропных сред при выбранной ориентации магнитного поля все свойства волн не зависят от азимутального угла  $\varphi$ . Следовательно, проведенные рассуждения справедливы для любой плоскости  $\varphi = const$ . В частности, вычисленные направления каустики в пространстве образуют конусы рствора  $\theta = \theta_{c1}$  и  $\theta = \theta_{c2}$ . Если в среде создать точечный источник магнитоупругих волн с нужной частотой, то  $LmT$  мода этих волн будет распространяться преимущественно по двум конусам, причем по одному из них более интенсивно, чем по другому.

### Выводы к главе 4

В главе 4 изучены магнитоупругие волны в упруго-изотропных ферромагнетиках. Характерным примером такого вещества является железо-иттриевый гранат, все магнитные и упругие характеристики которого хорошо известны. Диапазоны частот и волновых чисел магнитоупругих волн выбраны такими, при которых справедливо их феноменологическое описание. Показано, что в определенной области частот и волновых чисел эти волны обладают рядом интересных свойств. Спектр магнитоупругих волн состоит из четырех ветвей:  $mL$ ,  $LmT$ ,  $T$ ,  $Tm$ . Вдали от магнитоупругого резонанса собственные моды представляют собой магнитную моду и три упругие, из которых две являются поперечными с практически одинаковой зависимостью  $\omega(q)$  и одна продольной. Вблизи резонанса магнитная мода преобразуется в упругие, а упругие в магнитную, и фононная классификация мод оказывается некорректной. Наиболее значимые выводы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Сильные эффекты фокусировки следует ожидать у  $LmT$  и  $Tm$  мод вблизи частоты магнитоупругого резонанса.
2. В массивных образцах упруго-изотропного ферромагнетика возможна каустика магнитоупругих волн, однако область каустики оказывается достаточно узкой: ее ширина составляет порядка 0.01% от частоты резонанса.
3. В ферромагнитных образцах конечного размера – относительно толстых пластинках ( $d \sim 100$  мкм), помещенных в магнитное поле 2 кЭ, каустика реализуется в широком диапазоне  $\gamma H_0 < \omega < \gamma \sqrt{H_i(H_i + 4\pi M_0)}$ , который соответствует частотам ( $\omega/2\pi \in (0.072; 0.247)$  ГГц). В отличие от массивных образцов, здесь диапазон углов каустики оказывается довольно широким и зависит от величины внешнего магнитного поля.

Результаты по данной главе приведены в статьях [A8,A9].

## Заключение

В представленной диссертации установлены особенности поведения спиновых волн со сложными законами дисперсии. Основные результаты диссертации могут быть сформулированы следующим образом:

1. Определены особенности связанных электронно-ядерных колебаний в окрестности частот ЯМР в  $\text{MnFe}_2\text{O}_4$ . Получены зависимости собственных частот связанных колебаний электронных и ядерных спинов в ферромагнитных образцах, имеющих форму эллипсоида вращения и анизотропию типа «легкая ось», от отношения полуосей эллипсоида и величины внешнего поля. Запрещенная зона электронно-ядерных колебаний находится в диапазоне полей  $H_0 \sim 100 - 5000$  Э, если параметр формы  $\alpha$  лежит в пределах от 2 до 10, причем при сжатии сфероидального образца запрещенная зона колебаний сдвигается в сторону больших полей.
2. Исследование магнонов в ферромагнетиках с кубической решеткой и в антиферромагнетиках с ОЦТ-решеткой показало, что для положительных  $\xi = J_2/J_1$  возможна фокусировка магнонов, а для отрицательных значений  $\xi$  – их каустика. Определены зависимости границ диапазона частот каустики от величины  $\xi$ , и найдены зависимости направления каустики от частоты в плоскостях  $\{100\}$  и  $\{110\}$ . Показано, что направление каустики заключено между характерными направлениями кристаллической решетки и является монотонной функцией частоты. Определено, что в ОЦТ и ОЦК решетках существует только одно направление каустики. В простой кубической и ГЦК решетках при предельных значениях  $\xi$  существует диапазон частот с одним направлением каустики и диапазон с тремя направлениями каустики. Определены зависимости этих диапазонов от величины  $\xi$ .
3. Определено, что для  $\text{EuO}$  и  $\text{MnF}_2$ , имеющих положительное отношение обменных постоянных  $\xi = J_2/J_1$ , эффекты фокусировки проявляются слабо, а для  $\text{EuS}$  ( $\xi < 0$ ), эффекты фокусировки значительны. Обнаружено, что в узкой области частот для волновых векторов вблизи границы зоны Брюллиэна возможна каустика магнонов: характерные частоты каустики для  $\text{EuS}$  составляют порядка 100 ГГц, а характерные длины волн имеют порядок  $10^{-6}$  см.
4. Установлено, что взаимодействие магнитной и упругой подсистем в железо-иттриевом гранате может приводить к возникновению каустики магнитоупругих волн. В массивных образцах каустика реализуется только в узкой области частот вблизи магнитоупругого резонанса. Характерные частоты магнитоупругих волн в ЖИГе составляют порядка 2.8 ГГц при внешнем поле 1 кЭ, ширина области каустики около 0.28 МГц, а характерные длины волн —

$10^{-4} - 10^{-3}$  см. В ферромагнитных пленках диапазон частот каустики оказывается достаточно широким ( $\omega/2\pi \in (0.072; 0.247)$  ГГц при  $H_0 = 2$  кЭ).

Работа была поддержана договором министерства образования и науки России (тема «Функция» №АААА-А19-119012990095-0), проектами УрО РАН №18-10-2-37 и №14.Z50.31.0025, грантом РФФИ №18-32-00139.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору А.П.Танкееву и старшему научному сотруднику лаборатории кинетических явлений С.М.Бахареву за обсуждение полученных научных результатов и помощь при оформлении диссертации.

### Список работ автора

- A1. Борич, М.А. Связанные магнитостатические электронно-ядерные колебания в магнитных материалах [Текст]/ Борич М.А., Савченко С.П., Танкеев А.П. // ФТТ. — 2019. — т. 61. — с. 62—71.
- A2. Borich, M.A. Degenerated nuclear magnetostatic modes in ferromagnets [Текст]/ M.A.Borich, S.P. Savchenko, A.P.Tankeyev // Magn. Reson. Solids. — 2018. — V. 20. — P. 18104—18111.
- A3. Бахарев, С.М. Особенности фокусировки спиновых волн в кристаллах EuO и EuS [Текст]/ Бахарев С.М., Савченко С.П., Танкеев А.П. // ФТТ. — 2019. — т. 61. — с. 257—266.
- A4. Бахарев, С.М. Особенности фокусировки спиновых волн в ферромагнетиках [Текст]/ С.М. Бахарев, С.П. Савченко, А.П. Танкеев // ФТТ — 2018. — V. 60. — P. 2358—2369.
- A5. Bakharev, S.M. Focusing and caustic of spin waves in antiferromagnetic crystals with BCT lattice [Текст]/ S.M.Bakharev, M.A.Borich, S.P.Savchenko // J. Magn. Magn. Mat. — 2019. — V.487 — 165294.
- A6. Бахарев, С.М. Фокусировка и каустика магнонов в ферромагнитных полупроводниках с ГЦК структурой [Текст]/ С.М.Бахарев, С.П.Савченко, А.П.Танкеев // Известия РАН. Серия физическая. — 2019. — т. 83, с. 904—906.
- A7. Bakharev, S.M. Magnon caustics in face centered cubic ferromagnets [Текст]/ S.M.Bakharev, M.A. Borich, S.P.Savchenko // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — V.1389 — P.012154.
- A8. Bakharev, S.M. Features of focusing magnetoelastic waves in YIG crystals [Текст]/ S.M.Bakharev, M.A.Borich, S.P.Savchenko // J. Phys.: Conf. Ser. — 2019. — V.1389 — 012096.
- A9. Bakharev, S.M. Caustic of magnetoelastic waves in elastically isotropic ferromagnets [Текст]/ S.M. Bakharev, M.A.Borich, S.P.Savchenko // J. Magn. Magn. Mat. — 2021. — V.530. — 167862.

