

**Борисов
Александр Борисович**

Заведующий лабораторией теории нелинейных явлений Института физики металлов УрО РАН, профессор кафедры теоретической физики и прикладной математики физико-технического факультета УГТУ-УПИ. Доктор физико-математических наук (1987г.), профессор (1989г.). Физик-теоретик, специалист в области теории солитонов и нелинейных явлений в конденсированных средах, автор более 120 научных работ и двух монографий.

ИФМ
УрО РАН



3

Начала нелинейной динамики

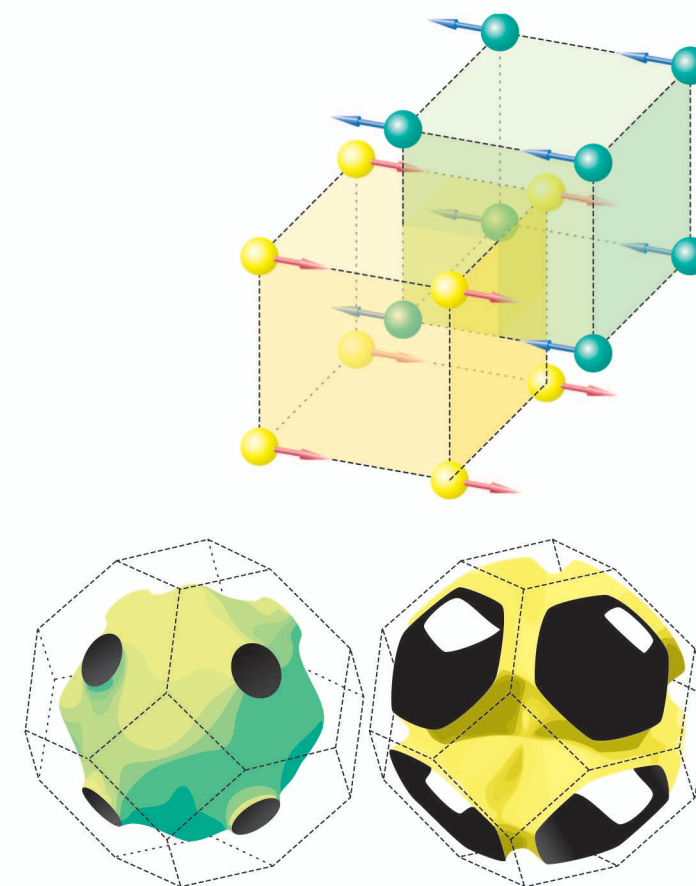
А. Б. Борисов

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

3
ФИЗИКА
КОНДЕНСИРОВАННЫХ
СРЕД

А. Б. Борисов

Начала нелинейной динамики



НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Основана Институтом физики металлов
в 2009 г.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МЕТАЛЛОВ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ СЕРИЯ
ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

3

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ
“Физика конденсированных сред”

академик РАН	В.В. Устинов (главный редактор)
академик РАН	Ю.А. Изюмов
академик РАН	В.М. Счастливцев
чл.-корр. РАН	Б.Н. Гощицкий
чл.-корр. РАН	Е.П. Романов
чл.-корр. РАН	В.Е. Щербинин

А.Б. Борисов

НАЧАЛА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

ЕКАТЕРИНБУРГ
2010

УДК 531.52я7, 521
ББК 22.213
Б 82

Рекомендовано к изданию ученым советом
Института физики металлов и НИСО УрО РАН

Б 82 Борисов А.Б.
Начала нелинейной динамики / А.Б. Борисов. – Екатеринбург: УрО РАН, 2010. – С. 408. – (Научно-образовательная серия «Физика конденсированных сред»; 3).
ISBN 978-5-7691-2145-6

В книге рассмотрены основные принципы теоретической механики, методы аналитической механики и дан краткий очерк их развития. Большое внимание уделено изложению наиболее содержательных и ценных для теории и приложений разделов нелинейной динамики: теории нелинейных и мало-амплитудных колебаний в базовых моделях нелинейной динамики. Описаны приближенные методы нелинейной динамики: метод многих масштабов и метод усреднения. Дано элементарное введение в теорию интегрируемых систем и теорию солитонов. Изложен современный алгоритм их поиска. На примере динамики частиц в решетке Тоды описаны методы обратной задачи рассеяния и обсуждается новый тип локализованных возбуждений – солитонов.

Монография адресована физикам-теоретикам, инженерам-физикам, специалистам, интересующимся проблемами нелинейной динамики, а также аспирантам и студентам, приступающим к изучению механики.

УДК 531.52я7, 521
ББК 22.213

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук профессор **А.П. Танкеев**

Рецензент

доктор физико-математических наук профессор **Ю.Н. Скрыбин**

ISBN 978-5-7691-2145-6

© Институт физики металлов
УрО РАН, 2010 г.
© Борисов А.Б., 2010 г.

Светлой памяти моих родителей
Бориса Федоровича Борисова,
Варвары Григорьевны Борисовой (Девяткиной)

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Монография посвящена актуальным проблемам теоретической механики, в частности анализу теории нелинейных явлений. Необходимость написания книги была обусловлена следующими обстоятельствами.

Во-первых, во второй половине XX в. произошло активное внедрение теории нелинейных явлений во все области физики. Поэтому ее фундаментальные положения уже знакомы и ученым-специалистам в данной области знаний, и студентам-физикам по специальным профильным изданиям. Вполне закономерным в связи с этим становится включение изучения теории нелинейных явлений сразу в начальный вузовский курс механики. Автор монографии предлагает для этого свои теоретические подходы.

Во-вторых, в середине 1960-х гг. после открытия методов обратного рассеяния и странного аттрактора произошло не только фундаментальное изменение основ механики, но и ее разделение на «интегрируемую» и «неинтегрируемую» части. Согласно принципу детерминированности для уравнений Ньютона в классической механике, задание начальных положений и скоростей материальных точек полностью определяет их положение в последующие моменты. Эти детерминированные уравнения описывают два типа эволюции динамических систем: регулярную и хаотическую динамику. Хаотическое поведение наблюдается для многих динамических систем в определенной области параметров уравнения и начальных условий и означает экстремальную чувствительность решений к выбору начальных условий и параметров уравнения. Даже при малом изменении последних динамическая система резко изменяется. Поскольку в реальных системах начальные условия и параметры известны с некоторой степенью точности, то хаотическая динамика накладывает определенные ограничения на предсказания эволюционного поведения системы во времени. Системы с хаотической динамикой на-

зываются также неинтегрируемыми системами. Регулярная динамика проявляется в стабильном многопериодическом поведении системы, характеризующейся наличием полного числа интегралов движения. Хаотическая динамика, которую тоже необходимо было бы ввести в начальный курс механики, не представлена в данной работе. Наибольшее внимание в ней уделено введению в интегрируемые системы. Интегрируемые системы с N степенями свободы обладают N интегралами движения, что позволяет получить их решения в явном виде. В интегрируемых системах с бесконечным числом степеней свободы может существовать новый тип нелинейных локализованных возбуждений – солитоны с необычными свойствами. В книге на примере решетки Тоды доступно изложен метод обратной задачи для описания интегрируемых систем и процедуры их выявления.

В книге приведены эпиграфы и портреты ученых, внесших основополагающий вклад в развитие механики. Направленность и рамки книги не позволили описать биографии и представить портреты (кроме Ван дер Поля, А.Н. Крылова, Н.Н. Боголюбова, А. Эйнштейна, Л.И. Мандельштама, А.А. Андропова) многих выдающихся западных ученых XX в. и ученых советского и постсоветского периода истории России, внесших значительный вклад в развитие нелинейной механики и интегрируемых систем.

Глава 1 носит вводный характер. В ней дан краткий очерк истории развития механики, не претендующий на ее полное описание. Ограниченный объем книги привел к фрагментарности изложения и сохранению иногда лекционного стиля. Содержание этой главы демонстрирует непрерывное развитие науки, несовершенство знаний о природе в любой исторический период. Данный материал с интересом воспринимается современными студентами. В ней помимо известных курсов по истории развития науки (Б.И. Спасского, А.Т. Григорьяна, П.С. Кудрявцева) автор использовал труды западных историков, написанных с большим пафосом и страстью. Очерчены благоприятные и неблагоприятные периоды развития науки, которые представляют не только исторический интерес. На примере биографий Н. Коперника, Т. Браге, И. Кеплера, Г. Галилея, С. Ковалевской показаны взаимоотношения ученых с властью в различные времена, отношение к религии, астрологии и лженаукам. Все эти вопросы особенно актуальны в современной России, где современные учебники по истории изобилуют вульгаризацией и очень спорным толкованием многих исторических фактов. Кроме того, на примере

жизни этих ученых прослеживаются проблемы научного творчества, мотивации работы ученого, обсуждаются соотношения между эмпирическим и теоретическим знанием. Приведено много цитат и цитируются абзацы из книг, которые, как кажется автору, подчеркивают особенности и колорит того времени. В конце главы даны основные положения механики Ньютона.

При изложении глав 2, 3, 5 и 6 автор старался следовать задаче монографии К. Ланцоша [16], также считавшего необходимым наиболее раннее знакомство будущих ученых с классическими образцами науки: «За великими теориями Эйлера и Лагранжа, Гамильтона и Якоби скрывается необычайное богатство философского содержания, которое совершенно исчезает при чисто формальном изложении, но которое не может быть источником величайшего интеллектуального наслаждения для человека, любящего математику. Дать студенту возможность открыть для себя скрытую красоту этих теорий – в этом заключалась одна из главных задач автора. Для этого ему пришлось вести читателя вдоль всего пути исторического развития с самого начала...» [16. С. 13].

Основные положения нелинейных колебаний изложены в главе 4. После качественного описания движения нелинейной системы с помощью фазовой плоскости введены эллиптические функции, с которыми студенты еще незнакомы (после курсов математического анализа). Основное внимание здесь уделяется малоамплитудным колебаниям в базовых моделях нелинейной динамики: вынужденные колебания ангармонического осциллятора, автоколебания, предельные циклы, параметрический резонанс. Рассмотрены приближенные методы нелинейной динамики (метод многих масштабов и метод усреднения), которые представляют минимальный инструментальный, необходимый для практической работы инженеров-физиков и физиков-теоретиков. В главе 7 дано введение в теорию интегрируемых систем. В ней изложены критерии поиска интегрируемых систем. На примере динамики частиц в решетке Тоды описан метод обратной задачи рассеяния и обсуждается новый тип локализованных возбуждений – солитонов.

Автор надеется, что эта книга окажется полезной широкому кругу читателей: начинающим физикам-теоретикам и инженерам-физикам, не знакомых с нелинейной динамикой, а также студентам, приступающим к изучению механики, и аспирантам соответствующих специальностей. Для восприятия смысла кни-

ги необходимо только знание высшей математики на уровне двух курсов классического и технического университета, а также элементарных сведений из теории функций комплексного переменного. Ввиду отчасти учебного характера книги в библиографию включены некоторые монографии и учебники и в основном тексте приведены ссылки на некоторые из них.

Автор глубоко признателен научному редактору профессору А.П. Танкееву, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему ряд полезных замечаний. Я глубоко признателен Е.С. Деминой за чтение рукописи, проверку формул и построение многих рисунков в этой книге; Д.В. Долгих и Ф.Н. Рыбакову за предоставленные рисунки. Автор благодарен также Л.Г. Скорнякову за кратковременное начальное сотрудничество в работе над этой книгой, С.А. Зыкову за советы по содержанию главы 7. Выражаю признательность дирекции ИФМ УрО РАН за предоставленную возможность работы над монографией. Наконец, я признателен моей жене Маргарите за поддержку.

Глава 1. НЬЮТОНОВА МЕХАНИКА

История развития механики, знакомство с которой, безусловно, необходимо для полного понимания и современной формы этой науки, представляет простой и поучительный пример тех процессов, которыми вообще развивается естествознание.

Э. Мах

1.1. КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ С ДРЕВНИХ ВРЕМЕН ДО ВТОРОГО ПЕРИОДА АНТИЧНОЙ ФИЗИКИ

Исторически развитие механики было связано с астрономией – индуктивной в древнейшие времена наукой, основанной на экспериментальных данных. По словам Э. Маха, «инстинктивное произвольное знание процессов природы всегда, вероятно, предшествовало научному произвольному познанию, исследованию явлений. Первое приобретает вследствие связи, существующей между процессами в природе, с одной стороны, и для удовлетворения наших потребностей, с другой» [3. С. 10]. Родиной современной культуры были страны Древнего Востока, Индии и Китая, где за тысячи лет до н. э. сложились крупные государства. В этих странах у земледельческих и пастушьих племен регистрировались те или иные факты и велись систематические астрономические наблюдения. Древняя астрономия имела три побуждения к развитию:

а) практическая направленность: необходимость уметь определять и измерять время, составление календаря, предсказание сроков сельскохозяйственных работ, ориентирование на местности и во время сухопутных и морских путешествий;

б) магия для воздействия на психическое состояние людей, астрология для предсказания их судеб (что вызывало финансовую поддержку астрологов многими правителями);

в) научный интерес к природе и стремление понять суть явлений.

Трудно установить, кто в эпоху древних цивилизаций делал те или иные великие открытия. Примерно 4000 лет назад в Месопотамии были построены богатые города с обширной торговлей. Населяющие ее народности – самаритяне, вавилоняне, шумеры – использовали письменность, прекрасно владели коммерческой арифметикой. Астрономические наблюдения тех времен служили хорошей основой для составления календарей. В Древнем Вавилоне, Египте, Индии и Китае астрономические наблюдения велись на специальных храмовых площадках. В странах Древнего Востока астрономические знания были монополизированы жрецами. Вавилонские жрецы установили видимый путь движения Солнца (эклиптику) и разделили его на 12 частей (созвездий зодиака). По прошествии тысячи лет вавилоняне разработали изумительную математическую систему предсказаний движений Луны, Солнца и звезд, которые наносились на карту зодиака. Тщательные наблюдения велись за планетами (по-гречески «странниками»), которые отличались от звезд яркостью свечения и тем, что они блуждали по своим орбитам вблизи эклиптики и их положение на небесном своде изменялось относительно звезд. Наблюдателями в Вавилоне был найден также способ вычисления времени затмений и установлен календарь. Время по вавилонскому календарю подразделялось на сутки, лунный месяц и год. Последний состоял из 364 суток.

Также более 4000 лет назад процветал Египет, где из-за умения предсказывать разливы Нила, обновляющие плодородность почвы, астрономия играла особую роль. Астрономические наблюдения вели жрецы – «господствующая каста руководителей земледелия» (К. Маркс). Египетская астрономия была проще вавилонской. У египтян имелся солнечный год, состоящий из 12 месяцев по 30 дней каждый, плюс пять лишних дней. Наблюдениям за затмениями, Луной и планетами они уделяли куда меньше внимания. Только позднее, спустя 2000 лет, они стали вести точные наблюдения за планетами для астрологии. Вместе с астрономией развивалась математика. Она сводилась преимущественно к операциям арифметического счета, привязанным к практическим целям, как, например, измерению количества товаров или делению определенного числа вещей на данное число лиц, организации работ армий рабочих для впечатляющих архитектурных сооружений фараонов. Геометрия имела также практический характер. Она помогала разметить поля, определить площади земельных участков после периодических разливов Нила, спроектировать и сконструировать пирамиды.

В Индии астроном Яджнавалкья (Yajñavalkya) (с IX по VI в. до н. э.) в результате измерений определил, что отношение расстояния от Луны до Земли к радиусу Луны равно 108 и во столько же раз радиус Солнца больше радиуса Земли. Эти значения практически совпадают с современными: 110,6 и 109,1 соответственно. Из астрономических трактатов VI в. до н. э. видно, что индусы знали о вращении Земли вокруг своей оси. В древних китайских летописях описано изменение высоты Солнца над горизонтом, наблюдения кометы и пяти планет. В IV в. до н. э. китайский астроном Ши Шень составил звездный каталог, содержащий 800 звезд. Астроном Мо Чинг в III в. до н. э. стал автором ранней версии закона движения.

Древняя физика (приблизительно от 600 г. до н. э. по 700 г. н. э.) является почти исключительно физикой греков. «Первыми физиками были натурфилософы, которые пытались разрешить старую проблему о происхождении мира и о совершающихся в нем изменениях не прежними мифологическими баснями, а естественным путем. Доискиваясь начала всех вещей, т. е. материи или вещества, из коего произошло все видимое, и деятеля, обуславливающего все видимое, они с детской доверчивостью надеялись сразу изгнать все доверчивое из мироздания. Предприятие это, конечно, безнадежное, но заманчивое. Невзирая на многочисленные неудачи, даже в наши дни смелые философы пробуют рассечь узел одним махом, и масса по-прежнему идет к ним с надеждою и сочувствием. Для науки древних эта высокая цель принесла положительную пользу, возбуждая живой интерес к природе, но вместе с тем и положительный вред, отклоняя внимание от правильного пути, ведущего от изучения частного к объяснению целого. Греческий ум отличается особенной силой творчества в области гипотез. Он, можно сказать, почти исчерпал все мыслимые теории для объяснения вселенной, так что наши современные гипотезы можно признать как бы непосредственным продолжением попыток древних» ([4]. С. 33). «Древние греки, наделенные какой-то первобытной ясностью и творческой силой, передали щедрые дары западной мысли: именно отсюда, из оказавшегося вечным источника черпает она свои прозрения, вдохновения и обновления. Современная наука, средневековая теология, классический гуманизм – все это в неоплатном долгу у древних греков. Для Коперника и Кеплера, для Августина и Аквината греческая мысль оказалась столь же основополагающей, что и для Цицерона и Петrarки. Наше мышле-

ние – благодаря пронизывающей его логике – все еще остается глубоко греческим: до такой степени, что прежде чем приступить к изучению характера собственного мышления мы должны внимательно всмотреться в мышление греков. Они заложили основу и других наших особенностей. Любознательность, страсть к нововведениям, критические наклонности, глубокий интерес к проблемам Жизни и Смерти, стремление к упорядоченности, скептическое отношение к общепринятым истинам – всеми этими характерными качествами греки заложили те интеллектуальные ценности, которые и сегодня значат не меньше, чем в V веке до Р. Х.» [6. С. 8].

В VII и VI в. до н. э. Греция претерпела важные социально-экономические перемены, превратившись в центр ремесленной индустрии и коммерции. Города превращались в цветущие оазисы с демографическим ростом, впервые в истории были созданы свободные политические институты. «С образованием полиса, т. е. города-государства, грек не чувствовал больше ограничений в реализации собственной свободы. Более того, сам человек соединялся с гражданином. Государство становилось и оставалось вплоть до эллинистической эпохи этическим горизонтом грека. Государственные цели ощущались как собственные цели, благо государства как собственное благо, свобода государства как собственная свобода» [7. С. 12].

Вавилоняне и египтяне передали грекам астрономические наблюдения и математические знания. Однако слепое поклонение и повиновение восточных народов религиозной и политической власти не привели их к мысли о необходимости объяснения всех явлений природы и установления закономерной связи между ними. К этой цели греческие ученые стремились методом *натурфилософии* и методом, который известный историк Розенбергер назвал методом *математической физики*. Метод натурфилософии пытается дать общие законы, из которых можно было бы вывести законы природы. Он, по классификации периодов развития физики Розенбергера [4], господствовал до Аристотеля приблизительно с 600 до 300 г. до н. э. Древние греки считали, что философия укоренена в самой природе человека. По мнению Аристотеля, «любящий мифы есть уже в некотором смысле философ... Все люди по природе стремятся знать... Укрепляться в мудрости и познавать самих себя свойственно людям. Невозможно жить без этого. И люди стремятся к знанию, переполненные изумлением и восторгом.... Люди, философствуя,

ищут знание ради самого знания, а не ради какой-то практической пользы... Очевидно, что мы занимаемся философией не ради прибыли, вне ее находящейся, напротив, очевидно, что, как человека можно назвать свободным лишь тогда, когда он цель самого себя, точно так же лишь та из наук может быть названа свободной, которая имеет цель в самой себе» [7. С. 13].

Греческая наука в отличие от таковой стран Древнего Востока, не была привилегией жрецов. Научными исследованиями занимались свободные граждане. Появились профессиональные учителя и ученые, получавшие материальное вознаграждение от частных лиц и государства, и первые научные школы и учреждения. Наука лишилась покрова таинственности, окружавшего жрецов Древнего Египта. Она развивается открыто в спорах и борьбе мнений. Основатель первого научного направления (ионийской школы) Фалес Милетский (600–500 гг. до н. э.) – один из семи мудрецов Греции – был основоположником греческой науки и философии. Он собрал все, что было сделано до того времени в области геометрии, и привел эту область знаний в некую систему принципов и выводов. Фалесу приписывают открытие наклона эклиптики, определение диаметра Луны, учение о шаровидности Земли и ее неподвижном положении в центре Вселенной. Его именем названа одна из теорем геометрии. Ионийцы (Фалес, Анаксимандр, Анаксимен) утверждали принцип единства материи и впервые в наивной и примитивной форме выдвинули и сформулировали основные принципы физической науки. Они полагали, что главная задача физики сводится к сведению многообразия окружающих человека явлений к единым принципам-первоначалам. О начале жизни легендарного Пифагора Самосского (582–500 гг. до н. э.) известный биограф античных философов Диоген Лаэртский сообщает нам: «Молодой и жадный до знаний, он покинул отечество, основал таинственные секты как среди греков, так и среди варваров. Был в Египте..., вблизи халдеев и магов. Впоследствии на Крите с Эпименидом был в пещере Ида, а в том же Египте, в святилищах, приобщился к таинствам египетских жрецов. Вернувшись на Самос, нашел родину под игом тирана Поликрата, потому отплыл на парусах в италийский Кротон, где составил законы италийцам, чем снискал великую славу себе и приспешникам, числом около 300, правление коих было почти аристократическим» [7. С. 27]. Пифагор основал школу и тайный философско-политический союз, которые процветали около 200 лет. В этот

союз принимали желающих только после пятилетнего строгого испытания. Пифагорейцы сделали несколько открытий в области математики и развили теорию чисел. Наиболее полная характеристика пифагорейской мысли принадлежит Аристотелю: «Пифагорейцы стали первыми математиками... и поскольку числа по своей природе суть первые начала в математике, то в них они видели и начала всех вещей, более чем в огне, воде, земле... более того, видели, что ноты и аккорды заключаются в числах, и многие другие вещи, и вся реальность кажется образом чисел, отсюда полагали они, что элементы чисел должны быть элементами вещей, а весь универсум был бы гармонией и числом» [7. С. 29]. Придавая числам мистические свойства, они обожествляли их, искали аналогию всего существующего в числовых соотношениях, считая всю Вселенную гармонией чисел. «Все известные вещи имеют число? – утверждал пифагореец Филолай, – без этого ничего нельзя было бы ни мыслить, ни знать... Когда-нибудь ложь умрет через число» [7. С. 33]. Открытие пифагорейцев, что в основе всего лежит математическая регулярность, ознаменовало собой фундаментальный этап в развитии науки, эта идея сохранилась до наших дней. Мистическое числовое учение о числе как о начале всех вещей в соединении с астрологией продержалось до Средних веков. Пифагор нашел, что струны двух арф звучат гармонично, если их длины относятся как определенные начальные целые числа. Пифагорейцы открыли также гармонические соотношения октавы, квинты и кварты и числовые законы, ими управляющие (1:2, 2:3, 3:4).

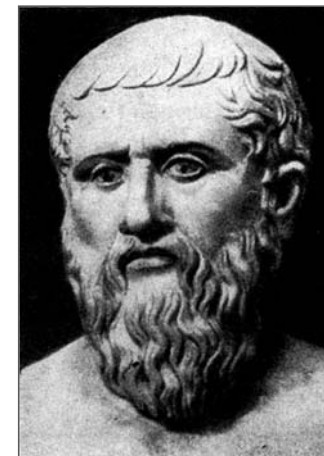
Пифагореец Архид (430–365 гг. до н. э.) применил математику и геометрические построения для решения механических задач, основал учение о блоках. Ему приписывают также изобретение винта и постройку из дерева первого автомата (летающего голубя). В системе мира пифагорейцев Земля на основании геометрической гармонии представлялась шарообразной. В центре Вселенной они поместили огонь, вокруг которого на прозрачных концентрических сферах вращаются Противоземля, Луна, Солнце, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн и неподвижные звезды. Размеры сфер и скорости их вращения удовлетворяли, как и гармонические интервалы музыкальных нот, отношениям целых чисел. Движение этих сфер с соответствующими скоростями сопровождается неслышимыми нами музыкальными звуками – «музыкой сфер». Заслугой пифагорейцев является внедрение математики в естествознание и создание первой

теории Вселенной с закономерным движением небесных тел, окружающих человека.

Первый представитель элейской философской школы Ксенофан (569–477 гг. до н. э.) из-за любви к науке пренебрег материальными интересами и имел полное право сказать: «Я обязан философии своим материальным разорением, но зато душевным благополучием». Согласно его воззрениям, в центре Вселенной покоится Земля, а Солнце и звезды – раскаленные громадные массы, вращающиеся на небосводе.

Платон предложил ученикам объяснить наблюдаемое неравномерное движение планет по некруговым запутанным траекториям. Евдоксий Книдский (около 408–355 гг. до н. э.), ученик Платона, был первым астрономом древности, который придумал научное объяснение движения планет. Именно его следует считать основателем научной астрономии. Евдоксий усовершенствовал систему сфер, предложенную пифагорейцами. Согласно ему, каждая планета укреплена не на одной, а на нескольких прозрачных сферах, заключенных одна внутри другой. Эти сферы были геометрическими, а не реальными конструкциями. Каждой планете соответствовало четыре сферы, Солнцу и Луне – по три. Сфера была закреплена на оси, которая проходила через отверстия в следующей сфере, причем оси вращения имеют разные направления. Из совокупности равномерных движений сфер в определенных направлениях слагалось неравномерное движение планет с весьма запутанной траекторией. С помощью 27 сфер

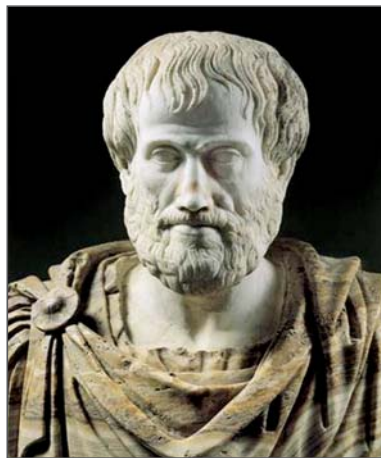
Платон (греч. Πλάτων); 427 до н. э., Афины – 347 до н. э., Афины) – великий древнегреческий философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля



Евдоксий построил систему, хорошо описывающую наблюдаемые движения планет. Построение потребовало сложных математических и геометрических вычислений.

Самым выдающимся учеником Платона был **Аристотель**, родившийся в Стагире, городе на севере Греции. Покинув Афины в 343 г., он стал воспитателем 14-летнего Александра Македонского. Слова последнего: «Я чту Аристотеля наравне со своим отцом, так как если отцу я обязан жизнью, то Аристотелю обязан всем, что дает ей цену», – лучше всего выражают влияние учителя на великого ученика. В 335 г. Аристотель вернулся в Афины, где снял внаем несколько зданий вблизи храма в честь Аполлона Ликейского и основал знаменитую философскую школу с названием Ликей. Тринадцать лет он проводил с учениками философские беседы во время прогулок по тенистым аллеям, поэтому последователей Аристотеля стали называть «перипатетиками» (странствующими). В 323 г. до н. э. умер Александр Великий, и Аристотель, «желая избавить сограждан от вторичного преступления против философии» (намек на убийство Сократа в 399 г. до н. э.), был вынужден бежать в Халкиду, где у него было поместье. После немногих месяцев ссылки он умер в 322 г. до н. э.

Сочинения Аристотеля представляют собой *первую и единственную попытку научной систематизации* всех явлений природы. В течение 2000 лет они переводились на разные языки и оказали громадное влияние на развитие науки. «Аристотель разделял науки на три больших раздела: 1) теоретические науки,



Аристотель (греч. Αριστοτέλης; 384 до н. э., Стагир – 7 марта 322 до н. э., Халкида на Эвбее) – великий древнегреческий философ и ученый-энциклопедист, ученик Платона

т. е. те, которые ведут поиск знания ради него самого; 2) практические науки, которые добиваются знания ради достижения морального совершенствования; 3) науки продуктивные, цель которых – производство определенных объектов. По критерию ценности и достоинства выше других стоят науки теоретические, образованные из метафизики, физики (в том числе психологии) и математики» [7. С. 140]. Литературное наследие Аристотеля огромно. Среди его трудов для нас интерес представляют два: «Phisica» (Физика) и «Mechanica» (Механика). Аристотеля называют крестным отцом физики: название его книги «Физика» стало именовать всю физическую науку. «Хотя в древности Платона обычно считали самым великим учителем, в период высокого Средневековья чаши весов, качнувшись, поменяются местами: преимущественную ориентацию западного мышления во многом начнет определять философский темперамент Аристотеля. Его энциклопедическая философская система окажется столь значительной, что вплоть до XVII в. научная деятельность на Западе в основном будет отталкиваться от его трудов, созданных в IV в. до Р.Х. Даже современная наука, далеко шагнувшая вперед, все чаще оглядывается на него и пользуется его понятийным инструментарием. Но в итоге именно в духе своего учителя Платона, хоть и двигаясь совершенно в другом направлении, Аристотель провозгласил силу человеческого интеллекта, способного постичь мировой порядок» [6. С. 61].

Для нас важно аристотелево учение о движении. Под движением он понимает общее изменение, а все механические движения подразделяет на естественные и насильственные. Естественное – это движение тела к своему месту (падение тяжелых тел к Земле, подъем тел из огня и воздуха вверх), происходит само собой и не требует приложения силы. Такие движения бывают прямолинейными или круговыми, подобными круговращению звезд. Остальные движения – насильственные и требуют приложения силы. Основной принцип динамики Аристотель формулирует так: «Все, что находится в движении, движется благодаря воздействию другого». Причину, по которой тело поддерживает движение по прекращении действия силы, Аристотель видит в «боязни пустоты»: тело при движении выталкивает воздух, который, устремляясь в пустоту, образовавшуюся за камнем, подталкивает тело. Он рассмотрел понятие пространства и времени. «Время не есть движение, но не существует без движения... Мы время познаем, когда разграничиваем движение, определяя предыду-

щее и последующее, и тогда говорим, что протекло время, когда получим чувственное восприятие предыдущего и последующего в движении», – писал он в книге «Физика». Аристотель полагал, что скорость движущего тела пропорциональна скорости тела. Его великой заслугой является постановка вопроса о классификации движений, после чего стали формироваться основные понятия механики: пространство, время, сила, скорость и т. д. С Аристотелем заканчивается творческий период греческой натурфилософии. Система его взглядов в механике во многом приводила к ложным результатам. Многие исследователи творчества Аристотеля отмечали, что его величайшие заслуги принадлежат не физике, а области философии, где он стремится объяснить природу как целое. «Неудача, постигшая величайшего философа, и его метод в области физики всего более способствовали тому, что путь чистого умозаключения был совершенно оставлен и наука перешла на утомительный, но надежный путь опытного исследования... очевидная ошибочность и бесплодность этого аристотелизма в свою очередь способствовали обращению передовых умов к наблюдению и опыту» [4. С. 50].

1.2. ОТ ПЕРИОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В АНТИЧНОСТИ ДО ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ

В человеческой истории стремление «счесть звезды», иначе говоря, построить картину мира, никогда не давало людям покоя, и, как бы ничтожна ни была сумма людских знаний, всегда находились среди мыслящего человечества... мудрецы, пытающиеся на основании научных данных воссоздать картину мира.

А. Фридман

Второй период развития античной физики (около 300 г. до н. э. – 150 г. н. э.) был периодом математической физики. Метод математической физики, восходящий к Архимеду, предполагает, приняв за основу простые и ясные положения, с помощью математической дедукции объяснить свойства сложных явлений. Технические возможности того времени не позволяли воспроизвести изучаемые явления и проверить теории новыми наблюдениями. *Опытное* исследование отделяет новейшую физику от древ-

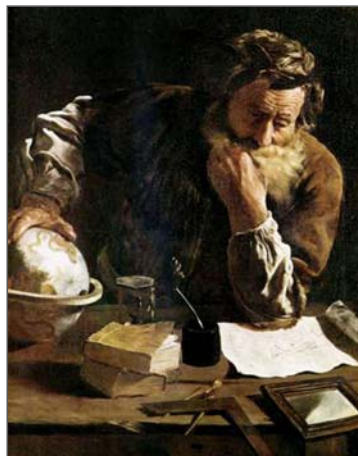
ней. С накоплением знаний о природе и обществе произошла дифференциация естественно-научных знаний: отделяясь от философии возникают отдельные области знаний. Отдельные философы стали заниматься математикой, астрономией и физикой. Хотя ранее чистая математика составляла главную часть философского образования, она отделяется от философии и благодаря непогрешимости своих методов дает основы многим разделам физики. В IV в. до н. э. Александр Македонский создал империю, включающую большую часть известного тогда мира и повсюду распространял греческие культуру и язык. «Как и было задумано Александром, крупные имперские города – космополисы – прежде всего Александрия, основанная им в Египте, – превратились в жизненные центры обучения и культуры: в их библиотеках и академиях продолжало жить и процветать наследие классической Греции. По всей видимости, Александра вдохновляла также мысль о всеобщем родстве человечества, стоящем над всеми политическими границами: и, ведомый непомерным воинским тщеславием, он попытался создать государственное объединение, характеризующееся широкомасштабным культурным слиянием» [6. С. 55].

После смерти Александра Великого (323 г. до н. э.) и распада его империи на три государства постепенно научный центр из Афин переместился в Александрию Египетскую. Александрийский музей, основанный, вероятно, при Птолемеи I Сотере (по другим сведениям – при Птолемеи II Филадельфе), представлял собой государственное учреждение, находившееся под покровительством царя и являвшееся научным центром в эллинистический период. Александрийский музей можно считать предшественником современных научно-исследовательских институтов. В нем имелись библиотеки, обсерватории, коллекции. В Александрию египетские цари, как и греческие монархи в древнейшие времена, приглашали крупных, зарекомендовавших себя ученых из других стран, которых старались освободить от всяких жизненных забот и дать им возможность заниматься, чем каждый желает, без всякого давления с чьей бы то ни было стороны. Знаменитые ученые, собранные с разных концов мира, жили при храме Муз на полном иждивении царя; они обедали совместно, эти обеды сопровождались научными беседами на самые разнообразные темы. В Александрии образовалась знаменитая библиотека-музей, имевшая, по преданию, к 48 г. до н. э. около 700 000 рукописей. В Александрии работали крупнейшие мате-

матики, астрономы, механики, естествоиспытатели и географы. Однако видных философов не приглашали в Александрию и центром философии оставались Афины.

В Александрии работал и жил геометр **Эвклид**. Биографические сведения о жизни (III в. до н. э.) и деятельности этого великого древнегреческого математика крайне скудны. Ученые реконструируют даты жизни Эвклида приблизительно 435–365 гг. до н. э. Известно, что он родом из Афин, был учеником Платона. Научная деятельность его протекала в Александрии, где он создал математическую школу. Эвклид собрал и подытожил все предшествующие достижения греческой математики, добавил ряд собственных и создал фундамент для ее дальнейшего развития. Главные труды Эвклида «Начала» (латинизированное название «Элементы») содержат изложение планиметрии, стереометрии и ряд вопросов теории чисел, алгебры, общей теории отношений и метода определения площадей и объемов, включающего элементы пределов (метод исчерпывания). Историческое значение «Начал» Эвклида заключается в том, что в них впервые сделана попытка логического построения геометрии с помощью дедуктивной логики на основе аксиоматики. Геометрические построения в дальнейшем широко применялись в астрономии. С 1482 г. «Начала» Эвклида выдержали более 500 изданий на всех языках мира.

Легендарный **Архимед** родился в Сиракузах, получил блестящее образование у своего отца, астронома и математика Фи-



Архимед (греч. Αρχιμήδης; 287–212 до н. э.) – древнегреческий математик, механик и инженер. Основположник теоретической механики и гидростатики

дия. В юности провел несколько лет в Александрии, где познакомился с Эратосфеном. Работы Архимеда относились почти ко всем областям математики того времени: ему принадлежат замечательные исследования по арифметике, алгебре и геометрии. Главные математические достижения Архимеда относятся к области, которую сейчас называют математическим анализом. Он нашел общий способ вычисления площадей и объемов многих тел методом исчерпывания, который много позже стал основой интегрального исчисления. Архимед является и первым теоретиком механики. Доказательства Архимеда представляют собой первые мысленные эксперименты в истории механики. Он ввел понятие центра тяжести и доказал, что в любом теле есть единственная точка, в которой можно сосредоточить его вес, не на рушив равновесного состояния. В сочинении «О равновесии плоских фигур» Архимед сформулировал закон рычага, содержание которого заключено в следующих двух теоремах.

1. «Соизмеримые величины уравниваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям».

2. «Если величины несоизмеримы, то они точно так же уравниваются на длинах, которые обратно пропорциональны этим величинам».

Применив математику для изучения механического равновесия, Архимед показал, что математический подход к решению физических проблем не только помогает проникнуть в суть законов природы, но обогащает и саму математику. Как инженер Архимед прославился многими механическими конструкциями. Ему приписывается ряд механических изобретений, в частности архимедов винт (шнек) для вычерпывания воды, полиспаст, примененный для спуска на воду большого военного корабля, водоподъемный винт, многоступенчатый редуктор, червячная передача и др. Галилей сказал: «Если бы не Архимед, я бы ничего не смог добиться».

В Александрийский период примерно в 330 г. до н. э. возникла школа астрономов, которая успешно работала в течение нескольких веков. Современник Архимеда географ и математик Эратосфен с точностью до 5% определил размеры Земли. Аристарх Самосский (первая половина III в. до н. э.) первым выдвинул гипотезу о гелиоцентрическом строении Вселенной и вращении Земли вокруг своей оси, а также определил расстояние от Земли до Луны как 56 земных радиусов (точно 60). Мо-

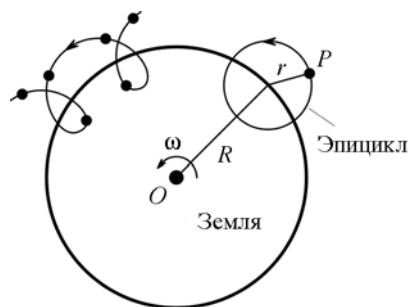
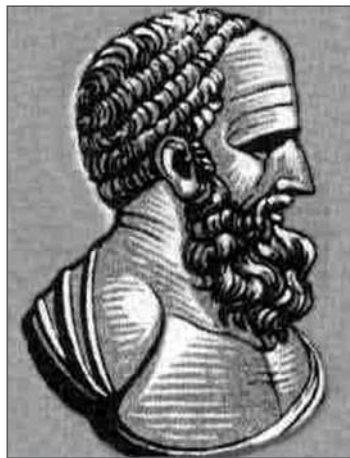


Рис. 1.1

которой сам перемещается с постоянной угловой скоростью ω по другой окружности (дифференту) радиуса R . Центр дифферента совпадает с центром O Земли. В итоге мы наблюдаем петлеобразное движение планеты. Величайший древнегреческий астроном **Гиппарх Никейский** разработал системы эпициклов Луны и Солнца, подбирая радиусы двух окружностей и угловые скорости. Он составил звездный каталог, где были указаны положения (с точностью около $1/6$ градуса) и относительная яркость (его шкала имела 6 разрядов) около 850 звезд из 42 созвездий. На данные этого каталога астрономы опирались многие столетия – вплоть до появления труда Улугбека в XIV в. Гиппарх оценил продолжительность солнечного года в



Гиппарх Никейский (греч. Ἰππάρχος; ок. 190 – ок. 120 до н. э.) – древнегреческий астроном, географ и математик II в. до н. э., часто называемый величайшим астрономом Античности

дель Евдоксия была доведена Аристотелем до 56 вращающихся сфер и оставлена из-за крайней сложности. Аполлоний Пергейский (200 г. до н. э.) для того чтобы объяснить петлеобразное движение планет по небесному своду, предложил теорию эпициклов. По ней планета P (рис. 1.1) движется с постоянной угловой скоростью по окружности (эпициклу) радиуса r , центр

365 суток 5 часов и 55 минут. Он открыл, что расстояние между Луной и Землей не остается постоянным: Луна движется быстрее на близких расстояниях и медленнее на далеких. Он сделал вывод о эксцентричности ее движения: Луна движется по кругу, но Земля не является центром этого круга.

Большинство астрономов эллинистической поры решало вопрос в пользу геоцентричной Вселенной, используя различные геометрические модели для объяснения положения планет. Завершением этих исследований стал труд **Птолемея «Альмагест»** (*Великое построение*), состоящий из 13 книг. В нем Птолемей занят уточнением картины знания, полученной от Аристотеля. Он разделяет науки на поэтические, практические и теоретические. Последние включают в себя физику, математику и теологию (метафизику). Птолемей убежден в явном превосходстве теоретических наук и отдает предпочтение математике. «Только математика, – полагает Птолемей, – если подойти к ней со строгостью, дает прочное и определенное знание тем, кто его добивается, поскольку доказательство как арифметическое, так и геометрическое, получается путями неопровержимыми» [7. С. 258]. В «Альмагесте» Птолемей изложил собрание астрономических знаний древней Греции и Вавилона, повторил и дополнил данные Гиппарха о звездах и планетах, разработал математическую теорию движения планет, где соединил аристотелеву космологию движения планет по окружностям вокруг неподвижной Земли с действительными наблюдениями за планетами с переменными скоростями и направлениями. Вместе с теорией движения Солнца и Луны эта теория составила так называемую птолемею систему мира. Согласно ей наиболее удаленная от центра сфера, к которой прикреплены неподвижные звезды, каждодневно перемещает все небо вокруг Земли, двигаясь в западном направлении. Внутри этой сферы каждая из планет (включая Солнце и Луну) вращается в восточном направлении с переменными – более медленными – скоростями. Он принял следующую последовательность расположения светил: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн, неподвижные звезды. Для описания движения Солнца, Луны и планет он построил схему, приведенную на рис. 1.2.