A10. Бахарев, С.М. Фокусировка спиновых волн в кубических ферромагнетиках / С.М.Бахарев, А.П.Танкеев, С.П.Савченко // Международная зимняя школа физиков-теоретиков «КОУРОВКА-XXXVII», «Гранатовая бухта», Верхняя Сысерть, 25 февраля– 3 марта 2018: Тез.докл.—Екатеринбург:ИФМ УрО РАН.– с. 47

A11. Савченко, С.П. Электронно-ядерные магнитостатические моды в магнитоупорядоченных кристаллах. Микромагнитная структура динамического сдвига частоты ЯМР / С.П.Савченко, М.А.Борич, А.П.Танкеев // Международная зимняя школа физиков-теоретиков «КОУРОВКА-XXXVII», «Гранатовая бухта», Верхняя Сысерть, 25 февраля– 3 марта 2018: Тез.докл.— Екатеринбург:ИФМ УрО РАН.– с. 56

A12. Bakharev, S.M. Caustic of the spin waves in ferromagnets / S.M.Bakharev, S.P.Savchenko, A.P.Tankeyev // International Symposium Spin Waves 2018, St. Petersburg, 3-8 июня, 2018: Тез.докл.-St. Petersburg:Ioffe Institute.- с. 113

A13. Савченко, С.П. Фокусировка магнонов в альфа-железе / Бахарев С.М., Савченко С.П., Танкеев А.П. // Байкальская международная конференция Магнитные материалы. Новые технологии (ВМСММ-2018), г.Иркутск 24-28 августа 2018: Тез.докл.-Иркутск:ИГУ.-с.164

A14. Савченко, С.П. Фокусировка магнонов в кобальте и никеле / Бахарев С.М., Савченко С.П., Танкеев А.П. // VIII международная научная конференция Актуальные проблемы физики твердого тела (ФТТ-2018), г.Минск 24-28 сентября 2018 г.:Сб.докл.-Минск:НПЦ НАН Беларуси по материаловедению.-Т.1.- с.141

A15. Борич, М.А. Особенности связанных магнитостатических колебаний в магнитоупорядоченных веществах / М.А.Борич, С.П.Савченко, А.П.Танкеев // XXIII Международная конференция Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-XXIII), Москва, МИРЭА – Российский технологический университет, 30 июня – 5 июля 2018: Список трудов.-Москва: МИРЭА – Российский технологический университет – с.330

A16. Савченко, С.П. ЯМР и магнитостатические волны в магнитных материалах / М.А.Борич, С.П.Савченко, А.П.Танкеев // XXIII Международная конференция Новое в магнетизме и магнитных материалах (НМММ-XXIII), Москва, МИРЭА – Российский технологический университет, 30 июня – 5 июля 2018: Список трудов.-Москва: МИРЭА – Российский технологический университет – с.387

A17. Борич, М.А. Degenerated nuclear magnetostatic modes in ferromagnets / М.А.Борич,

С.П.Савченко // VII Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism» (EASTMAG-2019), Екатеринбург, ИФМ УрО РАН, 8-13 сентября 2019: Book of abstracts V.1.- p.152

A18. Савченко, С.П. Magnon caustics in face centered cubic ferromagnets / С.М.Бахарев, М.А.Борич, С.П.Савченко // VII Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism» (EASTMAG-2019), Екатеринбург, ИФМ УрО РАН, 8-13 сентября 2019: Book of abstracts V.1.- p.177

A19. Бахарев, С.М. Features of focusing magnetoelastic waves in YIG crytals / С.М.Бахарев, М.А. Борич, С.П.Савченко // VII Euro-Asian Symposium «Trends in MAGnetism» (EASTMAG-2019), Екатеринбург, ИФМ УрО РАН, 8-13 сентября 2019: Book of abstracts V.1.- p.531

A20. Савченко, С.П. Amplification of nuclear magnetostatic oscillations in ferromagnets / С.П.Савченко, М.А.Борич // XXI International Youth Scientific School “Actual problems of magnetic resonance and its application”, Казань, КФУ, 23-27 сентября 2019: Book of abstracts.- p.194

A21. Bakharev, S.M. Magnon caustic in antiferromagnetic crystals with BCT lattice / S.M.Bakharev, M.A.Borich, S.P.Savchenko // Sol-SkyMag 2019 San Sebastian, Spain – June 24th - June 28th, 2019: Book of abstracts.- p.87

A22. Савченко, С.П. Электронно-ядерные магнитостатические моды в магнитоупорядоченных кристаллах / С.П.Савченко, М.А.Борич, А.П.Танкеев // XVIII Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС-18), Екатеринбург, 16-23 ноября, 2017: Тез.докл.-Екатеринбург:ИФМ УрО РАН.- с.60

A23. Савченко, С.П. Фокусировка магнонов в дифториде марганца / С.М.Бахарев, М.А.Борич, С.П.Савченко, А.П.Танкеев. // XIX Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества памяти Танкеева А.П. (СПФКС-19) , Екатеринбург, 15-22 ноября, 2018: Тез.докл.-Екатеринбург:ИФМ УрО РАН.- с.70

A23. Савченко, С.П. Фокусировка электронно-ядерных спиновых волн в феррите марганца/ С.П.Савченко, М.А.Борич // XX Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС-20) , Екатеринбург, 21-28 ноября , 2019: Тез.докл.- Екатеринбург:ИФМ УрО РАН.- с.125

## Список литературы

- [1] Ландау, Л. Д. Собрание трудов. Том 1 [Текст]/ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц (ред).— М.:Наука, 1987.— 199 с.
- [2] Griffiths, J.H.E. Anomalous High-frequency Resistance of Ferromagnetic Metals [Текст] / J.H.E.Griffits // Nature.— 1946. — Vol.158. — P.670–671.
- [3] Ахиезер, А.И. Спиновые волны [Текст] / А.И.Ахиезер, В.Г.Барьяхтар, С.В.Пелетминский. — М.:Наука, 1967. — 368 с.
- [4] Такер, Дж. Гиперзвук в физике твердого тела [Текст] /Дж. Такер, В.Рэмптон. — М.:Мир, 1975. — 453 с.
- [5] Влияние взаимодействия подсистем на динамические свойства магнетиков [Текст] / И.В.Бычков, Д.А.Кузьмин, В.Д.Бучельников, В.Г.Шавров. — М.:Физматлит, 2016. — 174 с.
- [6] Шавров, В.Г. Связанные волны в магнетиках [Текст] / В.Г. Шавров , В.Д. Бучельников, И.В. Бычков. — М.:Физматлит, 2019. — 476 с.
- [7] Туров, Е.А. Ядерный магнитный резонанс в ферро- и антиферромагнетиках [Текст] / Туров Е.А., Петров М.П. — М.:Наука, 1969. — 261 с.
- [8] Magnetic Materials Analyses by Nuclear Spectrometry: A Joint Approach to Mössbauer Effect and Nuclear Magnetic Resonance [Текст] / D. Feldmann, H.R. Kirchmayr, A. Schmolz, M. Velicesku // IEEE Transact. Magn. — 1971. — V.7 №1. — P.61-91.
- [9] Tsifrinovich, V.I. Dynamic shift of the frequency of a quadrupole-split NMR spectrum [Текст] / V.I. Tsifrinovich // Sov. Phys. JETP. — 1987. — V.65, №4. — P.783-786.
- [10] Куркин, М.И. ЯМР в магнитоупорядоченных веществах и его применения [Текст] /М.И. Куркин , Е.А. Туров — М.:Наука, 1990. — 244 с.
- [11] Ядерная магнитная релаксация, наведенная релаксацией электронных спинов [Текст] / М. А. Борич, Ю. М. Буньков, М. И. Куркин, А. П. Танкеев // Письма в ЖЭТФ. — 2017. — Т.105 №1. — С.23–27.

- [12] Гуревич, А.Г. Магнитные колебания и волны [Текст] / А.Г.Гуревич, Г.А.Мелков. — М.:Физматлит, 1994. — 464 с.
- [13] Борич, М.А. Нелинейные волны в магнитных пленках и слоистых структурах: распространение и взаимодействие дис. ... канд.физ. - мат.наук: 01.04.07 — Екатеринбург, 2005. — 137 с.
- [14] Non-linear spin dynamics in ferromagnetic films and Schrodinger's equation in the vicinity of zero-dispersion point [Текст] / Kiselev V.V., Tankeyev A.P., Kobelev A.V., Shagalov A.G. // J.Phys.: Condens. Mat. — 1999. — V.11. — P.3461-3474.
- [15] Магнитостатические солитоны Потасака-Табора в слоистой структуре ферро-магнетик-диэлектрик-металл [Текст] / Танкеев А. П., Шагалов А. Г., Борич М. А., Смагин В. В. // ФММ. — 2002. — Т.93, №6 — С. 29—40.
- [16] Эволюция солитонов огибающей объемных магнитостатических волн в структуре ферромагнетик-диэлектрик-металл / Танкеев А. П., Шагалов А. Г., Борич М. А., Смагин В. В. // ФММ. — 2003. — Т.95, №1 — С.10—20.
- [17] Evolution of the surface magnetostatic wave envelope solitons in a ferromagnet–dielectric–metal structure [Текст] / M.A. Borich, A.V. Kobelev, V.V. Smagin, A.P. Tankeyev. // J. Phys.: Condens. Matter. — 2003. — V.15 №49. — P.8543-8559.
- [18] Perturbation of magnetostatic modes observed by ferromagnetic resonance force microscopy [Текст] / R. Urban, A. Putilin, P.E. Wigen, S.-H. Liou, M.C. Cross, P.C. Hammel, M.L. Roukes // Phys. Rev. B. — 2006. — V.73. — P.212410.
- [19] Смагин, В.В. Нелинейная динамика магнитных пленок и магнитных слоистых структур: дис. ... канд.физ. - мат.наук: 01.04.07 — Екатеринбург, 2006. — 151 с.
- [20] Microwave magnetostatic delay line. [Текст] / Han Shi-ying, Liu Gong-qiang, Liu Ji-zhe, Yang Gui-lin and Zhai Hong-ru // J. Magn. Magn. Mat — 1981. — V.23. — P.209.
- [21] Taylor, B. PHONON FOCUSING IN SOLIDS [Текст] / B. Taylor, H.J. Maris, and C. Elbaum // Phys. Rev. Lett. — 1969. — V.23 №8. — P.416-419.
- [22] Taylor, B. Focusing of Phonons in Crystalline Solids due to Elastic Anisotropy [Текст] / B. Taylor, H.J. Maris, C. Elbaum // Phys. Rev. B. — 1971. — V.3 №4. — P.1462.
- [23] Jasiukiewicz, Cz. Phonon focussing patterns: Calculation of response of finite area detectors to pulsed ballistic beams of dispersive and dispersionless phonons [Текст] / Cz. Jasiukiewicz, T. Paszkiewicz, D. Lehmann // Z. Phys. B Condens. Matter. — 1994. — V.96 №2. — P.213.

- [24] Held, E. Imaging of crystal defects with ballistic phonons and their three-dimensional reconstruction using digital image processing [Текст] / E. Held, W. Klein, R.P. Huebener. // Z. Phys. B Condens. Matter. — 1989. — V.75 №2. — P.223-234.
- [25] Philipp, J. Phonon magnification in cubic crystals [Текст] / J. Philip, K.S. Viswanathan // Phys. Rev. B. — 1978. — V.17 №12. — P.4969-4978.
- [26] Lax, M. Phonon magnification and the Gaussian curvature of the slowness surface in anisotropic media: Detector shape effects with application to GaAs [Текст] / M. Lax, V. Narayanamurti // Phys. Rev. B. — 1980. — V.22 №11 — P.4876.
- [27] Northrop, G.A. Ballistic phonon imaging in germanium [Текст] / G.A. Northrop, J.P. Wolfe // Phys. Rev. B. — 1980. — V.22 №12 — P.6196-6212.
- [28] Spencer, E.G. Temperature Dependence of Microwave Acoustic Losses in Yttrium Iron Garnet [Текст] / E.G. Spencer, R.T. Denton, R.P. Chambers // Phys. Rev. — 1962. — V.125 №6. — p.1950.
- [29] Mason, W.P. Physical acoustics. Vol. III. Part B: Principles and Methods, Lattice Dynamics. [Текст] / Mason W.P., Thurston R.N.— New York and London: Academic press. — 1968. — p. 127-199
- [30] W.P.Mason Physical acoustics. Vol. IV. Part B: Principles and Methods, Applications to Quantum and Solid State Physics. [Текст] / Mason W.P., Thurston R.N.— New York and London: Academic press. — 1968. — p. 211-264
- [31] Кулеев, И.Г. Коэффициенты усиления потока фононов в кристаллах с различным типом анизотропии упругой энергии [Текст] / И.Г. Кулеев, С.М. Бахарев // ФТТ. — 2018. — Т.60 №7. — С.1260-1269.
- [32] Фокусировка фононов и фононный транспорт в монокристаллических наноструктурах [Текст] / И.Г. Кулеев, И.И. Кулеев, С.М. Бахарев, В.В. Устинов – Екатеринбург: УрО РАН, 2018. – 256 с.
- [33] The influence of phonon focusing on density of states and the Knudsen phonon gas flow in nanowires with different types of anisotropy of elastic energy [Текст] / I.I. Kuleyev, S.M. Bakharev, I.G. Kuleyev, V.V. Ustinov // Phys. Status Solidi C. — 2017. — V.14. — P.1600263.
- [34] Влияние фокусировки фононов на кнудсеновское течение фононного газа в монокристаллических нанопроводах из материалов спинтроники [Текст] / И.Г. Кулеев, И.И. Кулеев, С.М. Бахарев, В.В. Устинов // ФММ. — 2017. — Т.118 №1. — С.12-22.