Земля (E) расположена на некотором расстоянии от центра дифферента (C) для каждой планеты (P). Воображаемая точка Q , которую он назвал *эквантом*, находится на одном диаметре дифферента и на расстоянии $CQ = EC$. Плечо QA вращается с

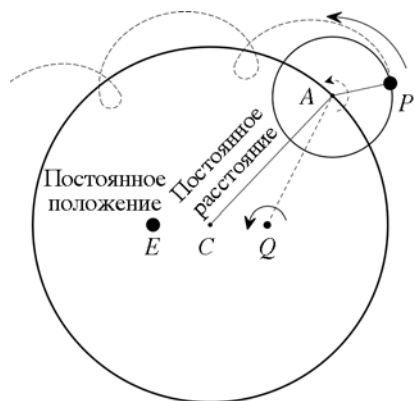


Рис. 1.2

метры экванта Птолемей для каждой из планет определил исходя из астрономических наблюдений. Умелый подбор положения экванта, радиусов AP и CA , угловых скоростей вращения позволял Птолемею довольно точно моделировать видимое неравномерное движение планет. Согласие с экспериментальными данными составляло доли градуса. По мере уточнения положения планет для объяснения их движения приходилось вводить несколько эпициклов. Хотя такая теория со временем становилась громоздкой, ею с успехом пользовались.



Клавдий Птолемей (греч. Κλαύδιος Πτολεμαῖος; 87–165) – великий древнегреческий астроном, математик, музыкальный теоретик и географ

постоянной угловой скоростью. При этом радиус AP эпицикла вращается вокруг центра A с другой постоянной угловой скоростью. В теории Птолемея угловая скорость центра эпицикла относительно экванта неизменна. Однако при наблюдении из центра деферента или из точки E угловая скорость центра эпицикла при движении планеты меняется. Также не остается неизменной и линейная скорость планеты: чем ближе к Земле, тем она больше. Пара-

Остроумная идея и сложнейшие расчеты движения планет с учетом эпициклов и эксцентриков обеспечили Птолемею беспрецедентный успех в области астрономии, авторитет его никто не оспаривал 14 веков! На протяжении полутора тысяч лет, будучи переведен с греческого сначала на арабский, а затем на латинский языки, «Альмагест» считался наиболее авторитетным источником астрономических знаний на средневековом Востоке и в Европе. «Разработанная Птолемеем модель сложных окружностей стала первой системой, которая смогла количественно объяснить все небесные движения. Кроме того, податливая многосторонность данной модели, позволявшая примирять новые противоречивые наблюдения с помощью новых геометрических преобразований (например добавляя к эпициклу еще один эпицикл, к эксцентрику – еще один эксцентрик), наделила ее такой силой, что она продержалась на протяжении всего классического периода и Средневековья. Основным костяком для эллинистических астрономов в создании этой схемы послужила космология Аристотеля – с ее находящейся в центре неподвижной Земли, вращающимися эфирными сферами и стихийной физикой. Эта синтетическая птолемеовско-аристотелевская Вселенная в свою очередь легла в основу того мировосприятия, которое в течение почти 15 последующих столетий определяло философское, религиозное и научное видение Запада» [6. С. 60].

Аристарх Самосский (ок. 310–230 гг. до н. э.) выдвинул идею о бесконечности мира. Он высказал соображения о гелиоцентрической системе мира, когда Солнце и звезды неподвижны, а Земля вращается по кругу вокруг них. Однако ввиду больших достижений теории Птолемея гелиоцентрическая система была отвергнута современниками и забыта почти на два тысячелетия.

После Птолемея заканчивается плодотворный период развития античных физики и механики, и приблизительно к VII в. н. э. они приходят в состояние качественного упадка. «Политические и религиозные влияния, противодействующие развитию науки, приобретают решительный перевес. Умы насильно выводятся из покоя научных изысканий, вовлекаются в политический водоворот или же окончательно поглощаются уставами религиозной жизни. ...Владыка мира, Рим, все сильнее привлекает к себе выдающиеся умы. Афинские школы, александрийская академия еще существуют, но прежний дух в них угас; они прозябают, ли-

шенные творческой силы. Все, что создает в себе жизненную энергию, стремится в Рим за почетом и мздой от всемогущих цезарей. Рим, однако, не место для мирных ученых, и у римлян нет склонности медленно возвращать скромное растение познания природы... Исключительные умы продолжают, правда, время от времени ощущать потребность покинуть торжище людских страстей, отдохнуть под сенью науки, но эти умы ищут успокоения на лоне старой философии, а не юной науки, требующей непрестанной и тревожной работы» [4. С. 72].

В 391 г. Епископ Теофил спровоцировал разгром Александрийской библиотеки, где погибли многие ценнейшие рукописи. Византийский император Юстиниан в 529 г. закрыл философские школы, изгнав философов из города. Своим постановлением папа Григорий I запретил занятие математикой, философией и чтение древних книг. Эпоха греческого свободомыслия закончилась. Церковь монополизировала науку и просвещение, и знания о природе вернулись к представлениям догреческой философии. Христианство как господствующая идеология ведет борьбу с наукой древних ученых и мыслителей. Такое положение в науке продержалось в Европе примерно до XII в. После покорения Александрии арабами в 640 г. в ней прекращается научная жизнь. Но в это время наука и культура переживали расцвет в странах Среднего Востока: Китае, Индии, Хорезме, Арабском Халифате и других государствах. «Спустя 100 лет с небольшим после смерти Магомета, когда арабы распространили свою власть на обширное пространство и прочно утвердили свою религию, когда к блестящему двору пышных халифов начали со всех сторон стекаться богатства, а затем также ученые и художники, — ярые защитники веры превратились в столь же ревностных поклонников науки; фанатичные арабы, которые еще недавно нанесли последний удар древней науке, оказались с течением времени почти единственными ее почитателями и хранителями... Они сохранили для нас памятники древней письменности, которые без них могли бы погибнуть в бурях народных переселений, и, что еще важнее, в самое смутное время этих бурь они поддерживали научную работу и научную жизнь до тех пор, пока христианский мир не созрел до возможности перенять от них работу о дальнейшем развитии науки... Не подлежит сомнению, что арабы прямо или косвенно были учителями христианских ученых» [4. С. 78]. Некоторые калифы учредили специальные переводные академии, где труды греческих ученых переводились

лись на арабский язык. Распространение власти арабского халифата на Среднюю Азию привело к синтезу античной и восточной науки и образованию арабской науки. Арабские ученые дополнили геометрические методы древних введением алгебры, отчасти позаимствованных у индийцев. Современная индусско-арабская система цифр с нулем была сначала развита в Индии, наряду с тригонометрическими функциями синуса и косинуса была принята Исламским Халифатом и стала распространяться по Европе.

С II–VII вв. на территории Европы, Азии и Африки после великого переселения народов зародились цивилизации нового типа с новыми народами, государствами, языками, моралью и нравственностью. Однако «славное прошлое классической цивилизации и Римской империи для раннего Средневековья Запада было далеким воспоминанием. Переселения варварских племен не только разрушили западную систему гражданской власти, но по большому счету искоренили любые проявления высококультурной жизни, а также — в особенности вслед за исламской экспансией — отрезали ей доступ к подлинным греческим текстам. Немногочисленные в Средневековье христиане-интеллектуалы, помимо общей христианской убежденности в своем особом осиянном благодатью статусе, осознавали, что живут в тусклых сумерках, сгустившихся вслед за золотым веком культуры и учености. Однако искра античной мудрости еще мерцала, бережно сохраняемая немногими ценителями в тиши монастырских скрипториев. В эту эпоху политической и социальной неустроенности именно христианские монастыри обеспечивали такое надежное укрытие, где можно было в безопасности служить высшим целям и сохранять великие ценности прошлой культуры. Для средневекового мышления культурное продвижение прежде всего означало и подразумевало нахождение античных текстов и раскрытие их смысла... В монастырях типичной формой послушания стало переписывание древних манускриптов... Сходным образом в конце VIII в. Карл Великий, объединивший в результате завоеваний большую часть Европы, дабы сложилось западное христианство, всячески поощрял культурное возрождение учености, каковая зиждилась на античных идеалах в той же степени, что и на христианских» [6. С. 120].

Приблизительно к 1000 г. после достижения Европой политической безопасности, после стольких веков хаоса и чуждых

вторжений «культурная деятельность оживилась сразу во многих областях жизни: росло население, совершенствовалось сельское хозяйство, развивалась торговля на континенте и за его пределами, усиливалась связь с соседними народами – носителями исламской и византийской культур, возникли крупные и малые города, а вместе с ними – и слой образованных людей, организовывались ремесленные цеха, а общий рост интереса к учености привел к основанию университетов. ...Юный варвар – христианский Запад – по собственному почину превращался в мощный и жизнотворный центр цивилизации. ...Кроме того, в связи с наступившим процветанием Европы у духовенства появилось больше времени для интеллектуальных занятий, интерес к которым подстегивали усилившиеся контакты со старейшими центрами учености – византийской и исламской империями, где и сохранялись в темные века Европы древние манускрипты и эллинское наследие. В этих-то обстоятельствах и церковь стала опекать и покровительствовать обучению и образованию, которые традиционно отличались широтой, глубиной и строгой дисциплиной... Беспрецедентная опека Церкви над ученостью и воздействие мощных сил, обусловивших культурный подъем, вызвали коренной сдвиг в философских устоях западного христианского мировоззрения. В лоне средневековой церкви отвергающая мир христианская философия, выкованная Августином и опирающаяся на Платона, начала уступать место совершенно иному подходу к существованию: схоластика в своей интеллектуальной эволюции изменила направление движения, развернувшись от Платона к Аристотелю. Этот сдвиг наметился в XII–XIII вв., когда был открыт заново обширный корпус сочинений Аристотеля, сохранных мусульманами и византийцами, а ныне переведенных на латынь. Эти тексты, включавшие “Метафизику”, “Физику” и трактат “О душе”, появились в сопровождении ученых арабских комментариев, а вместе с ними возвратились и другие труды греческой науки, в частности сочинения Птолемея. Неожиданное столкновение Европы с изощренной научной космологией, энциклопедической по широте и внутренне соразмерной, буквально ошеломило ее, веками не имевшую ни малейшего представления об этих идеях. Однако Аристотелю удалось нанести удар столь сокрушительной силы именно потому, что средневековая духовная культура уже была способна осознать его значение. Его мастерское сумми-

рование научных познаний, его кодификация, его вера в могущество человеческого разума в точности отвечали тем тенденциям рационализма и натурализма, что вновь стали набирать силу на средневековом Западе. Кроме того, философия Аристотеля крайне привлекала тех церковных интеллектуалов, чьи способности к суждению достигли необычайной остроты в результате продолжительной схоластической выучки и закались в логических диспутах о тонкостях доктрины. Таким образом, в Европе аристотелевские тексты нашли явно восприимчивую аудиторию: вскоре Аристотеля уже называли не иначе как “философ”. Этой “перемене ветра” над гладью средневековой мысли суждено было повлечь за собой поистине исторические последствия. Под эгидой церкви университеты превратились в замечательные центры учености, куда стекались студенты со всей Европы, чтобы учиться и слушать публичные лекции и диспуты учителей. По мере того как развивалась система образования, отношение ученых к христианской вере переставало быть, как встарь, слепо нерассуждающим, приобретаая отчасти характер саморефлексии» [6. С. 121–123].

В связи с ростом интереса к знаниям возник слой образованных людей. В 1215 г. Парижский университет получил от папского престола письменную хартию, согласно которой университеты могли существовать как автономные культурные центры. Преподавание в них в то время было основано на религиозном учении и философии Платона и Аристотеля, которые были приспособлены к церковным догмам. В XIII в. учение схоластов (схоластика по-гречески *scholastikos* – школьный), господствующее до эпохи Возрождения, основывалось на священных книгах и философии Аристотеля, его учении о строении Вселенной, на силственных и естественных движениях, «от объяснения Аристотеля к объяснению природы они сами не подвинулись ни на шаг, и всякий, уклонившийся от этого учения, становился в их глазах еретиком, столь же преступным, как и человек, отрицавший церковные догматы. Схоластика смотрела на физику как на побочное занятие» [4. С. 98]. Желая дискутировать и не желая наблюдать, схоластики ставили и перед собой проблемы, не требующие проверки опытом: природа ангелов, их язык, возраст, чин и т. д.

Но и в среде схоластиков появляются философы, признающие опыт как единственную основу наших знаний и проводящие опытные исследования в естествознании. Один из самых

блестящих из них Роджер Бэкон (1214–1294 гг.) видел в пренебрежении математикой заблуждения схоластических учений – «Математика – дверь и ключ к науке». Занимаясь астрономическими наблюдениями, экспериментами в химии и физике, он был явным приверженцем экспериментальных методов: «У нас имеется три средства познания: авторитет, мышление и опыт. Авторитет ничего не стоит, если утверждение его не может быть обосновано опытом; авторитет не учит, он требует только согласия. При мышлении мы обыкновенно отличаем софизм от доказательства, проверяя вывод опытом... Экспериментальная наука – царица умозрительных наук, она имеет три важных преимущества. Во-первых, она испытывает и проверяет выводы других наук. Во-вторых, в понятиях, которыми пользуются другие науки, она открывает великие результаты, к которым те науки не способны прийти. В-третьих, она исследует тайны природы своими собственными силами» [4. С. 104].

В конце XIII и XIV в. усиление монархий европейских национальных государств уменьшало духовную роль церкви, *иерархия которой все больше занималась финансовыми делами и политическими маневрами*. Очевидная развращенность папства способствовала утрате церковью в глазах многих верующих духовной чистоты. «В середине XIV столетия по всей Европе промчался черный смерч бубонной чумы, унеся с собой около трети всего населения континента и поставив под смертельную угрозу то равновесие экономики и культуры, на которое опиралась вся цивилизация высокого Средневековья. Многие люди думали, что на землю обрушился гнев Божий. Столетняя война между Англией и Францией превратилась в нескончаемый разрушительный конфликт, а Италию в это же время раздирали беспрестанные вторжения и междоусобные войны. Повсюду рыскали пираты, бандиты и наемные головорезы. Религиозная борьба приняла международный масштаб. На целые десятилетия и почти повсеместно хозяйственная жизнь поверглась в упадок. Университеты постиг тягчайший склероз. Все новые болезни, разносимые из портовых городов, буквально парализовали Европу. Правил бал черная магия и дьяволопоклонство, массовые бичевания, ..., инквизиция, пытки и публичные сожжения еретиков. ...На каждом шагу вершились убийства, насилия, грабежи, ежегодно возникала опасность голода и моровой язвы. В любой момент Европе грозило нашествие турецких полчищ. Всюду ждали светопреставле-

ния. Сама церковь – этот важнейший из культурных институтов Запада – многим виделась средоточием упадка и развращенности, а ее устройство и назначение – давно лишенными духовной цельности и чистоты. На этом-то фоне массового разложения культуры, насилия и смерти и зачиналась “новая жизнь”, то есть эпоха Возрождения. ...Эпоха Возрождения проявляется в равной степени как в многообразии своих явлений, так и в их непредсказуемом характере. За промежуток времени, равный жизни одного поколения, Леонардо да Винчи, Микеланджело и Рафаэль создали свои шедевры, Колумб открыл Новый Свет, Лютер восстал против католической церкви и начал Реформацию, а Коперник выдвинул гипотезу о гелиоцентричности Вселенной и положил начало Научной Революции. Если сравнивать человека Возрождения с его средневековым предшественником, то представляется, будто он внезапно, словно перепрыгнув через несколько ступенек, поднялся практически до статуса сверхчеловека. Человек отныне стал смело проникать в тайны природы как с помощью науки, так и своим искусством, делая это с непревзойденным математическим изяществом, эмпирической точностью и поистине божественной силой эстетического воздействия. Он неизмеримо расширил пределы известного дотоле мира, открыл новые материки и обогнул весь земной шар. Он осмелился бросить вызов традиционным авторитетам и утверждать такую истину, которая основывалась на его собственном суждении. Он был способен оценить сокровища классической культуры и вместе с тем был волен вырваться за старые границы, чтобы устремиться к совершенно новым горизонтам... Подобного яркого расцвета человеческого сознания и культуры история не знала со времен “греческого чуда” в Античности, на самой заре западной цивилизации. Поистине, человек Запада переживал второе рождение» [6. С. 155].

Леонардо да Винчи был одним из выдающихся ученых того времени «титанов по силе мысли, страсти и характеру, по многогранности и учености» (Ф. Энгельс). Он резко критикует схоластиков за научную бесплодность и пренебрежение опытом: «Если я не умею, как они, приводить места из авторов, то я призываю нечто высшее и достойнейшее, призываю опыт, бывший учителем из учителей... Они ходят спесиво надутыми, разодетыми и разукрашенными, и не хотят оставить мне плод моих трудов. Они порицают меня – изобретателя. Но ка-

ких же порицаний заслуживают они, не изобретатели, а фанфароны и декламаторы чужих идей» [11. С. 85]. Научная деятельность Леонардо отличается удивительной разносторонностью. В области физики он опередил свое время больше чем на столетие. Леонардо да Винчи полагал, что звук, свет, теплота, магнетизм являются колебательными движениями. Вселенная, по его мнению, не ограничена, и Земля не находится в ее центре, тяготение существует не только на Земле, но и на каждом небесном светиле. Его исследования в механике связаны с техническими проблемами того времени. Он исследует условия равновесия рычагов разных устройств, используя понятие момента силы, равновесие и движение груза по наклонной плоскости. Леонардо нашел новые частные закономерности простейших движений тел. Он установил, что тело падает по дуге быстрее, чем по соответствующей ей хорде, при свободной падении скорость тела меняется со временем в арифметической прогрессии и т. д. Леонардо называли чародеем, служителем дьявола, итальянским Фаустом и божественным духом, основателем искусства Высокого Возрождения, опередившим свое время на несколько веков. Окруженный легендами еще при жизни великий Леонардо – символ безграничных устремлений человеческого разума. Явив собою идеал ренессансного «универсального человека», он осмысливался в последующей традиции как личность, наиболее ярко очертившая диапазон творческих исканий эпохи.



Леона́рдо ди сер Пьёро да Винчи (итал. Leonardo di ser Piero da Vinci; 15 апреля 1452, село Анкиано около городка Винчи близ Флоренции – 2 мая 1519, замок Кло-Люсэ близ Амбуаза, Турень, Франция) – великий итальянский художник (живописец, скульптор, архитектор) и ученый (анатом, математик, физик, естествоиспытатель), яркий представитель типа «универсального человека» (лат. homo universale) – идеала итальянского Ренессанса

1.3. ОТ НИКОЛАЯ КОПЕРНИКА ДО И. КЕПЛЕРА

Факты и понятия науки могут показаться случайными хотя бы потому, что установлены в случайное время случайными людьми и часто при случайных обстоятельствах. Но, взятые вместе, они образуют единую закономерную систему, в которой число перекрестных связей настолько велико, что в ней нельзя заменить ни одного звена, не затронув при этом всех остальных. Под давлением новых фактов система эта непрерывно изменяется и уточняется, но никогда не теряет цельности и своеобразной законченности. Нынешняя система научных знаний – продукт длительной эволюции: в течение многих лет старые звенья в ней заменялись новыми, более совершенными, а совсем новые понятия всегда возникали с учетом и на основе прежних.

*Л.И. Пономарев.
По ту сторону кванта*

Научная Революция, ставшая завершением эпохи Возрождения, в астрономии начинается с появления знаменитого труда Коперника о гелиоцентрической системе, окончательно разорвавшего с античными и средневековыми взглядами на Вселенную и ставшего решающим вкладом в становление современного мировоззрения.

Николай Коперник родился в польском городе Торуни. Он прослушал курс математики и естественных наук в Краковском университете, затем продолжил образование в Вене и Болонье, где изучал преимущественно астрономию. В эпоху Возрождения общество остро нуждалось в более совершенном календаре, зависящем от продолжительности года. Его реформу взялась провести церковь, и Копернику поручили оказать папству помощь и дать совет по данному вопросу. К этому времени положение дел в астрономической науке было чрезвычайно запутанным. Астрономические наблюдения, проводимые за многие века со времен Птолемея, обнаружили серьезные несоответствия с первоначальной его теорией. Для описания движения небесных тел после новых наблюдений, сохранения античных правил о равномерном круговом движении приходилось

каждый раз вводить новые эпициклы, эксцентрики, смещать их центры. Кроме того, греческие, арабские и европейские астрономы использовали разные сочетания эпициклов, эксцентриков и эквантов. В итоге птолемеевский подход, по словам Коперника, произвел на свет настоящее «чудовище» – сложную и громоздкую схему, которая, несмотря на все поправки, не могла объяснить или предсказать расположение планет с досточерной точностью.