- [35] Spatial and spatiotemporal self-focusing of spin waves in garnet films observed by space- and time-resolved Brillouin light scattering [Текст] / O. Büttner, M. Bauer, S. O. Demokritov, B. Hillebrands, Yu. S. Kivshar, V. Grimalsky, Yu. Rapoport, M. P. Kostylev, B. A. Kalinikos and A. N. Slavin // J. Appl. Phys. — 2000. — V.87. — P.5088-5090.
- [36] Self-focusing of spin waves in Permalloy microstripes [Текст] / Vladislav E. Demidov, Sergej O. Demokritov, Karsten Rott, Patryk Krzysteczko, and Guenter Reiss // Appl. Phys. Lett. — 2007. — V.91. — P.252504.
- [37] Veerakumar, V. Magnon focusing in thin ferromagnetic films [Текст] / V. Veerakumar and R. E. Camley // Phys. Rev. B. — 2006. — V.74. — P.214401.
- [38] Veerakumar, V. Magnetostatic bulk and surface spin-wave focusing in antiferromagnetic thin films [Текст] / V. Veerakumar and R. E. Camley // Phys. Rev. B. — 2010. — V.81. — P.174432.
- [39] Bible, J. J. Focusing of high-wave-vector magnons. [Текст] / J. J. Bible and R. E. Camley. // Phys. Rev. B. — 2017. — 95. — P.224412.
- [40] Perez, N. Magnetic field induced spin-wave energy focusing. [Текст] / Noel Perez and Luis Lopez-Diaz // Phys. Rev. B. — 2015. — V.92. — P.014408.
- [41] Вонсовский, С.В. Магнетизм Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро- и ферримагнетиков [Текст] / С.В.Вонсовский. — М.:Наука, 1971.— 1032 с.
- [42] Кухаркин Е.С. Основы инженерной электрофизики. Часть 1. Основы технической электродинамики [Текст] / Е.С.Кухаркин М.:Высшая школа. — 1969. — 510 с.
- [43] Барьяхтар, В.Г. Магнитоупругие колебания в ферромагнетике кубической симметрии.[Текст] / В.Г. Барьяхтар, А.Г. Данилевич // ФНТ. — 2017. — Т.43 № 3. — С.430–440.
- [44] Смоленский, Г.А. Физика магнитных диэлектриков [Текст] / Г.А.Смоленский, — М.:Наука, 1974. — 457 с.
- [45] Александров, И.В. Теория ядерного магнитного резонанса [Текст] / И.В.Александров. — М.:Наука, 1964. — 208 с.
- [46] Садыков, А.Ф. Магнитные структуры низкоразмерных соединений  $\text{LiCu}_2\text{O}_2$  и  $\text{NaCu}_2\text{O}_2$ : дис. ... канд.физ.-мат.наук: 01.04.11 — Екатеринбург, 2019. — 137 с.
- [47] Смольников, А.Г. Сверхтонкие взаимодействия и магнитный порядок в мультиферроике  $\text{CuCrO}_2$  по данным ядерного магнитного резонанса: дис. ... канд.физ.-мат.наук: 01.04.11 — Екатеринбург, 2019. — 123 с.

- [48] Пискунов, Ю.В. Ядерный магнитный резонанс в сверхпроводящих оксидных соединениях с лестничной и перовскитной структурами: дис. ... д-ра физ.-мат.наук: 01.04.07 — Екатеринбург, 2020. — 275 с.
- [49] Абрагам, А. Ядерный магнетизм [Текст] / А.Абрагам. — М.:Издательство иностранной литературы, 1963. — 551 с.
- [50] Сликтер, Ч. Основы теории магнитного резонанса [Текст] / Ч.Сликтер. — М.:Мир, 1981. — 448 с.
- [51] Woodgate, G.K. Elementary Atomic Structure [Текст] / G.K.Woodgate. — Oxford: Clarendon Press, 1970. — 228 p.
- [52] Blocker, T.G. Coupled Electron-Nuclear Magnetostatic Modes in Magnetic Materials [Текст] / T.G. Blocker // Phys. Rev. — 1967. — V.154 №2. — P.446-447.
- [53] Шавров, В.Г. Магнитостатические волны в неоднородных полях [Текст] / Шавров В.Г., Щеглов В.И. — М.:Физматлит, 2016. — 253 с.
- [54] Шавров, В.Г. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах [Текст] / Шавров В.Г., Щеглов В.И. — М.:Физматлит, 2016. — 358 с.
- [55] Лакс, Б. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримангнетики [Текст] / Б.Лакс, К.Баттон // М.:Мир, 1965. — 675 с.
- [56] Веeman, D.E. Magnetostatic Modes in the Canted Antiferromagnet  $MnCO_3$  [Текст] / D.E. Веeman, H.J. Fink, D. Shaltiel // Phys. Rev. — 1966. — V.147 №2. — P.454-457.
- [57] Nuclear Magnetic Resonance Modes in Magnetic Material. I. Theory [Текст] / P.G. de Gennes, P.A. Pincus, F. Hartman-Boutron, G.M. Winter // Phys. Rev. — 1963. — V.129. №3. — P.1105-1115.
- [58] King, A.R. Nuclear Magnons and Nuclear Magnetostatic Modes in  $MnF_2$  [Текст] / A.R. King, V. Jaccarino, S.M. Rezende // Phys. Rev. Lett. — 1976. — V.37 №9. — P.533-536.
- [59] Вонсовский, С.В. Ферромагнитный резонанс [Текст] / С.В.Вонсовский (ред.) — М.:Физматлит, 1961) — 344 с.
- [60] Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа: Пер. с англ. В 2-х частях. Ч. 2 [Текст] / Э.Т.Уиттекер, Дж.Л.Ватсон. — М.:ФМЛ, 1963. — 516 с.
- [61] Walker, L.R. Magnetostatic Modes in Ferromagnetic Resonance [Текст] / L.R. Walker // Phys. Rev. — 1957. — V.105. — P.390-399.

- [62] Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках [Текст] / Гуревич А.Г. — М.:Наука, 1973. — 588 с.
- [63] Yalchin, O. Ferromagnetic Resonance—Theory and Applications [Текст] / Yalchin, O. — InTech, 2013. — 247 p.
- [64] Layadi, A. A theoretical investigation of Ferromagnetic Resonance Linewidth and damping constants in coupled trilayer and spin valve systems [Текст] / A. Layadi. / AIP Adv. — 2015. — V.5 №5. — P.057113.
- [65] Исследование спинтронного материала EuO:Fe методом мессбауэровской спектроскопии [Текст] / А. С. Борухович, Н. И. Игнатъева, К. И. Янушкевич, А. И. Стогний, Ю.А.Федотова // Письма в ЖЭТФ. — 2009. — Т.89 №4. — 215–217.
- [66] Borukhovich, A.S. Europium Monoxide Semiconductor and Ferromagnet for Spintronics. [Текст] / A.S. Borukhovich, A.V. Troshin // Springer Series in Materials Science. — 2018. — V.265. — P.121–138.
- [67] Нагаев, Э.Л. Ферромагнитные и антиферромагнитные полупроводники [Текст] / Э.Л. Нагаев // УФН. — 1975. — Т.117 №3. — С.437-492.
- [68] Passel, L. Neutron scattering from the Heisenberg ferromagnets EuO and EuS. I. The exchange interactions [Текст] / L. Passell, O.W. Dietrich, J. Als-Nielsen // Phys. Rev. B. — 1976. — V.14 №11. — P.4897-4907.
- [69] Dietrich, O.W. Spin-wave analysis of specific heat and magnetization in EuO and EuS [Текст] / O.W. Dietrich, A.J. Henderson, H. Meyer // Phys. Rev. B. — 1975. — V.12 №7. — P.2844-2855.
- [70] Илуэлл, Д. Магнитные полупроводники [Текст] / Д. Илуэлл, И. Остин // УФН. — 1972. — Т.106 №2.— С.337-360.
- [71] Holstein, T. Field Dependence of the Intrinsic Domain Magnetization of a Ferromagnet [Текст] / T.Holstein, H.Primakoff // Phys. Rev. — 1940. — V. 58, № 12. — P. 1098–1113.
- [72] Ab initio calculations of exchange interactions, spin-wave stiffness constants, and Curie temperatures of Fe, Co, and Ni [Текст] / M.Pajda, J.Kudrnovsky, I.Turek, V.Drchal and P.Bruno // Phys. Rev. B. — 2001. — V.64 — P.174402.
- [73] Endon, Y. Magnetic Excitations in Metallic Ferro- and Antiferromagnets [Текст] / Yasuo Endon and Peter Boni // J. Phys. Soc. Jpn. — 2006. — Nov. — V.75, № 11. — P.111002
- [74] Maris, H.J. Enhancement of Heat Pulses in Crystals due to Elastic Anisotropy [Текст] / H.J. Maris // J. Acoust. Soc. Am. — 1971. — V.50 №3 — P.812-818.

- [75] Every A.G. Ballistic phonons and the shape of the ray surface in cubic crystals [Текст] / A.G. Every // Phys. Rev. B. — 1981. — V.24 №6 — P.3456-3467.
- [76] Kasuya, T. Exchange Mechanisms in Europium Chalcogenides [Текст] / T. Kasuya // IBM J. Res. Dev. — 1970. — V.14 №3. — P.214-223.
- [77] Stremper, J. Absolute Spin Magnetic Moment of  $\text{FeF}_2$  from High Energy Photon Diffraction [Текст] / J.Stremper, U.Rutt, W.Jauch // Phys. Rev. Lett. — 2001. — V. 86 № 1. — P. 3152-3155.
- [78] Magnetic properties of transition metal fluorides  $\text{MF}_2$  ( $M=\text{Mn, Fe, Co, Ni}$ ) via high-energy photon diffraction [Текст] / J.Stremper, U. Rutt, S.Bayrakci, Th. Bruckel, W. Jauch // Phys. Rev. B. — 2004. — V.69 №1. — P. 014417.
- [79] Алиханов, Р.А. Антиферромагнетизм  $\text{NiF}_2$  [Текст] / Р.А. Алиханов // ЖЭТФ. — 1960 — Т.37 Вып.4. — С.1145
- [80] Ab initio study of  $\text{MF}_2$  ( $M=\text{Mn, Fe, Co, Ni}$ ) rutile-type compounds using the periodic unrestricted Hartree-Fock approach [Текст] / Iberio de P. R. Moreira, Roberto Dovesi, Carla Roetti, Victor R. Saunders, and Roberto Orlando // Phys.Rev.B. — 2000. — 62 №12. — P.7816
- [81] Jungfleisch, M.B. Perspectives of antiferromagnetic spintronics [Текст] / M.B.Jungfleisch, W.Zhang, and A.Hoffmann // Phys. Lett. A. — 2018. — V.382 №13.— P.865-871.
- [82] Симметрия и физические свойства антиферромагнетиков [Текст] / Е.А.Туров, Е.А.Туров, А.В.Колчанов, В.В.Меньшенин, И.Ф.Мирсаев, В.В.Николаев — М.:Физматлит (2001) — 560 с.
- [83] Туров, Е.А. Спиновая динамика магнетиков с учетом магнито- и антиферроэлектрического взаимодействий. Антимагноны. ЯМР в электрическом поле. [Текст] / Е.А.Туров. — Екатеринбург: издательство УрО РАН, 2001. — 83 с.
- [84] Yamani, Z. Neutron scattering study of the classical antiferromagnet  $\text{MnF}_2$ : a perfect hands-on neutron scattering teaching course [Текст] / Z. Yamani, Z. Tun, and D.H. Ryan. // Can. J. Phys. — 2010. — V.88 №10. — P.771-797
- [85] Antiferromagnetic resonance in  $\text{MnF}_2$  over wide ranges of frequency and magnetic field [Текст] / M. Hagiwara, K. Katsumata, I. Yamada, and H. Suzuki // J. Phys. Condens. Matter. — 1996. — V.8 №39. — P.7349-7354
- [86] Lockwood, D. J. Light scattering from magnons in  $\text{MnF}_2$  [Текст] / D. J. Lockwood and M. G. Cottam // Phys. Rev. B. — 1987. — V.35 №4. — P.1973-1982

- [87] Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел [Текст] / Ч.Киттель. — М.:Наука, 1967. — 492 с.
- [88] Nagai, O. Spin Waves in  $MnF_2$  and the Inelastic Scattering of Neutrons [Текст] / O. Nagai and A. Yoshimori // Progress of Theoretical Physics. — 1961. — V.25 №4 — P.595-602.
- [89] Туров, Е.А. О спектре колебаний ферромагнитной упругой среды [Текст] / Туров Е.А., Ирхин Ю.П. // ФММ. — 1956. — Т.3 №1. — С.15
- [90] Ахиезер, А.И. Связанные магнитоупругие волны в ферромагнетиках и ферроакустический резонанс [Текст] / Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. // ЖЭТФ. — 1958. — Т.35 №1. — С.228
- [91] Kittel, C. Interaction of Spin Waves and Ultrasonic Waves in Ferromagnetic Crystals [Текст] / C.Kittel // Phys.Rev. — 1958. — V.110 №4. — P.836
- [92] Пелетминский, С.В. Связанные магнитоупругие колебания в антиферромагнетиках [Текст] / С.В. Пелетминский // ЖЭТФ. — 1959. — Т.37 №2. — С.452
- [93] Власов, К.Б. Связанные магнитоупругие волны в анизотропных ферродиелектриках [Текст] / К.Б. Власов // ФММ. — 1965. — Т.20. — С.3-11.
- [94] Lord, A.E. Sound Wave Attenuation Due to the Magnon-Phonon Interaction [Текст] / A.E.Lord // Phys. Condens. Materie. — 1968. — V.7. — P.232-247.
- [95] Clark, A.E. Elastic Constants of Single-Crystal YIG [Текст] / A.E. Clark, R.E. Strakna // Journ. Appl. Phys. — 1961. — V.32 №6. — P.1172-1173.
- [96] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики.[Текст] / Тихонов А. Н., Самарский А. А. М.: Наука, 1977. — 735 с.
- [97] Вонсовский, С. В. Ферромагнетизм.[Текст] / Вонсовский С. В., Шур Я. Н. М.-Л.:Гостехиздат, 1948. — 816 с.
- [98] Wolfle, J.P. Imaging Phonons (Acoustic Wave Propagation in Solids) [Текст] / Wolfe J.P. — N.Y. Cambridge University Press, 1998. — 411 p.
- [99] Погорелов, А.В. Дифференциальная геометрия [Текст] / А.В.Погорелов. — М.:Наука, 1974. — 176 с.
- [100] Арнольд, В.И. Теория катастроф [Текст] / Арнольд В.И. — М.:Наука, 1990 — 128 с.