Коперник пересмотрел все научные сочинения древности, которые стали доступны с началом гуманизма и с проникновением на Запад греческих рукописей из Константинополя. «Я принял на себя труд перечитать, – писал Коперник, – книги всех философов, которые только мог достать, желая найти, не высказывал ли когда кто-нибудь мнения, что у мировых сфер существуют движения, отличные от тех, которые предполагают преподающие в математических школах. Сначала я нашел у Цицерона, что Никет высказывал мнение о движении Земли, затем я встретил у Плутарха, что этого взгляда держались и некоторые другие» [97. С. 13]. «Я не сомневаюсь, что способные и ученые математики будут согласны со мной, если только (чего прежде всего требует эта философия) они захотят не поверхностно, а глубоко познать и продумать все то, что предлагается мной в этом произведении... Не секрет, что Лактанций, вообще говоря знаменитый писатель, но небольшой математик, почти по-детски рассуждал о форме Земли, осмеивая тех, кто утверж-



Николай Коперник (польск. Mikolaj Kopernik; 19 февраля 1473 – 24 мая 1543). Великий польский астроном и математик. Впервые обосновал гелиоцентрическое построение Солнечной системы

дал, что Земля имеет форму шара. Поэтому ученые не должны удивляться, если нас будет тоже кто-нибудь из таких осмеивать. Математика пишется для математиков, а они, если я не обманываюсь, увидят, что этот наш труд будет в некоторой степени полезным...» [97. С. 14]. «И так как цель всех благородных наук – отвлечение человека от пороков и направление его разума к лучшему, то больше всего это может сделать астрономия вследствие представляемого ею разуму почти невероятно большого наслаждения» [97. С. 16]. Поддерживаемый критическим отношением к учению Аристотеля, царившим в среде некоторых схоластиков, он начал свой труд о движении небесных тел в 1507 г., за 36 лет до его опубликования. Вместе с необходимыми математическими вычислениями он предложил новую теорию, сохранившуюся в основе до наших дней. Коперник заменил суточное вращение небесной сферы вращением Земли вокруг своей оси. Он «остановил Солнце» и его наблюдаемое движение с Земли заменил обращением ее вокруг Солнца. Считая орбиты планет правильными окружностями, Коперник вычислил их относительные радиусы и расположил планеты в новом порядке их удаления от Солнца: Меркурий, Венера, Земля и Луна, Марс, Юпитер, Сатурн, заставив их вращаться вокруг Солнца. Если гипотезы о первых двух движениях высказывались пифагорейцами и Аристархом, но не были подкреплены математическими расчетами, то движение планет вокруг Солнца стало новой гипотезой и очень просто объяснило наблюдаемое движение планет. Все запутанные передвижения планет вперед и вспять относительно неподвижных звезд и их переменную яркость можно было толковать как результат того, что мы смотрим на эти планеты с движущейся Земли.

Хотя Коперник стремился к максимальной простоте, для согласия с наблюдениями ему пришлось предположить эксцентricность орбит планет и ввести маленькие эпициклы. Эти эпициклы и дифференты были окончательно отброшены лишь Иоганном Кеплером. На протяжении почти всей жизни Коперник воздерживался от полного опубликования теории и после долгих колебаний решил опубликовать свое главное сочинение «De revolutionibus» – «Об обращении небесных сфер». Книга состоит из шести частей. Вначале говорится о шарообразности мира и Земли, приводятся интересные гипотезы о видимой части Вселенной: «...Небо неизмеримо велико по сравнению с Землей и представляет бесконечно большую величину; по оценке наших

чувств Земля по отношению к нему как точка к телу, а по величине как конечное к бесконечному», необходимые сведения из тригонометрии и каталог звезд. Во второй части даны основы сферической астрономии и правила вычисления видимых положений звезд и планет на небесном своде. В третьей обсуждается движение Земли вокруг Солнца, говорится о прецессии или предварении равноденствий. В четвертой – о Луне, в пятой и шестой описаны движения планет и радиусы их орбит. В предисловии к книге Коперник писал: «Я долго в душе колебался, следует ли выпускать в свет мои сочинения, написанные для доказательства движения Земли, и не будет ли лучше последовать примеру пифагорейцев и некоторых других, передававших тайны философии не письменно, а из рук в руки, и только родным и друзьям... Мне кажется, что они, конечно, делали это не из какой-то ревности к сообщаемым учениям, как полагают некоторые, а для того, чтобы прекраснейшие исследования, полученные большим трудом великих людей, не подвергались презрению тех, кому лень хорошо заняться какими-нибудь науками, если они не принесут им прибыли или если увещевания и пример других подвигнут их к занятиям свободными науками и философией, то они вследствие скудости ума будут вращаться среди философов, как трутни среди пчел» [97. С. 11]. Коперник скончался 24 мая 1543 г., в день, когда друзья принесли ему первый экземпляр его книги. В тот день и несколько десятилетий спустя мало кто понимал, что в западном мировоззрении произошел переворот. Первоначально учение Коперника не было запрещено католической церковью, проявлявшей во время Возрождения широту и терпимость в области интеллектуальных изысканий. Редактор книги – протестант Осиандер – в предисловии представил ее как формальный и простой метод вычисления движения планет, а не как теорию реального мира. Сам Коперник был уважаемым каноником одного из католических соборов и после его смерти сочинение «De revolutionibus» вначале даже изучалось на кафедрах астрономии в католических университетах. Определенная им продолжительность года (365 дней 5 часов 55 минут 58 секунд) была основана на расчетах, произведенных согласно коперниковой системе, и введена церковью в григорианский календарь, которым мы до сих пор пользуемся. Для многих современников Коперника были ясны слабые места в его теории, которая не объяснила, почему мы не ощущаем вращение Земли и земные предметы не слетают с нее при движении вокруг Солн-

ца, а при падении всегда стремятся к ее поверхности. Если не существует кружащихся эфирных сфер, то почему планеты и Земля могут двигаться вообще и не «слетают» со своих орбит? Если звезд много и они так далеки, то насколько велика Вселенная и где ее центр? Если Земля не центр Космоса, то где место Богу в нем? «Нам трудно представить себе тот эффект, который произвела теория Коперника на мыслящих людей XVI столетия... Вместе со сферами исчезли небеса как обитель блаженных душ, потеряло смысл различие между небесным и земным, место, занимаемое человеком во Вселенной, стало неопределенным... Сам Коперник... придерживался тех же взглядов, что и другие ученые Средневековья, и если бы он мог предвидеть, к чему приведет созданная им теория, то, вероятно, пришел бы в ужас от ответственности за содеянное им. Но именно благодаря его трудам смогла возникнуть новая научная философия» [10. С. 110].

По мере того как астрономы проверили вычисления Коперника и его последователи стали пропагандировать новую систему, пробуждая к ней интерес ученых и передовых людей того времени, она стала вызывать открытую оппозицию церкви. Теория Коперника оспаривала самые основополагающие принципы христианской религии, и ее неприятие зародилось вначале в среде реформаторов-протестантов, в глазах которых она допустила осквернение первородного христианства и библейской истины, противореча тем местам в Священном Писании, где говорилось о неподвижности Земли. Глава реформационного движения Мартин Лютер назвал Коперника выскочкой-астрологом, «который хочет перевернуть все искусство астрономии», поскольку, «как указывает Священное писание, Иисус Навин велел остановиться Солнцу, а не Земле». Кальвин, приводя место из Псалмов «потому тверда вселенная, не поколеблется», спрашивал: «Кто осмелится поставить авторитет Коперника выше авторитета Святого Духа?».

Несмотря на осознание необходимости пересмотра многих религиозных догм, католическая церковь к началу XVII в. была вынуждена встать в решительную оппозицию по отношению к теории Коперника и ее последователям, особенно после того как Г. Галилей и другие развили философские следствия его учения. В 1600 г. был публично казнен Джордано Бруно, широко пропагандировавший гелиоцентрическую теорию, отстаивавший концепцию о множественности миров и бесконечности Вселенной. В 1616 г. собрание богословов – «подготовителей суде-

ных дел святой инквизиции» – приняло решение об осуждении и запрещении творения Коперника: «Учение, что Солнце находится в центре мира и неподвижно, ложно и нелепо, еретично и противно священному писанию. Учение же, будто Земля не находится в центре мира и движется, обладая к тому же суточным вращением, ложно и нелепо с философской точки зрения, с богословской же по меньшей мере ошибочно». Книга Коперника была внесена «впредь до исправления» в «Индекс запрещенных книг» и оставалась под запретом до 1833 г. «В те дни церковь ревностно оберегала свою власть и настаивала на беспрекословном подчинении. Всякий, кто подвергал сомнению авторитет церкви или не соглашался с ее учением, рисковал жизнью, и, по мнению церкви, своей душой. Таких людей в те времена было немного. Это были мученики науки. Проповедующий новую теорию ученый мог быть безопасным для церкви; однако тот, кто настаивал на истинности этой теории, оказывался уже бунтовщиком. А кто ниспровергает что-то, может восстать и по другому поводу, кто настойчиво спорит, способен восстать и против церкви или государства. ...Каждая эпоха имеет группу, а иногда несколько групп ученых-мятежников, которых преследуют и осуждают, а затем по прошествии некоторого времени начинают считать безвредными. Некоторые из таких людей просто чудаки, другие же – мудрые пророки, определяющие характер развития человечества и знаний, люди, которые намного опережают свое время» [10. С. 111].

В датском городе Кнудstrup 14 декабря 1546 родился **Тихо Браге** (латинизированная форма датского имени Тюге), который первым в Европе начал проводить систематические и высокоточные астрономические наблюдения. Они и помогли Кеплеру открыть законы движения планет. Браге был великим астрономом-наблюдателем, выдающимся организатором науки и конструктором астрономических инструментов. Отец Тихо Браге, Отте (Otte Brahe), как и многие из его предков, был одним из высших сановников в датском государстве. В семье Отте было 10 детей, и, по древнему обычаю викингов, одного из мальчиков – Тихо – передали на воспитание в бездетную семью брата Йергена, адмирала королевского флота.

Адмирал дал приемному сыну блестящее образование. В 12-летнем возрасте Тихо поступает в университет Копенгагена и через три года изучения продолжает обучение в Лейпциге. Впоследствии Браге так описывает это время своей жизни: «Еще у се-

бя на родине в Дании я раздобыл несколько книг, главным образом эфемерид. Они-то и позволили мне ознакомиться с началами астрономии – предмета, к которому я питал природную склонность. В Лейпциге я приступил к более основательному изучению астрономии. Я поступал так вопреки неодобрению и противодействию гувернера, выполнявшего волю моих родителей, желанием коих было, чтобы я изучал юриспруденцию (что я и делал, насколько позволял мой возраст). Я тайком покупал книги по астрономии и тайком читал их, чтобы гувернер ничего не узнал о моих занятиях. Постепенно я научился различать созвездия на небе и через месяц мог безошибочно называть те из них, которые расположены в видимой части неба. Чтобы запомнить созвездия, я пользовался небольшим небесным глобусом размером с кулак, который в тайне от всех брал с собой по вечерам. Все это я освоил сам, без чьей-либо помощи и руководства... Вскоре мое внимание привлекли движения планет. ...В 1564 г. я тайно приобрел деревянный астрономический “посох Якова”... Заполучив посох Якова, я не упускал ни одного удобного случая, когда ночь выдавалась звездной, и неустанно производил наблюдения. Нередко я проводил в бдении всю ночь напролет. Мой гувернер, ничего не подозревая, мирно спал, поскольку я производил наблюдения при свете звезд и заносил полученные данные в специально заведенную книжечку, которая сохранилась у меня поныне. Вскоре я заметил, что угловые расстояния, которые по показаниям посоха Якова должны были

Тихо Браге (датск. Tyge Ottesen Brahe, лат. Tycho Brahe; 14 декабря 1546 – 24 октября 1601) – великий датский астроном-наблюдатель. Основатель практической астрономии, который точностью своих наблюдений превзошел всех своих предшественников





Тихо Браге в своей обсерватории

совпадать, превращенные посредством математических выкладок в числа, не во всем согласуются друг с другом. После того как мне удалось обнаружить источник ошибки, я изобрел таблицу, позволившую мне вносить поправки и тем самым учитывать дефекты посоха. Приобрести же новый лимб все еще не представлялось возможности, поскольку гувернер, державший в своих руках завязки от кошелька, не допустил бы подобных трат. Вот почему я, живя в Лейпциге и позднее по возвращении на родину, произвел при помощи этого посоха множество наблюдений» [103. С. 379]. Несмотря на отсутствие специальных астрономических инструментов, в 1563 г. он наблюдал прохождение Сатурна через Юпитер и сравнивал отмеченное им время с известными табличными данными. Выяснилось, что расхождение с таблицей Птолемея, уточненной Альфонсом Кастильским (~1260 год), составляет один месяц, с таблицей Коперника – несколько дней.

В 1365 г. после смерти приемного отца Тихо получил значительное состояние, которое в основном пустил на научные занятия, и решил посвятить свою жизнь астрономии. В то время занятия ею вызывало уважение у просвещенных людей, суеверные опасения у простолюдинов, презрение невежественной знати, подозрения церкви. Поэтому при возвращении домой Тихо оказали холодный прием, с презрением относясь к его занятиям астрономией. Он покидает родину и уезжает в Германию. В 1569 г. в Аугсбурге он познакомился с братьями Иоганном и Паулем Хенцелями, которые были страстными любителями астрономии. Они свели его со способными мастерами, у которых Браге заказал по своим собственным чертежам на значительную сумму сооружение ряда астрономических инструментов. В числе этих приборов был квадрант высотой 11 м, снабженный кругом

около 5,7 м и проградуированный до одной угловой минуты, полу-секстант радиусом около 2 м и небесный глобус 1,5 м в диаметре. Внушительные размеры приборов объяснялись тем, что до изобретения телескопа наблюдения велись невооруженным глазом. Поэтому существенного увеличения точности таких визуальных наблюдений можно было добиться лишь путем увеличения размеров инструментов – квадрантов и секстантов. С новыми приборами Браге продолжил точные измерения планет.

В 1571 г. ему пришлось возвратиться в Данию к заболевшему отцу. После его смерти он унаследовал родовое поместье Кнудstrup, где оборудовал лабораторию для занятий астрономией, и почти полностью занялся хозяйством, но вскоре исключительное астрономическое явление вернуло его к науке о небе. В 1572 г. через месяц после кровавой Варфоломеевской ночи, выйдя из дома, Браге увидел в созвездии Кассиопеи новую невероятной яркости звезду. Звезда, как выяснилось позже, была сверхновой, вспыхнувшей в нашей Галактике. Она постепенно меркла и наблюдалась в течение 17 месяцев, пока не стала недоступной невооруженному глазу. Согласно Аристотелю, рождение звезды не могло быть в вечном и неизменном мире. По настоячивым просьбам друзей результаты своих наблюдений он описал в книге «О новой звезде». Вероятно, новая звезда окончательно убедила 30-летнего Браге, что главным делом его жизни должна быть астрономия. Кеплер впоследствии писал: «Пусть эта звезда ничего не предсказала, но во всяком случае она возвестила и создала великого астронома» [95. С. 121].

В 1576 г. датский король Фридрих II – усердный покровитель науки и искусств – по просьбе друзей Браге назначил ему содержание для астрономических исследований. «Так что мне нечего беспокоиться о чем-нибудь, кроме как о том, чтобы прославить страну, короля и самого себя», писал он в письме другу. Кроме того, Браге был пожалован целый остров Вен в Зундском проливе, предоставлена огромная сумма денег (бочка золота) на строительство дома и обсерватории. В его пользу были отведены и сборы от аренды острова крестьянами. Добавив крупную сумму из собственных денег, Тихо за несколько лет выстроил здесь целый замок, названный Ураниборг (Небесный замок), внутри него он разместил несколько обсерваторий с раздвижными поворачивающимися крышами, библиотеку с огромным небесным глобусом, большую химическую лабораторию и даже тюрьму в подвале. Щедрая государственная поддержка позволи-

ла ему создать знаменитый на всю Европу научный центр и получить лучшие результаты для своего времени.

С 1577 г. Браге приступил к работе и 20 лет вплоть до 1597 г. редкую ночь проводил без систематических наблюдений за небесными светилами. Он был одним из тех, кто понял, что точные приборы и скрупулезные методы важны не только для практических приложений астрономии, но и для теории. Полученные данные могли бы решить вопрос об истинном устройстве нашей планетной системы. Одним из первых Тихо Браге оценил во всей полноте важность многократных повторений одного и того же наблюдения при разных условиях с той целью, чтобы случайные источники погрешностей отдельных наблюдений взаимно нейтрализовали друг друга. О том, каким тщательным и систематическим образом проходили исследования Тихо Браге, можно узнать, например, из его произведения «Механика обновленной астрономии»: «Мы вправе утверждать с неколебимой уверенностью, и наше мнение подтверждается наблюдениями, что положения неподвижных звезд определены нами с абсолютной и непогрешимой точностью. Положения множества звезд мы определяли по несколько раз, с помощью различных инструментов и неизменно приходили к одному и тому же результату. При выполнении этой работы мы не использовали механических устройств, хотя у нас и был большой бронзовый глобус, а находили положение каждой звезды при помощи громоздких тригонометрических вычислений... Если бы древние и наши предшественники затратили бы столько труда на определение положений звезд, то их каталог, дошедший до нас со времен Гиппарха, не изобиловал бы ошибками» [103. С. 389].

В ноябре 1577 г. сразу же по окончании строительства Ураниборга великий астроном наблюдал и яркую комету. Тихо Браге тщательно проследил ее траекторию вплоть до исчезновения видимости в январе 1578 г. Путем измерения параллакса и сопоставления своих данных с полученными коллегами в других обсерваториях, он доказал, что кометы – не атмосферное явление. Это означало, что Аристотель был не прав: твердых кристаллических небесных сфер не существует, пространство является пустым. Браге так написал об этом открытии: «По моему мнению, сферы должны быть исключены из небес. Я понял это благодаря кометам, появлявшимся в небе. Они не следуют законам ни одной из сфер, но, скорее, действуют вопреки им. Движением комет четко доказано, что небесная машина – это не твердое те-

ло, непроницаемое, составленное из различных реальных сфер, как до сих пор думали многие, но текучее и свободное, открытое во всех направлениях, которое не чинит абсолютно никаких препятствий свободному бегу планет» [9. С. 188]. Если наблюдения Коперника исчислялись десятками, то у Тихо Браге наблюдений одного только Солнца – причем непрерывных, изо дня в день, из года в год в течение 20 лет, насчитывалось несколько тысяч. В результате он измерил длину года с ошибкой меньше секунды и составил таблицы движения Солнца, по которым его положение на небе определялось с точностью до угловой минуты. Наиболее важными для последующего развития астрономии оказались его весьма точные по тем временам измерения положения Марса. Они проводились непрерывно в течение 16 лет, за которые Марс успел 8 раз обойти вокруг Солнца. Планета наблюдалась по всей орбите. Браге разработал смешанную не слишком удачную космологическую полуптолемеевскую-полукоперниковскую систему. Согласно ей Солнце находится в центре Солнечной системы (т. е. Вселенной). Вокруг него вращаются все планеты кроме Земли, вокруг которой за год Солнце описывает полный круг. Тихо Браге полагал, что древняя система Птолемея неестественна и весьма запутанна. Не одобрял он также теорию Коперника, утверждая, что Земля неподвижна и находится в центре мира, следуя мнению древних и Священному Писанию». Все сочинения Тихо доказывают, что он питал к Копернику глубочайшее уважение. Когда ему подарили три линейки, которые Коперник употреблял для своих наблюдений, Тихо повесил их на самом видном месте в своей лаборатории и под ними латинские стихи своего сочинения со следующим содержанием: «Земля не производила такого гения в продолжение многих веков. Древние гиганты, желая взойти на небо, ставили горы на горы, Пелон на Оссу; но крепкие физическою силою и слабые умом, они не могли успеть в своем дерзком намерении. Коперник, слабый телом, но сильный гением, только посредством трех кусков дерева достиг последних вершин Олимпа. Не оценены все вещи, оставшиеся после этого великого человека; не оценены и деревянные его куски» [52. С. 34].