## Приложение А. Уравнения магнитостатики

### Формулы Грина

Приложение представляет собой математическое отступление. Здесь сформулированы некоторые полезные свойства решения уравнения Пуассона. Эти свойства позволяют ввести эффективное внутреннее поле и описать магнитное дипольное взаимодействие наиболее простым образом. Начнем с вывода первой и второй формул Грина. Для этого рассмотрим произвольное векторное поле  $\mathbf{F}$  внутри области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ . В соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{F})dV = \oint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}). \quad \text{A.1}$$

Далее, пусть поле  $\mathbf{F}$  имеет специальный вид:  $\mathbf{F} = \psi \nabla \phi$ , тогда  $(\nabla \cdot \mathbf{F}) = (\nabla \psi \cdot \nabla \phi) + \psi \nabla^2 \phi$ , скалярное произведение  $(\nabla \phi \cdot \mathbf{dS})$  на границе выражается через производную по внешней нормали  $(\nabla \phi \cdot \mathbf{dS}) = \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$ , и

$$\int_V ((\nabla \psi \cdot \nabla \phi) + \psi \nabla^2 \phi) dV = \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad \text{A.2}$$

Полученное выражение носит название первой формулы Грина [96]. Первая формула Грина несимметрична, обычно более удобно пользоваться ее симметричной версией. Пусть поле  $\mathbf{F}$  имеет вид

$$\mathbf{F} = \psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi, \quad (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi. \quad \text{A.3}$$

Для этого поля из теоремы Остроградского-Гаусса получаем вторую формулу Грина:

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad \text{A.4}$$

### Решение уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\nabla^2 u = f. \quad \text{A.5}$$

Соответствующее уравнение на функции Грина

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{A.6}$$

имеет решение

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad \text{A.7}$$

Умножая уравнение A.5 на  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , а A.7 на  $-u(\mathbf{r})$ , получим

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla^2 u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - u(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad \text{A.8}$$

Интегрируем по  $\mathbf{r}'$  и используем вторую формулу Грина:

$$\oint_S \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u}{\partial n'} - u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dS' = \int_V f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' - u(\mathbf{r}), \quad \text{A.9}$$

откуда

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\nabla' u}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - u(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{S}' \quad \text{A.10}$$

– решение уравнения Пуассона. Если функция  $f(\mathbf{r})$  – правая часть уравнения Пуассона, известна, и известно значение функции  $u(\mathbf{r})$  на границе  $S$ , то можно определить  $u(\mathbf{r})$  во всем пространстве внутри  $V$ . В дальнейшем используем это свойство решений уравнения Пуассона при рассмотрении уравнений магнитостатики и магнитного дипольного поля.

Это свойство решения уравнения Пуассона оказывается полезным для решения уравнений магнитостатики, и играет важную роль в макроскопическом описании магнитного дипольного взаимодействия.

### Уравнения магнитостатики

Пусть поле  $\mathbf{H}^m$  внутри ферромагнетика удовлетворяет уравнениям магнитостатики

$$[\nabla \times \mathbf{H}^m] = 0, \quad (\nabla \cdot (\mathbf{H}^m + 4\pi\mathbf{M})) = 0. \quad \text{A.11}$$

Первое уравнение имеет решение  $\mathbf{H}^m = -\nabla\phi$ , а второе превращается в уравнение Пуассона

$$\nabla^2\phi = 4\pi(\nabla \cdot \mathbf{M}), \quad \text{A.12}$$

общее решение которого, в соответствии с результатами предыдущего параграфа, имеет вид:

$$\phi(\mathbf{r}) = -\int_V \frac{(\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\nabla\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \phi(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{S}'. \quad \text{A.13}$$

Последний интеграл после нескольких интегральных преобразований, учитывающих соотношения А.11, сводится к  $\oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ , и окончательно

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{(\nabla' \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \oint_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad \text{A.14}$$

Формулу А.14 можно объяснить из простых соображений [97]. Диполь с магнитными зарядами  $+m$  и  $-m$ , расположенными в точках  $\mathbf{r}'_+$ ,  $\mathbf{r}'_-$  ( $\mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}'_- = \mathbf{l}$ ) создает в достаточно удаленной точке  $\mathbf{r}$  потенциал

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{m}{|\mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}|} - \frac{m}{|\mathbf{r}'_- - \mathbf{r}|} \approx \mu_0 \frac{\cos(\mathbf{l}, \mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} = \frac{(-\mu_0 \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}))}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = \left( \mu_0 \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right), \quad \text{A.15}$$

где ( $\mu_0 = m\mathbf{l}$ ). Тогда для потенциала, создаваемого распределенной плотностью магнитных моментов, получим

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V \left( \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) d\mathbf{r}', \quad \text{A.16}$$

откуда используя теорему Остроградского-Гаусса получаем формулу А.14. Заметим, что разность А.14 и А.13 составляет

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \phi(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) d\mathbf{S}'. \quad \text{A.17}$$

Последний интеграл должен обратиться в нуль в силу граничных условий магнитостатики. Возможно следующее доказательство этого факта. Прежде всего, заметим, что выражение для решения уравнения Пуассона А.10, и соответственно А.13, получены в предположении, что потенциал ищется внутри ферромагнетика:  $\mathbf{r} \in V$ , поскольку это было сделано при вычислении интеграла  $\int_V u(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' = u(\mathbf{r})$ . Если  $\mathbf{r} \notin V$ , то этот интеграл должен быть равен нулю. Далее, непрерывность тангенциальной компоненты магнитного поля приводит к тому, что потенциал непрерывен на границе:

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^e(\mathbf{r}) \Big|_S, \quad \text{A.18}$$

а из непрерывности нормальной компоненты индукции следует

$$B_n(\mathbf{r}) = B_n^e(\mathbf{r}) = - \frac{\partial \phi^e(\mathbf{r})}{\partial n} \Big|_S. \quad \text{A.19}$$

подставим  $B_n^e(\mathbf{r})$  вместо  $B_n(\mathbf{r})$  и  $\phi^e$  вместо  $\phi$  в интеграл А.17, и применим вторую формулу Грина. Поскольку мы имеем дело уже с потенциалом  $\phi^e$ , определенном вне ферромагнетика, то интегрировать мы должны по пространству вне ферромагнетика  $\bar{V} = R^3 \setminus V$ :

$$\oint_S \left( \phi^e(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\nabla' \phi^e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) d\mathbf{S}' = - \int_{\bar{V}} \left( \phi^e(\mathbf{r}') \Delta' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{\Delta' \phi^e(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) d\mathbf{r}' = 0. \quad \text{A.20}$$

Знак „минус“ возникает из-за того, что в левой части равенства поверхностный интеграл по внутренней по отношению к  $\bar{V}$  поверхности. Первый интеграл обращается в нуль ввиду того, что  $\Delta' \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  и интеграл по области  $\bar{V}$  обращается в нуль, т. к.  $\mathbf{r} \in V \Rightarrow \mathbf{r} \notin \bar{V}$ . Второй интеграл равен нулю ввиду того, что вне ферромагнетика потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\phi^e(\mathbf{r}) = 0$ .

## Приложение Б. Поверхность постоянной энергии и коэффициент усиления

Предположим, что у нас имеется детектор, видный из точечного источника волн под телесным углом  $\Delta\Omega_d$ . Если среда изотропна, то в ней волновые векторы и групповые скорости сонаправлены, и, следовательно, на детектор попадут все волны с волновыми векторами из угла  $\Delta\Omega_d$ . Если среда анизотропна, то детектор зарегистрирует волны из телесного угла  $\Delta\Omega_q$  в пространстве волновых векторов, соответствующему групповым скоростям из угла  $\Delta\Omega_d$  в пространстве групповых скоростей. Отношение числа волн, зарегистрированных детектором в анизотропной среде к числу волн в изотропной среде равно

$$A = \Delta\Omega_q / \Delta\Omega_d. \quad \text{Б.1}$$

Эта величина называется коэффициентом усиления [74, 75, 98]. Рассмотрим поверхность постоянной частоты  $\omega(q, \theta, \varphi) = \text{const}$ . Выразим телесный угол  $\Delta\Omega_q$  через элемент площади поверхности  $\Delta S_q$

$$\Delta\Omega_q = \Delta S_{\perp} / q^2 = \Delta S_q \cos \beta / q^2, \quad \text{Б.2}$$

где  $\beta$  представляет собой угол между нормалью к поверхности постоянной частоты  $\mathbf{n}$  и волновым вектором  $\mathbf{q}$ ,  $\Delta S_{\perp}$  — проекция площади  $\Delta S_q$  на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{n}$ . Построим в каждой точке поверхности  $\omega(q, \theta, \varphi) = \text{const}$  единичный вектор нормали и поместим начала этих векторов в центр системы координат. Тогда исходная поверхность отображается в сферу единичного радиуса. Элементу  $\Delta S_q$  поверхности  $\omega = \text{const}$  соответствует элемент  $\Delta S_n$  единичной сферы и телесный угол  $\Delta\Omega_n = \Delta S_n$ . Поскольку нормаль к поверхности  $\omega = \text{const}$  определяет направление групповой скорости ( $\mathbf{V}_g = \partial\omega / \partial\mathbf{q}$ ), то  $\mathbf{n} = \mathbf{V}_g / V_g$  и на детектор, который виден под углом  $\Delta\Omega_d$  попадут волны с групповыми скоростями из угла  $\Delta\Omega_d = \Delta\Omega_n = \Delta S_n$  и волновыми векторами из угла  $\Delta\Omega_q$  (Б.2). Для коэффициента усиления имеем

$$A = \Delta S_q \cos \beta / \Delta S_n q^2. \quad \text{Б.3}$$

Таким образом, физическая задача об отношении интенсивности потока волн сводится к стандартной задаче дифференциальной геометрии. Согласно определению [99], отношение  $\Delta S_n / \Delta S_q$  площадей единичной сферы и исходной поверхности при  $\Delta S_q \rightarrow 0$  равно гауссовой кривизне

этой поверхности. Окончательно для коэффициента усиления получим

$$A(\mathbf{q}) = \frac{\cos \beta}{|K|q^2} = \frac{V_q}{Vq^2|K(\mathbf{q})|}, \quad \text{Б.4}$$

где  $q$  — модуль волнового вектора,  $K$  — гауссова кривизна изоэнергетической поверхности [99],  $V$  — модуль вектора групповой скорости  $\mathbf{V}_g(\mathbf{q}) = \partial\omega(\mathbf{q})/\partial\mathbf{q} = V_q\mathbf{e}_q + V_\theta\mathbf{e}_\theta + V_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ , записанного в системе координат, связанной с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Компоненты этого вектора равны  $V_q = \partial\omega/\partial q$ ,  $V_\theta = q^{-1}\partial\omega/\partial\theta$ ,  $V_\varphi = (q \sin \theta)^{-1}\partial\omega/\partial\varphi$ .

Следует отметить, что для магнонов зависимость  $\omega(q)$  нелинейная, поэтому коэффициент усиления спиновых волн зависит не только от углов  $\theta$  и  $\varphi$ , но и от модуля волнового вектора ( $A = A(q, \theta, \varphi)$ ). Гауссова кривизна является геометрической характеристикой поверхности и выражается через отношение второй и первой квадратичной форм [99]:

$$K(\mathbf{q}) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \quad \text{Б.5}$$

Величины  $E$ ,  $F$  и  $G$  характеризуют первую квадратичную форму

$$d\mathbf{q}^2 = Ed\theta^2 + 2Fd\theta d\varphi + Gd\varphi^2, \quad \text{Б.6}$$

и определяются следующим образом:

$$E = \mathbf{q}_\theta^2, \quad F = \mathbf{q}_\theta\mathbf{q}_\varphi, \quad G = \mathbf{q}_\varphi^2, \quad \text{Б.7}$$

где  $\mathbf{q}_\theta$  и  $\mathbf{q}_\varphi$  — частные производные вектора  $q(\theta, \varphi)$  соответственно по углам  $\theta$  и  $\varphi$ . Для знаменателя в выражении кривизны получаем:

$$EG - F^2 = q^4 \sin^2 \theta \left( \frac{V}{V_q} \right)^2. \quad \text{Б.8}$$

Коэффициенты  $L, N$  и  $M$  характеризуют вторую квадратичную форму

$$-d\mathbf{q}\mathbf{n}_V = Ld\theta^2 + 2Md\theta d\varphi + Nd\varphi^2 \quad \text{Б.9}$$

и определяются следующими выражениями:

$$L = \mathbf{q}_{\theta\theta}\mathbf{n}, \quad M = \mathbf{q}_{\theta\varphi}\mathbf{n}, \quad N = \mathbf{q}_{\varphi\varphi}\mathbf{n}. \quad \text{Б.10}$$

Специфика нашей задачи в том, что поверхность постоянного уровня  $q = q(\theta, \varphi)$  задана неявно:  $\omega(q, \theta, \varphi) = \text{const}$ . В связи с этим задача вычисления производных  $\mathbf{q}_\theta, \mathbf{q}_\varphi, \dots$  становится нетривиальной. Чтобы определить производные  $q_\theta$  и  $q_\varphi$ , запишем дифференциал функции