В 1597 г. датский трон занял сын Фридриха Кристиан IV, который, остро нуждаясь в деньгах на содержание армии, лишил обсерваторию финансовой поддержки, к этому времени значительно урезанной. Более того, он поставил Браге в вину, что тот помещал в ураниборгскую тюрьму арендаторов, уклоняющихся

от уплаты ренты. Сбережений у Браге почти не осталось, все было вложено в Ураниборг, и в апреле 1597 г. он навсегда покинул научный центр. В последнем письме королю Кристиану (10 июля) он писал: «Если бы у меня была возможность продолжать мою работу в Дании, я бы не отказался от этого. Я бы как прежде и еще лучше делал бы все, что могу, в честь и славу Вашего Величества и моей собственной родной земли, предпочитая это всем другим правителям, если бы эта моя работа могла выполняться при благоприятных условиях и без несправедливости ко мне» [57. С. 180]. В ответном письме 8 октября 1597 г. король перечислял разные прегрешения Браге, который редко ходил к причастию, не помогал и даже притеснял священников местной церкви и т. п. Далее в письме говорилось: «Не беспокойте Нас тем, покинете ли вы страну или останетесь в ней... Если вы желаете служить как математик и будете поступать так, как вам велют, тогда вы должны начать с предложения своих услуг и с просьбы о них, как подобает слуге... Ваше письмо носит частный характер, написано дерзко и ему не хватает здравого смысла, как будто Мы обязаны отчитываться перед вами, по какой причине Мы производим какие-либо изменения во владениях короны» [57. С. 182]. Спустя два года Браге поступил на службу к императору Рудольфу II и вблизи Праги, тогдашней резиденции двора, ему отвели дом, из которого Рудольф предполагал создать новый Ураниенбург. Здесь Тихо (иногда вместе с императором, тайно приезжавшим к нему) приступил к астрономическим наблюдениям. Браге пришел к выводу, что для обработки накопленных за 20 лет данных ему нужен молодой талантливый помощник-математик. Узнав из переписки о незаурядных математических способностях Иоганна Кеплера, Тихо пригласил его к себе. В феврале 1600 г. Браге встретился с ним и объяснил главную задачу: вывести из наблюдений новую систему мира, которая должна прийти на смену как птолемеевской, так и коперниковой. Он поручил Кеплеру исследовать движение планеты Марс, наблюдения за которой совсем не укладывались не только в схему Птолемея, но и в модель Браге. В 1601 г. Тихо Браге и Кеплер начали работу над новыми, уточненными астрономическими таблицами, которые в честь императора получили название «Рудольфовых» (лат. *Tabula Rudolphinae*); они были закончены в 1627 г. и служили астрономам и морякам вплоть до начала XIX в. Но 24 октября 1601 г. Тихо Браге неожиданно умер. По приказу Рудольфа II великий датский астроном был по-

хоронен с рыцарскими почестями в пражском Тынском соборе и на надгробной плите ученого высечен девиз «Не власти, не богатства, а только скипетры науки вечны». Все данные наблюдений и инструменты Браге император велел передать Иоганну Кеплеру.

Тихо Браге принадлежит к выдающимся ученым своего века, основателям практической астрономии. Всю жизнь он посвятил наблюдениям неба, неустанным трудом и изобретательностью добившись результатов, не виданных ранее нигде в мире по точности наблюдений и широте охвата. В 1599 г. в письме канцлеру Баварии Кеплер написал: «Все должны смолкнуть и внимать Тихо, который отдал 35 лет жизни наблюдениям и своими глазами видел больше, чем многие другие всей остротой своего разума. Любой его инструмент стоит больше, чем все мое имущество и имущество всех моих родных. По сравнению с ним Птолемей, Альфонс и Коперник выглядели просто мальчишками, если бы Тихо не имел обыкновения приписывать им большую часть своих знаний и идей, послуживших толчком к его открытиям...» [94. С. 185].

1.4. ОТ И. КЕПЛЕРА И Г. ГАЛИЛЕЯ ДО И. НЬЮТОНА

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 г. в маленьком городке Вейле близ Штутгарта в бедной протестантской семье. В те времена Германия была раздроблена на мелкие государства; междоусобные и религиозные войны разоряли население и препятствовали развитию культуры и просвещения. Жизнь Кеплера была полна препятствий и лишений. Гёте писал: «Когда историю жизни Кеплера сопоставляешь с тем, кем он стал и что он сделал, радостно удивляешься и при этом убеждаешься, что истинный гений преодолевает любые препятствия» [58. С. 7]. Кеплер родился семимесячным хилым ребенком, в детстве много болел, чуть не умер от оспы, страдал близорукостью и монокулярной полиопсией, при которой фиксируемый одиночный объект кажется множественным. В 9 лет его взяли из школы, и до 12 лет он прислуживал в сельской родительской таверне. Поэтому ему с большим трудом удалось окончить школу и поступить в 1589 г. в Тюбингенский университет. Здесь он с увлечением занимался математикой и астрономией. Его учитель профессор Местлин в университете преподавал астрономию по Птолемею, но втайне дома знакомил ученика с основами нового учения Коперника.

Вскоре Кеплер стал горячим и убежденным сторонником теории Коперника, защищал ее во время университетских дискуссий. Открытая пропаганда учения Коперника очень скоро навлекла на него ненависть местных богословов.

По окончании университета в 1593 г. Кеплер получил степень магистра, но, обвиненный в свободомыслии, не был допущен к богословской карьере и был вынужден скитаться по разным городам, занимаясь случайными работами. Наконец благодаря незаурядным математическим способностям в 1594 г. он был приглашен читать лекции по математике и «нравственной философии» в протестантской гимназии города Граца, столицы провинции Штирии (ныне в Австрии): «Я воспитывался на счет герцога Вюртембергского и ...решился принять первую предложенную мне должность, хотя и с не особенной охотой» [58. С. 29], – писал он позже. Обстановка, окружавшая Кеплера в Граце, мало благоприятствовала его научной деятельности. По отзывам друга Кеплера, штирийская знать ненавидела науку и проявляла поразительное невежество во всем. Изучение математики не вызывало энтузиазма у дворянских и бюргерских детей и не было, видимо, обязательным. В первый год его уроки еще посещало несколько учащихся, на следующий год не осталось ни одного. Однако, по мнению инспекторов, контролировавших работу преподавателей, это не было виной учителя, так как на «изучение математики не всяк способен». Взамен математики Кеплеру пришлось преподавать арифметику, классическую литературу (Вер-



Иоганн Кеплер (нем. Johann Kepler; 27 декабря 1571, Вайль дер Штадт – 15 ноября 1630, Регенсбург) – немецкий математик и великий астроном. Основатель теоретической астрономии

гилия), риторику и другие предметы. Вместе с должностью преподавателя он получил также звание и должность «landschaftsmathematikus» (провинциального математика), в обязанность которого входило ежегодное составление календарей, куда, в частности, входили предсказания астрологического характера. Кеплер неоднократно весьма скептически и самокритично оценивал свои занятия по составлению календарей и астрологии для заработка: «Люди ошибаются, думая, что от небесных светил зависят земные дела». В одном из писем он высказывается так: «Чтобы ищущий истину мог свободно предаваться этому занятию, ему необходимы, по меньшей мере, пища и кров. У кого нет ничего, тот раб всего, а кому охота идти в рабы? Если я сочиняю календари и альманахи, то это, без сомнения, – прости мне, Господи, – великое рабство, но оно в настоящее время необходимо. Избави я себя хоть на короткое время от этого – мне пришлось бы идти в рабство еще более унижительное. Лучше издавать альманахи с предсказаниями, чем просить милостыню. Астрология – дочь астрономии, хоть и незаконная, и разве не естественно, чтобы дочь кормила свою мать, которая иначе могла бы умереть с голоду» [58. С. 34]. Идея поиска гармонии мира возникла у Кеплера еще в молодые годы. Он был математиком-неоплатоником и неопифагорейцем. Он считал, что природа создана в соответствии с математическими правилами, и искал математическую схему, лежащую в основе планетной системы.

Еще в первой своей книге «Тайна мира» (Mysterium Cosmographicum) Кеплер пытался вывести из единого геометрического принципа число планет, их относительные размеры и характер движения. В ней исследователь задался целью найти тайную гармонию Вселенной, для чего сопоставил с орбитами пяти известных тогда планет (сферу Земли он выделял особо) разные «платоновы тела» (правильные многогранники). Геометрия Солнечной системы (тайна мироздания), как пишет Кеплер, заключалась в следующем: «Орбита Земли является мерой всех остальных орбит. Опиши вокруг нее додекаэдр, тогда сфера, которая в свою очередь опишет его, будет сфера Марса. Вокруг сферы Марса опиши тетраэдр, тогда сфера, которая его обнимет, будет сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опиши куб, – заключающая его сфера будет сферой Сатурна. В орбиту Земли впиши икосаэдр, – вписанная в него сфера будет сферой Венеры, в сферу Венеры впиши октаэдр, – в него будет вписана сфера Меркурия. Так ты поймешь причину числа планет»

[9. С. 188]. Хотя эта работа после дальнейших открытий Кеплером некруговых траекторий движения планет оказалась несостоятельной, тем не менее веру в наличие скрытой математической гармонии Вселенной Кеплер сохранил до конца жизни.

Книгу «Тайна мира» он послал Галилею и Тихо Браге в надежде получить вместе с отзывом столь необходимые ему астрономические данные. В этой же работе он высказал предположение, что все планеты движутся благодаря влиянию Солнца. Из Падуи 4 августа 1597 г. пришел ответ Галилея, где были следующие строки: «Я также благодарю тебя, и особенным образом за то, что ты удостоил меня доказательством твоей дружбы. В твоей работе я пока познакомился только с предисловием, из которого, однако, понял твои намерения и могу поистине порадоваться, что имею такого союзника в поисках истины. Достойно сожаления, что столь редки те, кто следует в своих философских размышлениях безошибочным путем. Но здесь не место оплакивать ничтожность нашего времени, а, скорее, следует мне поздравить самого себя с обретением столь убежденного защитника истины. ...Я много работал над тем, чтобы доказать, сколь ошибочны аргументы, выдвинутые против гипотезы Коперника, но по сию пору не решился ничего опубликовать, напуганный случившимся с Коперником, нашим учителем, который хотя и обрел бессмертную славу среди немногих, был, однако, осмеян и освистан бесконечным числом всех прочих – столь огромно число глупцов. Я бы осмелился обнародовать свои размышления, будь таких, как ты, больше, но поскольку это не так, я вынужден отложить» [9. С. 193]. В дальнейшем они вели оживленную переписку, и это обстоятельство (общение с «еретиком»-протестантом) на суде над Галилеем было особо подчеркнуто какотягающее вину Галилея.

После письма Кеплера Браге не спешил делиться накопленными наблюдениями. Огорченный неудачей, Кеплер писал своему учителю Местлину 26 февраля 1599 г.: «Вот мое мнение о Тихо. Он богат сверх меры, но, подобно большинству богачей, не знает, как распорядиться своим богатством. Необходимо поэтому взять на себя его труд (что я и сделал с подобающей деликатностью) и лишить его накопленных богатств, вынудить опубликовать без утайки наблюдения, и притом все» [98. С. 257]. Наконец Кеплер получил приглашение и нанес визит Браге. В письме Херварту фон Хоэнбургу от 12 июля 1600 г. Кеплер сообщает: «Я бы закончил свои исследования гармонии мира, если бы ас-

трономия Тихо не захватила меня настолько, что чуть было не сошел с ума... Одной из важнейших причин моего визита к Тихо было желание получить от него точные значения эксцентриситетов, чтобы с их помощью проверить Тайну мироздания и уже упоминавшуюся Гармонию мира, ибо априорные умозаключения должны не противоречить очевидному, а наоборот, находиться в согласии с ним. Узнать что-либо у Тихо мне не удалось. Лишь за обедом в застольной беседе он между прочим упоминал сегодня – апогей одной планеты, завтра – узлы другой» [98. С. 257]. Визит в Бенатек убедил Кеплера в том, что одному Браге не под силу справиться с обработкой наблюдений. «Тихо обладал лучшими наблюдениями и, следовательно, материалом для возведения здания, – писал Кеплер. – У него есть работники и все необходимое. Недостает ему лишь архитектора, который использовал бы все это в соответствии с его же, Тихо, замыслом. Ибо сколь ни счастлив ниспосланным ему даром Тихо и сколь ни искусен он в архитектуре, все же разносторонность задач и то обстоятельство, что истина подчас бывает запрятана довольно глубоко, препятствуют его успехам. К тому же начинает сказываться и возраст, ибо дух и силы его ослабевают и ослабеют через несколько лет настолько, что ему станет трудно делать все самому» [98. С. 257]. В Граце Кеплер провел 6 лет. В 1597 г. он женился на вдове Барбаре Мюллер фон Мулек. Их первые двое детей умерли во младенчестве, а жена заболела эпилепсией. В католическом Граце начались гонения на протестантов, Кеплер был занесен в список изгоняемых «еретиков» и под страхом смертной казни был вынужден покинуть город. В это время Тихо Браге написал Кеплеру: «Приезжайте не как чужестранец, а как друг; приезжайте и помогите мне вести наблюдения с теми приборами, которыми я располагаю».

В 1600 г. Кеплер прибыл в Прагу, и проведенные здесь 10 лет были самым плодотворным периодом его жизни. После смерти Тихо Браге император Рудольф II назначил Кеплера «имперским математиком» с жалованьем в половину меньшим, нежели получал Браге, и вменил ему в обязанность завершить работу над таблицами астрономических наблюдений. Однако из-за нескончаемых войн императорская казна была часто пуста и жалованье Кеплеру платили редко и скудно. Ему пришлось также вести многолетнюю тяжбу с наследниками Тихо Браге, которые пытались отобрать у него имущество покойного и результаты астрономических наблюдений. К моменту кончины Тихо

Браге Кеплер уже начал изучение орбиты Марса. Для этого по теории Птолемея требовалось найти радиус его орбиты, смещение ее центра относительно Солнца, направление, в котором она смещена, и точку экванта. Результаты этих исследований были опубликованы Кеплером в 1609 г. в книге «Новая астрономия».

Кеплерово сочинение по форме и содержанию значительно отличается от многих научных трактатов того времени. Если Коперник, Галилей и Ньютон знакомят нас только с конечными результатами своих научных достижений, то Кеплер откровенен с читателем, совершенно сознательно описывает ход работы во всех деталях, включая все неудачи и успехи, ошибки и гениальные догадки, ловушки и их обходы. Почему он так поступает, он объясняет в предисловии: «Для меня важно не просто сообщить читателю, что я должен сказать, но прежде всего ознакомить его с доводами, оговорками, счастливо преодоленными опасностями, которые привели меня к моим открытиям. Когда Христофор Колумб, Магеллан и португальцы, из которых первый открыл Америку, второй Китайский океан, а последние – морской путь вокруг Америки, повествуют, как они сбивались с пути и блуждали в своих путешествиях, мы не только прощаем им это, но, более того, мы не желаем пропуска этих рассказов, так как тогда при чтении было бы потеряно впечатление о всем значительном в их предприятиях. Пусть же поэтому и мне не поставят в вину, когда я, вызывая у читателя интерес, пойду подобным путем в своем изложении. Конечно, при чтении, например, похождений аргонавтов, мы сами не принимаем участия в их злоключениях, а трудности и тернии на моем мысленном пути могут задеть и самого читателя, но таков уж жребий всех математических сочинений» [58. С. 93]. Вначале исследований Кеплер, сохраняя на первых порах движение круговым, отбрасывает аксиому равномерного движения. При этом он руководствуется прежде всего физическими соображениями: если Солнце управляет движением, является его источником, то его сила должна действовать на планету более интенсивно, когда она находится ближе к источнику, и менее интенсивно, когда планета от него удалится, следовательно, планета будет двигаться с большей или меньшей скоростью в зависимости от ее расстояния до Солнца. Кеплер изгнал из своей системы эпициклы, но оставил экванты и предположил отличие эксцентрических расстояний (см. рис. 1.2). Не зная, какое положение в пространстве занимает линия ECQ , он, задавая произвольно ее направление, старался в согласии с на-

блюдениями расположить круговую орбиту. Такой метод подбора потребовал огромной вычислительной работы. Полученное через год решение расходилось с данными наблюдений на 8 угловых минут дуги. Но они указали путь к обновлению всей астрономии и стали материалом для большей части его работы. Он пришел к выводу, что предложенная им схема не отвечает действительности. Окружность полностью определяется заданием трех точек на ней, любая другая кривая линия требует знания положения большего количества точек. Для определения формы орбиты Марса, если она не была окружностью, требовалось прежде всего уточнить орбиту небесного тела, на котором размещен наблюдатель, т. е. самой Земли. Ведь из неправильного представления о движении наблюдателя выводы о движении наблюдаемых объектов будут тоже неверны. Если было возможно в каждый момент находить непосредственно величину отрезка Солнце–Земля, то орбиту последней несложно определить. Но такой возможности у Кеплера не было. Для уточнения орбиты Земли нужно измерять ее положение относительно двух неподвижных точек. Тогда, измеряя угол, под которым они видны, можно строить треугольники и вычислять местоположение наблюдателя, а значит, и Земли. Роль одной такой точки могло играть Солнце. Гениальная догадка Кеплера состояла в выборе Марса как второй неподвижной точки с известной продолжительностью его года. Через каждый марсианский год его положение будет повторяться, в то время как положение Земли на ее орбите каждый раз будет другим. Используя этот метод и данные многолетних наблюдений Браге за Марсом, Кеплер нашел достаточное количество точек орбиты Земли и ее скорость на разных участках орбиты. По известной траектории Земли Кеплер смог определить и форму орбиты Марса. Требовалось найти закон, по которому меняется скорость Земли. Исходя из гипотезы о притяжении планеты к Солнцу, Кеплер предположил, что скорость должна быть обратно пропорциональна расстоянию от Земли до Солнца. Он разбил орбиту на 360 частей и стал проверять гипотезу для разных ее участков. Вскоре из чертежа стало ясно, что за равные промежутки времени Земля и Марс проходят равные площади секторов орбиты.

Теперь Кеплеру предстояло дать математическое описание той кривой (по 40 вычисленным точкам), по которой движется Марс, и эта задача оказалась самой сложной и трудоемкой. В течение трех лет ученый использовал метод подбора и закон пло-

щадей: задавалась кривая той или иной формы, вычислялись положения, которые должен был бы занимать Марс на этой предполагаемой орбите в разные моменты, и они сравнивались с наблюдаемыми положениями. Пришлось проводить удивительные по трудности и продолжительности вычисления и проверять одну за другой многие гипотезы. Каждое его вычисление занимало 10 страниц и каждое из них он повторял по 70 раз. «Наука нуждается в творческих умах (гипотезах, теориях), воображении и одновременно в жестком контроле над гипотезами. В истории научной мысли не было, пожалуй, другого ученого, который одновременно имел бы такую силу воображения, как у Кеплера, и столь же критически относился к гипотезам» [9. С. 200]. «Правда лежит между кругом и овалом, как будто орбита Марса есть точный эллипс», – писал Кеплер. Однако, поместив Солнце в его центр, он снова не пришел к согласующемуся с данными наблюдений результату. Эллипс не подходил, пока Кеплер не расположил Солнце в его фокусе. Тогда, в начале 1605 г. все сошлось и встало на свои места. На эллипс легли все точки орбиты, вычисленные из наблюдений. Подобные правила оказались справедливыми для Земли и других планет и были в согласии с законом площадей. В итоге суть законов Кеплера состоит в следующем.

Первый закон Кеплера. *Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце.*

Второй закон Кеплера. *Движение планет таково, что за равные промежутки времени отрезок, соединяющий планету с Солнцем, замечает равные площади: $S_1 = S_2$. Это значит, что в перигелии скорость орбитального движения планеты максимальна, а в афелии минимальна (рис. 1.3).*

Кеплер продолжал астрономические исследования и в 1618 г. открыл еще один закон.

Третий закон Кеплера. *Отношение куба среднего удаления планеты от Солнца к квадрату периода обращения ее вокруг Солнца есть величина постоянная для всех планет.*

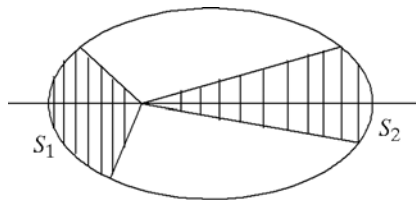


Рис. 1.3

Этот результат Кеплер опубликовал в завершающей книге «Гармония мира» с вдохновенными словами: «Жребий брошен. Я написал книгу либо

для современников, либо для потомков; мне безразлично – для кого. Пусть книга ждет сотни лет своего читателя: ждал же сам Бог 6000 лет, пока явился свидетель» [94. С. 206]. Третий закон Кеплер применяет уже не только к Марсу, но и ко всем прочим планетам (включая, естественно, Землю), а также к спутникам Галилея. Законы Кеплера соединили в себе ясность, простоту и вычислительную мощь.

Кеплер опубликовал много книг и статей; его замечательные математические способности проявились не только в астрономических работах, но и при рассмотрении задачи об измерении объемов («Новая стереометрия винных бочек», 1615), для чего Кеплер предложил способ, содержащий в себе зачатки анализа бесконечно малых. Он стал автором первого обширного (в трех томах) изложения коперниканской астрономии (*Epitome astronomia Copernicanae*, 1617–1622), которое немедленно удостоилось чести попасть в «Индекс запрещенных книг». В эту книгу, свой главный труд, Кеплер включил описание всех своих открытий в астрономии. Летом 1627 г. Кеплер после 22 лет трудов опубликовал за свой счет астрономические таблицы, которые в честь императора назвал «Рудольфовыми». Спрос на них был огромен, так как все прежние таблицы давно разошлись с наблюдениями. Немаловажно, что труд впервые включал удобные для расчетов таблицы логарифмов, служившие астрономам и морякам вплоть до начала XIX в. Именно Кеплер ввел в физику термин «инерция» как приращенное свойство тел сопротивляться приложенной силе. Заодно он, как и Галилей, сформулировал в ясном виде первый закон механики: всякое тело, на которое не действуют иные тела, находится в покое или совершает прямолинейное движение. Кеплер вплотную подошел к открытию закона тяготения, хотя и не пытался выразить его математически. «Гравитацию я определяю как силу, подобную магнетизму – взаимному притяжению. Сила притяжения тем больше, чем оба тела ближе одно к другому. Поэтому тела сильнее сопротивляются отдалению друг от друга, если они еще близки одно к другому», – писал он [100. С. 121]. Кроме того, Кеплер очень подробно проанализировал симметрию снежинок. Его гипотеза, согласно которой наибольшая плотность упаковки шаров достигается при их пирамидальном упорядочивании друг над другом («задача Кеплера») была доказана только в 1998 г. Пионерные работы Кеплера в области симметрии позже нашли применение в кристаллографии и теории кодирования.

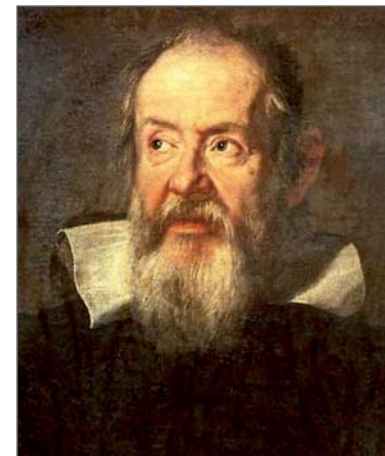
Последние два десятилетия жизни Кеплера были для него особенно тревожными. Еще в 1611 г. болезни унесли в могилу троих его детей и жену. После отъезда из Праги в 1612 г. жизнь Кеплера проходила в непрерывных разъездах, большей частью вследствие политических смут Тридцатилетней войны и религиозных преследований как со стороны католических правителей, так и единоверцев-лютеран. Линц, Ульм, Саган – неполный список городов, в которых он трудился. Семидесятилетнюю мать Кеплера в 1615 г. обвинили в колдовстве, связи с дьяволом, богохульстве и т. п. и заключили в тюрьму, и Кеплеру с большим трудом после шестилетнего процесса (на суде он сам выступил защитником) удалось спасти ее от костра. Умер Кеплер в городе Регенсбурге на постоялом дворе 15 ноября 1630 г., когда тщетно пытался получить хоть часть жалованья, которое за много лет задолжала ему императорская казна. В наследство семейству осталось один изношенный камзол, несколько завалявшихся в карманах медяков, две рубашки, 57 вычислительных таблиц, 27 печатных (частью многотомных) трудов, огромный ворох рукописей (они были изданы спустя почти 200 лет в 22 томах) и 29 тысяч флоринов невыплаченного жалованья. Эпитафия на его могиле, написанная им самим, в переводе гласит: «Прежде я измерял небеса, теперь меряю подземный мрак; ум мой был даром неба – а тело, преобразившись в тень, покоится». Альберт Эйнштейн называл Кеплера «несравненным человеком» и писал о его судьбе: «Он жил в эпоху, когда еще не было уверенности в существовании некоторой общей закономерности для всех явлений природы. Какой глубокой была у него вера в такую закономерность, если, работая в одиночестве, никем не поддерживаемый и не понятый, он на протяжении многих десятков лет черпал в ней силы для трудного и кропотливого эмпирического исследования движения планет и математических законов этого движения! Сегодня, когда этот научный акт уже совершился, никто не может оценить полностью, сколько изобретательности, сколько тяжелого труда и терпения понадобилось, чтобы открыть эти законы и столь точно их выразить» [101. С. 121]. Как точно выразился истолкователь и переводчик на русский язык работ Кеплера, математик и культуролог Ю.А. Данилов: «По масштабу своих свершений, острой наблюдательности и отточенной интуиции, по цельности характера, благородству помыслов, “пчелиному трудолюбию” (А. Эйнштейн) и гениальности озарений, наконец, по разнообразию и важности полученных ре-

зультатов Кеплер даже в ряду самых великих является скорее не правилом, а редким исключением» [98. С. 253].

По чистому совпадению, в 1609 г., когда Кеплер опубликовал в Праге законы планетных движений, в Падуе **Галилео Галилей** направил в небо только что собранный им самим телескоп. Он родился 15 февраля 1564 г. в городе Пизе в знатной, но обедневшей семье. Начальное образование Галилео получил дома. Еще в детстве он проявил склонность к механике, конструируя модели машин. В 1575 г., когда семья переехала во Флоренцию, он был направлен в школу при монастыре Валломброса, где изучал тогдашние «семь искусств», в частности грамматику, риторику, диалектику, арифметику, знакомился с работами латинских и греческих писателей. В 1581 г. Галилео по настоянию отца поступил в Пизанский университет, где должен был изучать медицину. Однако лекции в университете он посещал нерегулярно, предпочитая им самостоятельные занятия геометрией и практической механикой. В это время он впервые познакомился с физикой Аристотеля, работами древних математиков – Евклида и Архимеда. Последний стал его настоящим учителем.

В Пизе Галилей пробыл четыре года, а затем, увлекшись геометрией и механикой, оставил университет и вернулся во Флоренцию. Результатом этого периода жизни Галилея было небольшое сочинение «Маленькие гидростатические весы» (1586), в котором описаны построенные им весы для быстрого определения состава металлических сплавов и геометрическое исследо-

Галилео Галилей (итал. Galileo Galilei; 15 февраля 1564 – 8 января 1642) – великий итальянский мыслитель эпохи Возрождения, основоположник классической механики, астроном, математик, физик, один из основателей современного экспериментально-теоретического естествознания



вание о центрах тяжести телесных фигур. Эти работы принесли Галилею первую известность среди итальянских математиков. Он изготовил несколько рукописных копий работы и попытался их распространить. Так он познакомился с известным математиком того времени – маркизом Гвидо Убальдо дель Монте, автором учебника по механике, известным знатоком архимедовой геометрии, который занимал высокий пост генерала-инспектора всех крепостей и укреплений в герцогстве Тосканском. Маркиз в отличие от пизанских профессоров сумел его правильно оценить. Уже тогда дель Монте говорил, что со времени Архимеда мир не видел такого гения, как Галилей. Восхищенный необыкновенным талантом юноши, маркиз стал его другом и покровителем. По его рекомендации Галилей в 1589 г. получил место профессора математики в Пизанском университете, а в 1592 занял кафедру математики Падуанского университета в Венецианской республике. Профессорам риторики в Падуе, куда он переехал, платили до 1700 флоринов. Галилей согласился с окладом всего в 180 флоринов на должность профессора математики с преподаванием геометрии, механики, астрономии. Курс астрономии он читал, оставаясь в рамках официально принятых воззрений Аристотеля–Птолемея, и даже написал краткий курс геоцентрической астрономии. Однако его действительные взгляды на систему мироздания были совершенно иными. В 1597 г. он писал: «К мнению Коперника я пришел много лет назад и исходя из него нашел причины многих явлений природы, далеко не объяснимых с помощью обычных гипотез. Написал многие соображения и опровержения противных аргументов, которые, впрочем, опубликовать не решился, уstraшенный судьбой учителя нашего Коперника. У немногих стяжал он бессмертную славу и бесчисленным множеством – ибо таково число глупцов – осмеян и освистан» [74. С. 109].

Падуанский период жизни Галилея (1592–1610) – время наивысшего расцвета его деятельности, где проявляется независимость его мышления. Вскоре он стал самым знаменитым профессором в Падуе. Его лекции приобрели громкую известность, на них приходило до двух тысяч слушателей. Венецианское правительство непрестанно поручало Галилею разработку разного рода технических устройств, с ним активно переписывались молодой Кеплер и другие научные авторитеты того времени.

В первые годы профессорства Галилей занимался главным образом разработкой новой механики, построенной не по прин-

ципам Аристотеля. Здесь проявилась сила его творчества. Позднее его исследования больше сосредотачивались на астрономических наблюдениях, а в последние годы жизни на полном изложении полученных ранее результатов. В трактате «О механической науке и о пользе, которую можно извлечь из механических инструментов», ходившем в рукописи и опубликованном впервые в 1634 г., излагается теория простых механизмов и вводится фундаментальное понятие момента силы (итал. *Momento*). Для него характерны соединение динамики со статикой и четкая формулировка плодотворного принципа виртуальной работы. Этот труд и записки по астрономии, распространившиеся среди студентов, создали автору славу не только в Италии, но и других странах Европы.

К падуанскому периоду относятся его рукописи об изохронизме колебаний маятника и открытие законов движения, которые были опубликованы в книгах «Диалог о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой» (1632) и «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» (1638). В них Галилей закладывает два краеугольных камня современной динамики: принцип инерции и классический принцип относительности, ставший основой современной теории относительности. Решительно отказавшись от представлений Аристотеля о движении, Галилей пришел к выводу, что движение (имеются в виду только механические процессы) относительно, т. е. нельзя говорить о движении, не уточнив, по отношению к какому «телу отсчета» оно происходит; законы движения безотносительны, поэтому, находясь в закрытой кабине (он образно писал «в закрытом помещении под палубой корабля»), нельзя никакими опытами установить, покоится ли эта кабина или движется равномерно и прямолинейно («без толчков», по выражению Галилея). Относительность движения означает, что его нельзя относить к телу самому по себе. «Это конец концепции Аристотеля и средневековой теории *impetus* а (толчка), основанных на двигателе, создающем и сохраняющем движение. Покой и движение – постоянные состояния тел. Состояние покоя тела также нуждается в объяснении. При отсутствии внешнего сопротивления, чтобы остановить тело, находящееся в движении, необходима сила. Сила производит не движение, а ускорение. Галилеем была открыта дорога, которая приведет к принципу инерции» [9. С. 226]. В современной терминологии, Галилей провозгласил од-

нородность пространства (отсутствие центра мира) и равноправие инерциальных систем отсчета. Аргументация Галилея неявно предполагает, что результаты земных опытов можно перенести на небесные тела.

В Падуге Галилей изучал инерцию и свободное падение тел. Измеряя время спуска шаров по наклонной плоскости в 1609 г., он заметил, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела. Таким образом, он опроверг первое утверждение Аристотеля, согласно которому, «если бы совершенно устранить сопротивление среды, то все тела падали бы с одинаковой скоростью». Галилей опроверг и второй из приведенных законов Аристотеля, сформулировав первый закон механики (закон инерции): при отсутствии внешних сил тело либо покоится, либо равномерно движется. Он допускал свободное движение не только по прямой, но и по окружности. Опытным путем Галилей нашел законы падения: скорость нарастает пропорционально времени, а путь – пропорционально квадрату времени. Привлекая принцип инерции, Галилей выдвинул другой фундаментальный принцип – закон сложения перемещений. Он предположил, что полет падающего тела с ненулевой горизонтальной начальной скоростью будет представлять собой наложение двух «простых движений»: равномерного горизонтального движения по инерции и равноускоренного вертикального падения. С помощью этих двух принципов он показал, что невертикальная траектория брошенного тела является параболой. Этот результат был совершенно не известен всем его предшественникам. Экстраполировав результаты, полученные при наблюдении скатывающихся по наклонной плоскости предметов, он сумел определить ускорение свободного падения тела на поверхность Земли. За 250 лет до опытов Физо он спроектировал эксперимент по измерению скорости света в земных условиях. Галилей изучил колебания маятника и нашел, что для малых амплитуд колебания изохронны и периоды колебаний соотносятся как квадратные корни из его длины. Результаты исследований Галилея привлекли внимание Гюйгенса, который изобрел часы с маятниковым регулятором (1657 г.); с этого момента появилась возможность точных измерений в экспериментальной физике.

Подобно Кеплеру и Копернику, Галилей впитал с учением гуманистов-неоплатоников веру в то, что физический мир можно толковать в понятиях геометрии и арифметики. Известно его знаменитое изречение: «Книга Природы написана языком мате-

матики». Галилей изобрел новые способ анализа явления и основание для опытной проверки теорий. «...Он выдвинул аргумент, гласивший, что для вынесения четких суждений относительно природы ученым надлежит учитывать только “объективные” – поддающиеся точному измерению – свойства (размер, форма, количество, вес, движение), тогда как свойства, просто доступные восприятию (цвет, звук, вкус, осязание, запах), следует оставлять без внимания как субъективные и эфемерные. Лишь с помощью количественного анализа наука может получить правильные знания о мире» [6. С. 181]. Наконец, для понимания математических законов природы, Галилей стал применять, совершенствовать и изобретать множество технических приборов. По его мнению, рутинная академическая традиция профессоров – почитателей Аристотеля – с бесконечным дедуктивным оправданием «биологической» Вселенной должна была уступить место исследованию Вселенной, в которой действуют безличные математические законы. Галилея принято считать основателем современного метода научных исследований. «...Метод научного исследования Галилея можно характеризовать так: из наблюдений и опытов устанавливается предположение-гипотеза, которая хотя и является обобщением опытов, но включает в себя нечто новое, что непосредственно не содержится в каждом конкретном опыте. Гипотеза дает возможность вывести строго математическим и логическим путем определенные следствия, предсказать некоторые новые факты, которые можно проверить на опыте. Проверка следствий и подтверждает гипотезу – превращает ее в физический закон» [11. С. 97].

С 1606 г. Галилей начал заниматься астрономией. В июле 1609 г. он построил свою первую подзорную трубу – оптическую систему, состоящую из выпуклой и вогнутой линз, – и начал систематические астрономические наблюдения. Это было второе рождение подзорной трубы, которая после почти 20-летней неизвестности стала мощным инструментом научных исследований. Впоследствии он писал: «не жалея труда и средств, я сконструировал столь превосходный инструмент, что с его помощью наблюдаемые предметы представляются в тысячу раз более крупными и более чем в тридцать раз ближе, чем если смотреть на них невооруженным глазом. Сколько и каковы преимущества, предоставляемые этим инструментом как на земле, так и на море, излишне перечислять» [9. С. 208]. Ученым был создан телескоп с увеличением в 32 раза. Первые телескопические на-

блюдения небесных тел Галилей провел 7 января 1610 г. Он обнаружил кратеры и хребты на Луне (в его представлении – «горы» и «морья») и то, что Луна обращена всегда одной своей стороной к Земле. Все это опровергало учение Аристотеля о противоположности «земного» и «небесного». Земля стала телом принципиально той же природы, что и небесные светила, а это в свою очередь служило косвенным доводом в пользу системы Коперника: если другие планеты движутся, то естественно предположить, что движется и Земля. У Юпитера обнаружились собственные луны – четыре спутника, времена обращения которых он определил. Тем самым Галилей опроверг один из доводов противников гелиоцентризма, по мнению которых Земля не может вращаться вокруг Солнца, поскольку вокруг нее самой вращается Луна. Позже, осенью 1610 г., он открыл фазы у Венеры, что могло быть объяснено только движением этой планеты вокруг Солнца и изменением положения Венеры и Земли относительно Солнца. На поверхности Солнца он увидел медленно перемещающиеся темные пятна, что указывало на вращение Солнца вокруг своей оси. Рассматривая небо в телескоп, Галилей увидел бесчисленные скопления звезд, образующих Млечный Путь, что подтверждало идеи Джордано Бруно о бесконечности Вселенной и множественности миров.

Телескоп Галилея явил наглядные доказательства того, что гелиоцентрическую теорию уже невозможно считать некой условностью, облегчающей вычисления. Ныне она получила зримое подтверждение. «Открытия спутников Юпитера, фаз Венеры, солнечных пятен и т. д. потребовали лишь наличия телескопа и известного трудолюбия, но нужен был необыкновенный гений, чтобы открыть законы природы в таких явлениях, которые всегда пребывали перед глазами, но объяснение которых тем не менее всегда ускользало от изысканий философов» [10. С. 176].

Научную работу Галилей не прекращал до последних дней жизни. Уже в марте 1610 г. он опубликовал небольшой по объему труд под названием «Звездный вестник» (*Siderius Nuncius*), имевший большой для того времени тираж (550 экземпляров) и содержавший сенсационные для большинства читателей астрономические открытия. Они были многими встречены с недоверием, даже с враждебностью, но сторонники коперниканского учения, прежде всего Кеплер, тут же опубликовавший «Разговор со Звездным вестником», отнеслись к ним с восторгом, видя в этом подтверждение правоты своих убеждений. Из-за нужды в

деньгах в 1610 г. Галилей покинул Венецию, где он был недоступен для инквизиции, и по просьбе Козимо II Медичи переехал во Флоренцию. Его обязанностями стали обучение сыновей тосканского герцога и участие в некоторых делах как советника и представителя герцога. Формально он также был зачислен профессором Пизанского университета, но освобожден от обязанности чтения лекций. Наступило всеобщее признание. Галилей стал самым знаменитым ученым Европы, в его честь сочинялись оды, где он сравнивался с Колумбом.

В 1613 г. Галилей выпустил книгу «Письма о солнечных пятнах», в которой открыто высказался в пользу системы Коперника. Рост влияния Галилея, независимость его мышления («Только со смертью догмы начинается наука»), резкая оппозиционность по отношению к учению Аристотеля («В науках о природе... нужно остерегаться, как бы не стать на защиту ложного, так как тысячи Демосфенов и тысячи Аристотелей будут выбиты из седла любым заурядным умом, которому посчастливилось найти истину»), смелая пропаганда учения Коперника способствовали формированию агрессивного и влиятельного кружка его противников. Католическая церковь, уже встревоженная успехами Реформации, решила запретить коперниканство. Позицию церкви по поводу триумфального распространения учения Коперника проясняет письмо влиятельного кардинала Беллармино в 1615 г. одному из своих корреспондентов: «Когда утверждают, что в предположении, будто Земля движется и Солнце стоит неподвижно, все наблюдаемые явления объясняются лучше..., то это прекрасно сказано и не включает в себе никакой опасности; а этого и достаточно для математики; но когда начинают говорить, что Солнце в действительности стоит в центре мира и что оно только вращается вокруг себя, но не движется с востока на запад и что Земля находится на третьем небе и с большой скоростью вращается вокруг Солнца, то это вещь очень опасная и не только потому, что она раздражает всех философов и ученых богословов, но и потому, что она вредит святой вере, поскольку из нее вытекает ложность Святого Писания» [106. С. 25]. Декрет о запрете книги Коперника гласил: «Чтобы никто отныне, какого бы он ни был звания и какое бы ни занимал положение, не смел печатать их или содействовать печатанию, хранить их у себя или читать, а всем, кто имеет или впредь будет иметь их, вменяется в обязанность немедленно по опубликовании настоящего декрета представить их местным властям или инквизиторам»

[107. С. 121]. Ученый вернулся во Флоренцию и для продолжения защиты истины решил издать книгу, содержащую нейтральное обсуждение разных точек зрения. В «Диалоге о двух важнейших системах мира – Птолемеевой и Коперниковой» под видом одобрения запрещения учения Коперника итальянскому ученому удалось представить доказательства в пользу теории о движении Земли. Санкции последовали незамедлительно. Продажу «Диалога...» запретили, а Галилея вызвали в Рим. Основными вопросами инквизиции были два: сознательно ли Галилей нарушил эдикт 1616 г. и раскаивается ли он в содеянном. Три эксперта дали заключение: книга нарушает запрет на пропаганду «пифагорейской» доктрины. В итоге ученый был поставлен перед выбором: либо он покается и отречется от своих «заблуждений», либо его постигнет участь Джордано Бруно и многих других, замученных инквизицией. «Невежество – мать злобы, зависти, алчности и всех прочих низких и грубых пороков, а также грехов» (Г. Галилей). Приговор был объявлен 22 июня:

«Мы заявляем, – так заканчивается текст обвинения, – что ты, вышеупомянутый Галилей, за твои проступки, доказанные в ходе суда и признанные тобой, о чем говорится выше, представлен пред Священной канцелярией по подозрению в ереси, а именно в том, что ты придерживался и верил в учение, ложное и противоречащее божественному Священному Писанию, о том, что Солнце является центром для Земли и оно не движется с востока на запад, что Земля движется и не находится в центре мира, что ты мог придерживаться и защищать его и после объявления и определения его как противоречащего Священному Писанию; и вследствие этого ты подлежишь всем наказаниям по святым канонам и другим общим и частным постановлениям, сформулированным против подобных преступников. По этим постановлениям ты, к нашему удовлетворению, будешь освобожден, но перед тем, с открытым сердцем и искренней верой, ты должен пред всеми нами отречься, проклясть и презреть вышеупомянутые ошибки и ересь и всякую другую ошибку и ересь, противоречащую Соборной и Апостольской Церкви, в той форме и тем образом, которые мы тебе укажем» [9. С. 227]. После оглашения приговора Галилей на коленях произнес предложенный ему текст отречения: «Я, Галилей, сын Винченцо Галилея из Флоренции, в возрасте семидесяти лет, лично представши пред судом, будучи коленопреклоненным перед вами, высокочтимые и достопочтенные кардиналы, главные Инквизиторы во всей Хри-

стианской республике, имея перед моими глазами священное Евангелие и касаясь его руками, клянусь, что всегда верил, верю сейчас и с Божьей помощью буду верить в будущем во все то, что содержит, проповедует, чему учит Святая Соборная и Апостольская Церковь. <...> Поэтому, желая освободить Ваши Высокопреосвященства и всякого верного христианина от тяжкого подозрения, справедливо мною заслуженного, я с открытым сердцем и искренней верой проклинаю и презираю вышеупомянутые заблуждения и ересь и вообще всякое другое заблуждение, ересь и секту, противоречащие Святой Церкви; и клянусь, что в будущем никогда больше не стану говорить и утверждать ни устно, ни письменно того, что могло бы навлечь на меня подобные подозрения; и если я узнаю какого-либо еретика или подозреваемого в ереси, то сообщу о нем в Священную канцелярию, или же местному инквизитору, или представителю там, где я буду находиться...» [9. С. 228]. «Для того чтобы уничтожить учение Коперника, вовсе недостаточно заткнуть кому-нибудь рот. Нужно еще наложить запрет на всю астрономическую науку и сверх того воспретить кому бы то ни было глядеть в небо!» [9. С. 228]. «...Требовать, чтобы люди отказывались от собственных суждений и подчинялись суждениям других, и назначать лиц, совершенно невежественных в науке или искусстве, судьями над людьми учеными – это такие новшества, которые способны довести до гибели и разрушить государство» (Г. Галилей) (курсив наш. – А.Б.).