$\omega(q(\theta, \varphi), \theta, \varphi)$ :

$$d\omega = (\omega_q q_\theta + \omega_\theta) d\theta + (\omega_q q_\varphi + \omega_\varphi) d\varphi. \quad \text{Б.11}$$

На поверхности постоянного уровня  $\omega = const$  дифференциал частоты равен 0. Поскольку  $\theta, \varphi$  – независимые переменные, то коэффициенты при  $d\theta, d\varphi$  должны обращаться в нуль, откуда находим

$$q_\theta = -\frac{\omega_\theta}{\omega_q} = -q \frac{V_\theta}{V_q}, \quad q_\varphi = -\frac{\omega_\varphi}{\omega_q} = -q \sin \theta \frac{V_\varphi}{V_q}. \quad \text{Б.12}$$

Для определения вторых производных функции  $q(\theta, \varphi)$ , входящих в коэффициенты  $L, M$  и  $N$ , запишем второй дифференциал функции  $\omega = \omega(q(\theta, \varphi), \theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} d^2\omega = d(\omega_q dq + \omega_\theta d\theta + \omega_\varphi d\varphi) = d\omega_q dq + \omega_q d^2q + d\omega_\theta d\theta = (\omega_{qq} q_\theta^2 + 2\omega_{q\theta} q_\theta + \omega_q q_{\theta\theta} + \omega_{\theta\theta}) d\theta^2 + \\ + 2(\omega_{qq} q_\theta q_\varphi + \omega_{q\theta} q_\varphi + \omega_{q\varphi} q_\theta + \omega_q q_{\theta\varphi} + q_{q\theta}) d\theta d\varphi + (\omega_{qq} q_\varphi^2 + 2\omega_{q\varphi} q_\varphi + \omega_q q_{\varphi\varphi} + \omega_{\varphi\varphi}) d\varphi^2. \end{aligned} \quad \text{Б.13}$$

Так как на поверхности постоянного уровня  $\omega = const$ , то  $d^2\omega = 0$ . Поскольку  $\theta, \varphi$  – независимые переменные, то коэффициенты при  $d\theta^2, d\varphi^2$  и  $d\theta d\varphi$  должны равняться нулю. Тогда

$$q_{\theta\theta} = -\frac{1}{\omega_q} (\omega_{qq} q_\theta^2 + 2\omega_{q\theta} q_\theta + \omega_{\theta\theta}), \quad \text{Б.14}$$

$$q_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{\omega_q} (\omega_{qq} q_\varphi^2 + 2\omega_{q\varphi} q_\varphi + \omega_{\varphi\varphi}), \quad \text{Б.15}$$

$$q_{\theta\varphi} = -\frac{1}{\omega_q} (\omega_{qq} q_\theta q_\varphi + \omega_{q\theta} q_\varphi + \omega_{q\varphi} q_\theta + \omega_{\theta\varphi}). \quad \text{Б.16}$$

Приведенные выше формулы (при известном законе дисперсии  $\omega = \omega(\mathbf{q})$ ) позволяют рассчитать коэффициент усиления волн в направлениях, заданных углами  $\theta$  и  $\varphi$  в пространстве волновых векторов. В реальных экспериментах направление распространения волн определяется не волновым вектором, а вектором групповой скорости, в связи с чем необходимо вычислять коэффициенты усиления и в пространстве групповых скоростей. Для этого введем углы  $\theta_V$  и  $\varphi_V$ , определяющие направления групповой скорости:

$$\cos \theta_V = \frac{V_z}{V}, \quad \text{Б.17}$$

$$\text{tg } \varphi_V = \frac{V_x}{V_y}. \quad \text{Б.18}$$

Здесь  $V_x, V_y$  и  $V_z$  связаны с групповыми скоростями в сферической системе следующим образом:

$$V_x = V_q \sin \theta \cos \varphi + V_\theta \cos \theta \cos \varphi - V_\varphi \sin \varphi, \quad \text{Б.19}$$

$$V_y = V_q \sin \theta \sin \varphi + V_\theta \cos \theta \sin \varphi + V_\varphi \cos \varphi, \quad \text{Б.20}$$

$$V_z = V_q \cos \theta - V_\theta \sin \theta. \quad \text{Б.21}$$

Вычислим коэффициент усиления в прямом пространстве (пространстве групповых скоростей). Угол  $\beta$  между направлением групповой скорости и волновым вектором находится из скалярного произведения:

$$(\mathbf{V}_g \cdot \mathbf{q}) = Vq \cos \beta, \quad \text{Б.22}$$

откуда

$$\beta(\mathbf{q}) = \arccos((\mathbf{V}_g \cdot \mathbf{q})/V_g q) = \arccos(V_q(\mathbf{q})/V(\mathbf{q})). \quad \text{Б.23}$$

При рассмотрении волн в характеристических плоскостях  $\{100\}$  и  $\{110\}$  угол  $\varphi$  остается неизменным, частота волн определяется величиной волнового вектора  $q$  и одним углом  $\theta$ , и выражение для угла между волновым вектором и групповой скорости упрощается:

$$\beta(\mathbf{q}) = \arctg(V_\theta(\mathbf{q})/V_q(\mathbf{q})). \quad \text{Б.24}$$

В этом случае находим простую связь между направлением  $\theta_V$  групповой скорости и направлением  $\theta$  волнового вектора:

$$\theta_V(\mathbf{q}) = \theta + \arctg(V_\theta(\mathbf{q})/V_q(\mathbf{q})). \quad \text{Б.25}$$

Из аналогичных рассуждений находим связь направлений групповой скорости и волнового вектора для плоскости  $\{001\}$  ( $\theta = \pi/2$ ):

$$\varphi_V(\mathbf{q}) = \varphi + \arctg(V_\varphi(\mathbf{q})/V_q(\mathbf{q})). \quad \text{Б.26}$$

Особый интерес представляют направления (т. е. пара углов  $(\theta, \varphi)$ ), в которых кривизна изоэнергетической поверхности обращается в нуль. В этих точках коэффициент усиления имеет сингулярность. Следовательно, вблизи таких направлений будет резко возрастать амплитуда спиновых волн. Линии (в двумерном случае) или поверхности (в трехмерном), вдоль которых амплитуда волн резко возрастает, называются каустикой [100]. Итак, физическое явление – каустика волн, определяется гауссовой кривизной, т. е. геометрической характеристикой поверхности постоянной частоты. Направления каустики определяются из условия равенства нулю кривизны поверхности:  $K(\omega, \theta, \varphi) = 0$ . Это уравнение, очевидно, имеет решение в двух случаях:

1. В параболических точках. Точка поверхности называется параболической, если соприкасающийся параболоид в этой точке вырождается в параболический цилиндр). Условия выражается как  $LN = M^2$ .
2. В точках уплощения. Точка поверхности называется точкой уплощения, если соприкасающийся параболоид в этой точке вырождается в плоскость (касательную плоскость поверхности). Из этого условия следует, что для такого направления  $L = M = N = 0$ .