Пожизненное заключение было заменено домашним арестом, и Галилей вернулся на свою виллу в Арчетри около Флоренции, где он находился под домашним арестом и под постоянным надзором инквизиции. Галилео Галилей умер 8 января 1642 г. Похоронен в монашеском приделе собора Санта Кроче во Флоренции без почестей и надгробия. В 1758 г. Папа Бенедикт XIV велел вычеркнуть работы, защищавшие гелиоцентризм, из «Индекса запрещенных книг», но эта работа завершилась только в 1835 г. В ноябре 1979 г. папа римский Иоанн-Павел II официально признал, что инквизиция в 1633 г. совершила ошибку, силой вынудив отречься ученого от теории Коперника.

В ознаменование 400-летия первых наблюдений Галилея Генеральная Ассамблея ООН объявила 2009 год годом астрономии. Эйнштейн назвал Галилея «отцом современной науки» и дал ему такую характеристику: «Перед нами предстает человек незаурядной воли, ума и мужества, способный в качестве пред-

ставителя рационального мышления выстоять против тех, кто, опираясь на невежество народа и праздность учителей в церковных облачениях и университетских мантиях, пытается упрочить и защитить свое положение. Необычайное литературное дарование позволяет ему обращаться к образованным людям своего времени на таком ясном и выразительном языке, что ему удается преодолеть антропоцентрическое и мифическое мышление своих современников и вновь вернуть им объективное и причинное восприятие космоса, утраченное с упадком греческой культуры» [104]. «Галилей, пожалуй, больше, чем кто-либо другой из отдельных людей, ответственен за рождение современной науки. Знаменитый спор с Католической Церковью занимал центральное место в философии Галилея, ибо он одним из первых объявил, что у человека есть надежда понять, как устроен мир, и, более того, что этого можно добиться, наблюдая наш реальный мир» [96. С. 210].

1.5. НЬЮТОНОВА СИСТЕМА МИРА

...Самым великим был Исаак Ньютон; ...ибо если истинное величие состоит в том, чтобы, получив от неба мощный талант, использовать его для самообразования и просвещения других, то человек, подобный г-ну Ньютону, едва ли встречавшийся однажды на протяжении десяти веков, действительно велик, в то время как все... политики и завоеватели, без которых не обошлось ни одно столетие, обычно не что иное, как именитые злодеи. Мы чтим тех, кто владеет умами силою своей правды, но не тех, кто путем насилия создает рабов; тех, кто познал Вселенную, а не тех, кто ее обезобразил.

Вольтер. Философские письма

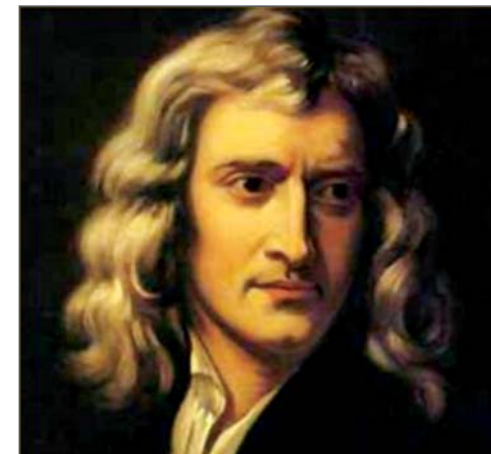
Ньютон не был первым человеком века рационализма. Он был последним магом, последним из вавилонян или шумеров, последним великим умом, который взглянул на вещественный и интеллектуальный мир теми же глазами, что и люди, начинавшие создавать наше интеллектуальное наследство не

менее чем 10 000 лет назад. Исаак Ньютон, ребенок, родившийся после смерти отца в день Рождества Христова в 1642 г., стал любимцем богов».

*Э. Роджерс.
Физика для любознательных.
Наука о Земле и Вселенной.
Молекулы и энергия*

В 1642 г., в год смерти Галилея, в семье фермера близ небольшой английской деревушки Вулсторп родился **Исаак Ньютон**. Его отец умер незадолго до рождения сына. По словам матери Ньютона, он родился таким маленьким, что его можно было бы выкупать в большой пивной кружке. Несмотря на неблагоприятные обстоятельства рождения и слабое здоровье, что мать всерьез опасалась за жизнь ребенка, Исаак Ньютон дожил до 84 лет и снискал славу одного из величайших представителей рода человеческого. С 12 лет мальчик начал учиться в школе, а в 1661 г. поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета в качестве субсайзера – студента, выполнявшего для заработка обязанности по обслуживанию богатых студентов в колледже. Уже в первые годы учения в университете Ньютон во многом обогнал своих сверстников, в чем была большая заслуга его учителя, известного математика Исаака Барроу. Окончив колледж в 1665 г., Ньютон получил ученую степень бакалавра. В 1665–1667 гг., во время эпидемии чумы,

Сэр Исаак Ньютон (англ. Sir Isaac Newton; 4 января 1643 – 31 марта 1727) – великий английский физик, математик и астроном. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии» (опубликовано 5 июля 1687), в котором он описал закон всемирного тяготения и законы, заложившие основы классической механики. Разработал (наряду с Готфридом Лейбницем) дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цветности и многие другие математические и физические теории



он находился в своей родной деревне Вулсторп. Эти годы были наиболее продуктивными в научном творчестве Ньютона. Он изучил основные вопросы физики и математики, актуальные для его времени.

Когда через два года Кембриджский университет вновь открылся, Ньютон уже разработал дифференциальное исчисление и основы современной теории цвета, вывел закон всемирного тяготения и решил несколько математических задач, которые до него никто решить не смог. Как вспоминал сам Ньютон: «В те дни я был в расцвете своих изобретательских сил, и Математика и Философия с тех пор меня уже ни разу не захватывали так сильно, как тогда». Ньютону приписывают слова: «Если я видел дальше, чем другие, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов». Научной опорой и вдохновителями творчества Ньютона в наибольшей степени были физики. От Галилея Ньютон принял закон инерции, от Декарта – аналитическую геометрию, от Кеплера – три основных закона движения планет. Меньшее, но существенное влияние оказали другие математики и физики: Евклид, Ферма, Гюйгенс, Валлис и его непосредственный учитель Барроу.

В фундаментальном произведении «Математические начала натуральной философии», опубликованном только в 1687 г., И. Ньютон дал определение массы тела, количества движения (сохранившиеся до наших дней), силы и сформулировал аксиомы (или законы движения), которые дали основу строгой механической теории. В современном изложении они звучат следующим образом.

Первый закон Ньютона. *Всякое тело пребывает в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.* Этот закон есть закон инерции Галилея и смысл его, в частности, состоит именно в возможности выбора из множества систем отсчета наиболее удобной для описания движения тел, так называемой *инерциальной системы отсчета*, где тело, не испытывающее воздействий со стороны других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. *Во всех таких системах свойства пространства – времени одинаковы и одинаково записываются все законы механики.* Отсутствие предпочтительной инерциальной системы отсчета называется *принципом относительности Галилея*. В механике Ньютона предполагается, что наше пространство трехмерно, а время одномерно. Пространство и время не свя-

заны друг с другом. Интервал времени $t_2 - t_1$ между двумя событиями и расстояние между ними в евклидовой геометрии

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (1.1)$$

одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Второй закон Ньютона. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению прямой, вдоль которой эта сила действует*

$$\frac{d}{dt}m\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}. \quad (1.2)$$

Этот закон положен Ньютоном в основу движения материальной точки. Его можно рассматривать также как определение силы и массы.

В механике Ньютона мера инертности тела (т. е. способность тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения – инертная масса) является постоянной. В механике **Эйнштейна** показывается, что это положение справедливо с точностью до членов, пропорциональных v^2/c^2 . Экспериментально было показано, что для частицы инертная масса равна гравитационной массе, входящей в закон всемирного тяготения.

Третий закон Ньютона. *Действию всегда есть противоположное противодействие, иначе – взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.*

Альберт Эйнштейн (нем. Albert Einstein, 1879–1955) – один из основателей современной физической теории; создатель специальной и общей теорий относительности; лауреат Нобелевской премии по физике 1921 г.



При записи второго закона Ньютона предполагается, что силы, действующие на материальную точку, следует складывать по правилу сложения векторов. Это правило есть обобщение экспериментальных фактов. Суть его дается принципом суперпозиции сил: если на тело действуют несколько тел, то результирующая сила находится путем суммирования отдельных сил, измеренных в отсутствие других, по правилу сложения векторов:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (1.3)$$

Иногда принцип суперпозиции называют *Четвертым законом Ньютона*. Новым в механике Ньютона стало понятие силы не просто как некоего действия, а как величины. В «Началах» Ньютон обсуждает типы сил, действующих на физические тела, и рассказывает, что происходит с физическими системами, если к ним приложить различные силы. В книге III Ньютон показал, что огромное множество самых разнообразных явлений и процессов – движение планет, Луны, спутников Юпитера, комет, приливы, прецессию равноденствий и т. д. – можно объяснить, если принять гипотезу о существовании силы всемирного тяготения, действующей между любыми двумя телами и изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Все вычисления были выполнены с помощью оригинальных математических методов, о которых Г. Лейбниц дал следующий отзыв: «Если взять математику от начала мира до того времени, когда жил Ньютон, то сделанное им – гораздо лучшая ее половина». «Ньютон создал свою теорию на основе предположений, вытекающих из эксперимента, затем получил из теории следствия, а уже потом проверил, насколько мог, эти следствия экспериментально. Поэтому его теория была связана с действительностью экспериментом и четкими определениями, она могла предсказать явления, которые в свою очередь проверялись опытом. Теория Ньютона “объясняла” множество чудес, сводя их к обычным уже известным явлениям» [10. С. 289].

Пространство. Время. Система отсчета. Ньютон вводит абсолютное время и абсолютное пространство при помощи постулатов, на которых была основана вся физика до XX в. Уместно привести характерные выдержки из его книги [14].

1. «Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью. Относительное, кажущееся, или обыденное время есть или точная, или изменчивая, постигаемая чувствами, внешняя, совершаемая при посредстве какого-либо движения мера продолжительности, употребляемая в обыденной жизни вместо истинного, или математического, времени как-то: час, день, месяц, год».

«Возможно, что не существует (в природе) такого равномерного движения, которым время могло бы измеряться с совершенной точностью. Все движения могут ускоряться или замедляться, течение же абсолютного времени изменяться не может...»

2. «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным.»

«...Время и пространство составляют как бы вместилища *самых себя и всего* существующего. Во времени все располагается в смысле порядка последовательности, в пространстве – в смысле порядка положения. По самой своей сущности они есть места, приписывать же местам движение нелепо. Вот эти-то места и суть места абсолютные, и только перемещения из этих мест составляют абсолютные движения... Причины происхождения, которыми различаются истинные и кажущиеся движения, суть те силы, которые надо к телам приложить, чтобы произвести эти движения. Истинное абсолютное движение не может ни произойти, ни измениться иначе, как от действия сил, приложенных непосредственно к движущемуся телу, тогда как относительное движение тела может быть и произведено, и изменено без приложения сил к этому телу; достаточно, чтобы силы были приложены к тем телам, по отношению к которым это движение определяется.»

Еще Г. Галилей представлял движение как процесс, происходящий непрерывно во времени, и устанавливал соответствие между континуумом значений времени и континуумом значений положения. Поэтому описание движения материальной точки A предполагает знание ее положения, задаваемого в декартовой системе отсчета радиусом-вектором $\vec{r}(t)$ или его координатами:

$$\vec{r}(t) = \{x(t); y(t), z(t)\} \equiv \{x_1(t); x_2(t), x_3(t)\} = \vec{x}(t). \quad (1.4)$$

Вектор $\vec{r}(t)$ описывает траекторию движения материальной точки. Система отсчета состоит из системы координат и часов, имеющих в ней нулевую скорость в каждый момент (рис. 1.4). Тогда скорость материальной точки определяется как

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\}, \quad (1.5)$$

а ускорение

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \{a_x, a_y, a_z\} = \left\{ \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right\}. \quad (1.6)$$

С работами Ньютона связана новая эпоха в физике и математике. В математике появляются мощные аналитические методы. В физике основным методом исследования природы становится построение математических моделей в природе и их исследование с привлечением нового математического аппарата. В «Началах» впервые дана общая схема строгого математического подхода к решению любой конкретной задачи земной или небесной механики. По словам А. Эйнштейна, «Ньютон был первым, кто попытался сформулировать элементарные законы, которые определяют временной ход широкого класса процессов в природе с высокой степенью полноты и точности», а также «...оказал своими трудами глубокое и сильное влияние на все мировоззрение в целом» [102. С. 89]. Научные работы, положившие начало тогдашней научной революции, принесли уже при жизни Ньютону всемирное признание, о чем говорит эпитафия на его могиле: «Здесь покоится Сэр Исаак Ньютон,

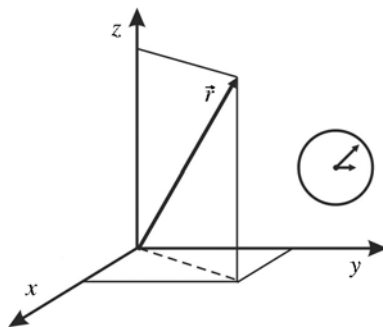


Рис. 1.4

дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов. Он исследовал различие световых лучей и появляющиеся при этом различные свойства цветов, чего ранее никто даже не подозревал. Прилежный, мудрый и верный истолкователь природы, древности и Св. писания, он утверждал своей философией величие Все-

могущего Бога, а нравом выражал евангельскую простоту. Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого» [105. С. 192].

Силы в природе. Ньютон впервые рассмотрел основной метод феноменологического описания любого физического воздействия через посредство силы. Завершили математизацию механики Эйлер и Лагранж. При решении конкретных задач выражение для вектора силы, как правило, задается конкретной функцией $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Отметим, что в аргументе силы имеются только $\vec{r}$ и $\dot{\vec{r}}$, а более высокие производные $\ddot{\vec{r}}(t)$ и т. д. — отсутствуют. Это является отражением постулата классической механики, что задание координат и скоростей частиц системы полностью описывает состояние системы и соответственно позволяет предсказать ее состояние в дальнейшие моменты, т. е. ее движение.

Ограничимся простейшим случаем одномерного движения. Все предшествующее развитие физики показало, что все силы в природе можно свести к нескольким фундаментальным взаимодействиям, и все силы, действующие на тело, можно перечислить. Тогда законы Ньютона однозначно описывают эволюцию системы. Приведем следующие примеры сил.

1. Гравитационная сила — постоянная во времени:

$$m\ddot{x} = F = mg = \text{const}. \quad (1.7)$$

2. Сила трения — зависимость от скорости при малых скоростях:

$$F_{\text{тр}} = F(\dot{x}) = -\alpha\dot{x}. \quad (1.8)$$

3. Сила упругости — зависимость от координаты:

$$F_{\text{упр}} = F(x) = -kx. \quad (1.9)$$

4. Несколько сил:

$$F = F_{\text{упр}} + F_{\text{тр}} = -kx - \alpha\dot{x}. \quad (1.10)$$

5. Сила, зависящая от времени. Рассмотрим систему, состоящую из заряженного тела, помещенного между обкладками конденсатора. Пусть напряжение между обкладками $U = U_0 \sin \omega t$,

тогда напряженность электрического поля $E = \frac{U_0}{d} \sin \omega t$ и сила, действующая на тело, имеет вид

$$F = qE = q \frac{U_0}{d} \sin \omega t = F(t). \quad (1.11)$$

Таким образом, в рассматриваемых случаях второй закон Ньютона (1.2) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. В такой форме он был впервые представлен, по-видимому, Л. Эйлером. В результате интегрирования дифференциального уравнения можно найти координату частицы x и ее скорость $v = \dot{x}(t)$ в любой момент. Для этого необходимы лишь начальные координаты $x(t_0)$ и скорость частицы $v = \dot{x}(t_0)$. Так как второй закон Ньютона дает исчерпывающее описание движения частицы, то его называют основным законом динамики.

Покажем на примерах, каким образом из второго закона Ньютона определяются координаты и скорости частицы, ибо «при изучении наук примеры не менее поучительны, чем правила» (Ньютон).

1. Движение под действием силы, зависящей только от времени: $F(x, \dot{x}, t) = F(t)$. В этом случае задача решается прямым интегрированием уравнения:

$$m\ddot{x} = F(t). \quad (1.12)$$

Интегрируя его левую и правую части первый раз по времени в пределах от t_0 до t , мы находим скорость тела в любой момент

$$\dot{x} = \dot{x}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt. \quad (1.13)$$

Интегрируя второй раз по времени, мы определяем при заданной силе положение тела в любой момент

$$x - x(t_0) = \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt. \quad (1.14)$$

2. Движение под действием постоянной силы (падение с небольшой высоты в пустоте). Пусть точка имеет начальную скорость, направленную по вертикали. Считая силу тяжести постоянной, найдем скорость и координату как функции времени. Примем начальное положение точки за начало O координат (рис. 1.5) и направим ось x по вертикали вниз.

Пусть в момент t точка занимает некоторое положение A . Второй закон Ньютона в нашем случае примет вид

$$m_i \ddot{x} = m_g g. \quad (1.15)$$

Предполагая равенство инерционной m_i и гравитационной m_g массы, получаем уравнение $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = g$, интегрирование которого определяет зависимость скорости от времени $v = gt + C_1$. Если в начальный момент $v(t = 0) = v_0$, то

$$v = gt + v_0. \quad (1.16)$$

Учитывая соотношение $v = \frac{dx}{dt}$, после интегрирования получаем зависимость координаты от времени:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x(t = 0). \quad (1.17)$$

3. Движение под действием силы, зависящей от скорости. Зависимость силы от скорости возникает, например, если действует сила трения. Рассмотрим случай падения тела в воздухе с ненулевой начальной скоростью (см. рис. 1.5). Будем считать, что силы, действующие на тело, приложены к его центру масс. Закон сопротивления среды сложен. Сопротивление зависит от формы и размеров движущегося тела, свойств самой среды и скорости движения тела. Если тело не слишком мало (например если речь идет о снаряде или бомбе), то при малых скоростях (до 0,1 м/с) сила сопротивления воздуха R пропорциональна первой степени скорости, при скоростях от 0,1 до 300 м/с сила пропорциональна квадрату скорости. При больших скоростях сопротивление зависит от высших степеней

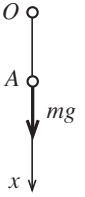


Рис. 1.5

скорости. Рассмотрим скорости 0,1 до 300 м/с, в этом случае в баллистике обычно считают

$$R = \alpha \rho S v^2,$$

где α – коэффициент, зависящий от формы тела; ρ – плотность воздуха; S – площадь миделева сечения, т. е. наибольшего поперечного сечения тела плоскостью, перпендикулярной к скорости. Совместим, как и в предыдущей задаче, начало координат с начальным положением тела, ось x направим вертикально вниз и запишем уравнение Ньютона

$$m\ddot{x} = mg - R = m\ddot{x} = mg - \alpha \rho S v^2,$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{\alpha \rho S}{mg} v^2 \right) = \frac{g}{c^2} (c^2 - v^2), \quad (1.18)$$

где введено обозначение $c^2 = \frac{mg}{\alpha \rho S}$.

Если в начальный момент $v(t=0) < c$, то $\frac{dv}{dt} > 0$ в последующие моменты. Поэтому скорость тела увеличивается (сила тяжести больше силы сопротивления) вплоть до момента, когда скорость станет равной c . При $v(t=0) > c$ скорость также стремится к значению c , которое является стационарной точкой уравнения (1.15). Заметим, что для парашютиста эта предельная скорость c равна 6 км/с. Вычислим скорость тела в любой момент, полагая, что в начальный $v(t=0) = v_0$. После разделения переменных в (1.15) и простейших преобразований оно приводится к виду

$$\frac{g}{c^2} dt = \frac{dv}{(c^2 - v^2)} = \frac{1}{2c} \left[\frac{dv}{(c-v)} + \frac{dv}{(c+v)} \right]. \quad (1.19)$$

Интегрируя левую часть этого уравнения от нуля до t , правую от v_0 до v , получаем решение в виде неявной функции

$$\frac{g}{c^2} t = \frac{1}{2c} \left(\ln \left| \frac{c+v}{c-v} \right| - \ln \left| \frac{c+v_0}{c-v_0} \right| \right). \quad (1.20)$$

Разрешая это выражение относительно v , получаем зависимость скорости от времени в явном виде

$$v = c \frac{c \operatorname{th} \left(\frac{g}{c} t \right) + v_0}{c + v_0 \operatorname{th} \left(\frac{g}{c} t \right)}. \quad (1.21)$$

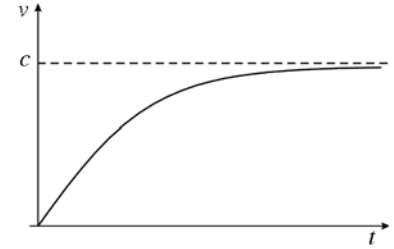


Рис. 1.6

При $t \rightarrow \infty$ скорость стремится к предельному значению $v_{кр} = c$,

или $v_{кр} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha \rho S}}$, т. е. при постоянных форме тела, размерах и

плотности среды максимальная скорость падения пропорциональна квадратному корню из массы тела. Графически зависимость скорости при $v(t=0) = 0$ от времени падения показана на рис. 1.6.

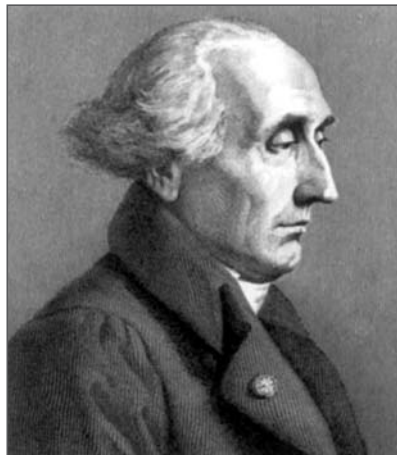
Эти примеры показывают, что при известных силах, действующих на тело, уравнения Ньютона однозначно определяют скорость и положение тела в любой момент при любых заданных начальных условиях. Движение материальной точки под действием других сил рассмотрено в следующих главах.

Глава 2. ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА

Лагранж доказал, что самые разнообразные следствия, относящиеся к движению планет, могут быть выведены из одной основной формулы. При этом красота метода настолько соответствует достоинству результата, что эта великая работа превращается в своего рода математическую поэму.

У.Р. Гамильтон

Родившийся в Италии француз **Жозеф Луи Лагранж** по праву считается прямым продолжателем Исаака Ньютона. Он разработал метод в механике, который плодотворно применил к решению астрономических задач. Он в частности решил задачу о движении Луны под действием притяжения Земли и Солнца, объяснил колебания в положении земной оси, проанализировал движения спутников Юпитера. В предисловии к «Аналитической механике», выпущенной в 1788 г., Лагранж писал: «В этой работе вы не найдете рисунков. Излагаемые мною мето-



Жозеф Луи Лагранж (фр. Joseph Louis Lagrange; 25 января 1736, Турин – 10 апреля 1813, Париж) – великий французский математик и механик

ды не нуждаются ни в построениях, ни в рассуждениях геометрического или механического характера, а лишь в алгебраических операциях, подчиняющихся строгим и однообразным правилам. Тот, кто любит математический анализ, с удовольствием увидит, что механика становится новым разделом *анализа*, и будет мне благодарен за такое расширение области его применения» [12. С. 9].

2.1. ГОЛОНОМНЫЕ И НЕГОЛОНОМНЫЕ СВЯЗИ

С математической точки зрения голономность связей есть постулат физического происхождения.

В.И. Арнольд

Начиная с пионерных работ Бернулли и Эйлера механика Ньютона стала применяться к динамике материальных тел. Они мысленно разделялись на материальные точки – весьма малые частицы, размерами которых можно пренебречь. Для каждой из этих частиц записывалось уравнение Ньютона (1.2), учитывающее взаимодействия с окружающими частицами.

Совокупность материальных точек, движение которых взаимосвязанно, назовем *материальной системой*. Ее примерами являются:

- а) множество взаимодействующих материальных точек;
- б) твердое тело – множество материальных точек, расстояния между которыми жестко зафиксированы и не изменяются как в процессе движения, так и с течением времени.

Решение уравнений Ньютона требует знания всех внешних сил, приложенных к материальной системе. В ряде технических приложений определить их достаточно сложно, поэтому пользуются другим подходом, суть которого ясна из рассмотрения простейшей задачи о движении материальной точки массы m по неподвижной плоскости $z = 0$. Если нас интересует только ее движение, то мы должны учесть все действующие на нее внешние силы. Одной из таких сил будет сила упругости, действующая на материальную точку со стороны поверхности. Если сила упругого взаимодействия точки с частицами поверхности много больше внешних сил, действующих на нее, то движение материальной точки не вызывает деформации поверхности. Поэтому действие упругих сил приведет только к ограничению свободы пе-

ремещения материальной точки вдоль оси z и условию $z = 0$ при интегрировании уравнений Ньютона. В реальных системах ограничения могут быть не только геометрического характера, но и кинематического (на скорость). Все подобного типа ограничения называются *связями*.

Материальные системы со связями называются *несвободными* в отличие от *свободных*, у которых связи отсутствуют. Можно также дать другое определение свободной материальной точки или свободной материальной системы. Материальная точка называется свободной, если она может занимать любое положение в пространстве, а ее скорости могут принимать любые значения и направления. Очевидно, что эти два определения имеют один и тот же смысл, так как возможность принимать любые значения для координат и скоростей может быть осуществлена только при отсутствии ограничений (связей).

Примерами систем со связями геометрического характера могут служить следующие.

Пример 1. Частица, которая при движении не может покинуть заданную поверхность или кривую. Такие условия часто возникают в технических устройствах. Поверхность или кривая могут быть неподвижными (стационарная связь) или перемещаться заданным образом (нестационарная связь).

Пример 2. Две частицы A и B , связанные жестким невесомым стержнем. В этом случае ограничение, накладываемое связью, может быть записано в виде уравнения

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = L^2. \quad (2.1)$$

Пример 3. Две частицы, связанные невесомой нитью длиной L . Аналитическое выражение такой связи имеет вид

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 < L^2. \quad (2.2)$$

Пример 4. Абсолютно твердое тело, которое можно рассматривать как систему частиц с неизменными взаимными расстояниями, т. е. подчиненных связям вида (2.1).

Пример 5. Примером системы со связью как геометрического, так и кинематического характера может служить шар, катящийся без скольжения по шероховатой поверхности. Ограничение кинематического характера заключается в том, что скорость точки касания должна быть равна нулю.

В общем случае связь геометрического характера можно представить уравнением

$$f_i(\vec{r}_1; \vec{r}_2; \dots; \vec{r}_N, t) = 0; \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.3)$$

где N – число частиц в системе; m – число наложенных связей.

Когда ограничения наложены не только на координаты частиц, но и на их скорости, уравнение связи имеет вид

$$f_i(\vec{r}_1; \dot{\vec{r}}_1; \dots; \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_N, t) = 0; \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.4)$$

Если уравнение (2.4) может быть проинтегрировано по времени, оно, очевидно, эквивалентно (2.3). Связи вида (2.3) называются *голономными*, связи вида (2.4) – *неголономными*, если они не сводятся к связям (2.3). Для приведенных выше примеров связи (2.1), (2.2), (2.4) являются голономными и *удерживающими*, так как определены равенством $f = 0$. Связи вида (2.2) определяют *голономную неудерживающую* связь, поскольку для ее описания используют неравенство. Пример 5 представляет неголономную связь. В нем фигурирует ограничение на скорость, которое не может быть сведено к связи геометрического характера. Обусловлено это достаточно сложными движениями, которые возможны для шара на плоскости.

Итак, в случае голономных удерживающих связей накладываемые ими ограничения выражаются в виде равенств, связывающих координаты частиц и время. Связи, не изменяющиеся со временем, называются *стационарными*, в противном случае – *нестационарными*. Уравнения голономной стационарной связи имеют вид

$$f_i(\vec{r}_1; \vec{r}_2; \dots; \vec{r}_n) = 0; \quad i = 1, \dots, M, \quad (2.5)$$

в которые в отличие от нестационарной связи (2.4) не входит явно время.

По сути голономные связи являются геометрическим понятием и часто возникают, когда движение ограничено соприкосновением с другими телами. Для решения задач с неголономными или неудерживающими связями нужны специальные методы, которые в дальнейшем не рассматриваются.

Для определения положения системы из N материальных точек (частиц) в пространстве надо задать N радиусов-векторов, т. е. $3N$ координат. Минимальное число независимых величин, необходимых для однозначного определения положения систе-

мы, называется *числом степеней свободы*; для свободных N частиц это число равно $3N$. Каждая голономная связь с помощью уравнения (2.5) позволяет представить одну из координат как функцию остальных. Следовательно, каждая такая связь уменьшает число независимых координат на единицу. Точка имеет 3 степени свободы. Две точки, находящиеся на фиксированном расстоянии друг от друга, – 5. При наложении M связей число степеней свободы будет равно $3N - M$. Связи ограничивают движение частиц системы, следовательно, вызывают их ускорения, а значит, действуют на частицы с некоторыми силами $\vec{R}_i$, которые называются *силами реакции*.

2.2. КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛО. ВИРТУАЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ. ИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

Рассмотрим систему из N частиц и классифицируем силы, действующие на i -ю частицу. В большинстве случаев силу $\vec{F}_i$, действующую на частицу i системы, удобно подразделять на *внутреннюю силу* $\vec{F}_i^{\text{in}}$, действующую со стороны точек данной системы, и заданную в явном виде внешнюю силу $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ со стороны тел, не входящих в данную систему. Обозначим $\vec{F}_{ij}^{\text{in}}$ силу, действующую на i -ю частицу системы со стороны j -й частицы из этой системы. Тогда внутренняя сила $\vec{F}_i^{\text{in}}$, действующая на i -ю частицу со стороны всех точек данной системы, равна

$$\vec{F}_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{in}}, \quad (2.6)$$

где суммирование распространяется на все координаты частиц, кроме $i = j$. Внутренние и внешние силы принято называть *активными силами*. Тогда любая сила, действующая на i -ю частицу, будет состоять из активной силы

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{in}} + \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (2.7)$$

и силы реакции $\vec{R}_i$. Силы реакции нам неизвестны, их действие состоит в том, чтобы учесть связи в системе. *Задача лагранжевой механики – исключить эти силы из уравнений движения.*

Действительными перемещениями в системе материальных точек называются перемещения, которые определяются уравне-

ниями движения. Пусть материальная точка движется по закону $\vec{r} = \vec{r}(t)$. За бесконечно малый интервал времени dt точка совершает движение по некоторой траектории и действительное перемещение изменяется на радиус-вектор $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)dt$.

Виртуальные (virtus) перемещения – это возможные изменения координат материальных точек, которые допускаются связями в замкнутой системе. Вообразим, что в некоторый момент точка получает бесконечно малое перемещение, которое не связано с движением точки во времени, а допускается наложенными на нее связями. В этом случае изменение функции происходит не вследствие изменения аргумента функции $\vec{r}(t)$, а вследствие изменения вида самой функции. Оно обозначается символом δ . Так из-за бесконечно малого изменения вида векторной функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ получается векторная функция

$$\vec{r} = \vec{r}(t) + \epsilon \vec{\eta}(t). \quad (2.8)$$

Эта новая функция определяется бесконечно малым числом ϵ и произвольной дифференцируемой векторной функцией $\vec{\eta}(t)$.

Рассмотрим, как в простейшем случае связаны направления силы реакции и виртуального перемещения. Так, для двух частиц, связанных жестким невесомым стержнем (пример 2), для виртуального перемещения должно выполняться условие

$$(\vec{r} + \delta\vec{r})^2 = L^2.$$

Поскольку $(\vec{r})^2 = L^2$, то $\vec{r}\delta\vec{r} = 0$ и вектор $\vec{r}$ перпендикулярен вектору виртуального перемещения. Поскольку сила натяжения стержня $\vec{T}$ направлена по радиусу-вектору, то $\vec{T} \perp \delta\vec{r}$ и работа силы натяжения $\vec{T}$ на бесконечно малом виртуальном перемещении равна нулю:

$$\vec{T}\delta\vec{r} = 0.$$

Рассмотрим общий случай. Пусть на систему из N частиц наложены m стационарных связей, выражаемых условиями

$$f_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, M), \quad (2.9)$$

где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор частицы i ($i = 1, 2, \dots, N$) с координатами $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Придадим векторам $\vec{r}_i$ перемещения, допускаемые наложенными стационарными связями, т. е. виртуальные перемещения,

тогда новые координаты частиц $\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$ также должны удовлетворять наложенным на систему связям (2.9):

$$f_l(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N) = 0. \quad (2.10)$$

Подчеркнем еще раз, что смысл $\delta\vec{r}_i$ (2.7) состоит не в перемещении во времени, а в определении тех возможных изменений координат системы, которые допускаются наложенными на нее связями (2.10).

Рассмотрим связь с номером l . Разложив левую часть уравнения (2.9) в ряд по степеням $\delta\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), находим с точностью до первого порядка

$$f_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i = 0. \quad (2.11)$$

Поэтому с учетом (2.9) получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial f_l}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_l}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_l}{\partial z_i} \delta z_i = 0, \quad (2.12)$$

которому должны удовлетворять бесконечно малые виртуальные перемещения.

Рассмотрим в качестве примера движение частицы под действием силы $\vec{F}$ по гладкой неподвижной поверхности, задаваемой функцией

$$f(x, y, z) = 0. \quad (2.13)$$

Запишем уравнения движения

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}, \quad (2.14)$$

где сила реакции $\vec{R}$, вызываемая действием связи, имеет компоненты $\{R_x, R_y, R_z\}$. Найдем условия, налагаемые связью (2.13) на скорость и ускорение несвободной материальной точки. Поскольку уравнение связи (2.13) справедливо во все моменты, то полная производная по времени от этого уравнения равно нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = 0. \quad (2.15)$$

С учетом выражения для градиента

$$\text{grad } f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \quad (2.16)$$

это уравнение можно записать в виде.

$$\text{grad } f \cdot \dot{\vec{r}} = 0. \quad (2.17)$$

Поскольку вектор $\text{grad } f$ является вектором нормали к поверхности (2.13), то мы получаем ограничение на вектор скорости материальной точки. Во время движения он перпендикулярен вектору нормали. Взяв полную производную по времени от (2.17), мы получаем

$$D_2 f + \text{grad } f \cdot \ddot{\vec{r}} = 0, \quad (2.18)$$

где выражение $D_2 f$ равно

$$D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \dot{z}^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \dot{x} \dot{z} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \dot{y} \dot{z}.$$

После подстановки $\ddot{\vec{r}}$, взятого из (2.14), в уравнение (2.18) мы находим ограничение силы реакции в следующей форме:

$$D_2 f + \text{grad } f \left(\frac{\vec{F} + \vec{R}}{m} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Это уравнение показывает, что при наличии связей всегда необходимо в уравнение Ньютона к активным силам, действующих на тело, добавлять силы реакции. В противном случае мы получаем ограничение на активные силы. Решение выражения (2.19) относительно силы реакции $\vec{R}$ имеет вид

$$\vec{R} = - \left(\frac{m D_2 f + \text{grad } f \cdot \vec{F}}{\text{grad } f^2} \right) \text{grad } f + \vec{T}, \quad (2.20)$$

где $\vec{T}$ – произвольный вектор, перпендикулярный к $\text{grad } f$. Идеальными называются связи, для которых вектор $\vec{T}$ равен нулю и сила реакции направлена по $\text{grad } f$. Для таких связей

$$\vec{R} = \lambda \text{grad } f, \quad (2.21)$$

где скалярный множитель равный

$$\lambda = - \left(\frac{mD_2 f + \text{grad} f \cdot \vec{F}}{\text{grad} f^2} \right) \quad (2.22)$$

называется множителем связи. В дальнейшем мы будем рассматривать только идеальные связи. После подстановки (2.21), (2.22) в (2.14) мы получаем замкнутую систему уравнений для определения динамики точки.

Заметим, что идеальные связи существуют и при голономной нестационарной связи, когда справедливы уравнения (2.17), (2.18), но выражение для $D_2 f$ имеет другой вид.

2.3. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

...Постулат А (принцип виртуальных перемещений) есть единственный принцип аналитической механики и поэтому играет фундаментальную роль.

К. Ланцош

Для развития аналитической механики фундаментальное значение имел принцип виртуальных перемещений. Уравнения Ньютона для N частиц при наложении m голономных связей имеют вид:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.23)$$

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, M). \quad (2.24)$$

Их необходимо решить при неизвестных силах реакции. Аналогичная проблема была ранее решена в статике – учении о равновесии тел. Согласно Лагранжу, статика основана на трех основных положениях:

- 1) принципе рычага Архимеда;
- 2) принципе сложения сил;
- 3) статическом принципе виртуальных перемещений.

Обсудим последний принцип. Рассмотрим статическую задачу о равновесии системы частиц. Пусть на частицы в точках с координатами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ действуют активные силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N$. Виртуальные перемещения этих точек обозначим $\delta\vec{r}_1, \delta\vec{r}_2, \dots, \delta\vec{r}_N$. Эти перемещения не должны нарушать имеющихся (кинематических)

связей. Мы будем полагать, что эти перемещения обратимы, т. е. заданные связи не мешают нам заменить любое перемещение $\delta\vec{r}_i$ на $-\delta\vec{r}_i$.

Принцип виртуальных перемещений, идея которого впервые была высказана Стевином (1548–1620), гласит, что механическая система, на точки которой наложены стационарные, удерживающие и идеальные связи, будет находиться в равновесии в том и только в том случае, когда полная виртуальная работа всех активных сил, приложенных к точкам системы, при любом виртуальном перемещении обращается в нуль:

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = 0. \quad (2.25)$$

В простейшей интерпретации этот принцип известен из школьного курса физики как «правило рычага». Можно предложить геометрическую интерпретацию этого уравнения. В левой его части записано, по сути, скалярное произведение $3N$ -мерной силы с проекциями на оси $3N$ -мерного пространства (компонентами) $(F_1, F_2, \dots, F_N)$ и $3N$ -мерного виртуального перемещения с компонентами $(\delta r_1, \delta r_2, \dots, \delta r_N)$.

Обращение в нуль скалярного произведения означает, что $3N$ -мерная сила ортогональна произвольному $3N$ -мерному виртуальному перемещению. Предположим сначала, что на материальную систему не наложено никаких связей. В этом случае точка с координатами в конфигурационном пространстве $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{3N}$ может перемещаться в любом направлении. Тогда принцип виртуальных перемещений требует, чтобы сила, а соответственно и все компоненты $\vec{F}_i$ обратились в нуль:

$$\vec{F}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (2.26)$$

потому что не существует вектора, который был бы перпендикулярен ко всем направлениям в пространстве.

Пусть теперь материальная точка находится под действием заданных M связей, не допускающих ее движение по M координатам конфигурационного пространства. Тогда в силу равенства нулю всех M виртуальных перемещений условие (2.22) заменяется на

$$\delta A = F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + \dots + F_{3N-M} \delta x_{3N-M} = \sum_{i=1}^{3N-M} F_i \delta x_i = 0. \quad (2.27)$$

То есть принцип виртуальных перемещений требует уже не обращения в нуль силы, а лишь ее ортогональности этому подпространству в смысле выполнения последнего равенства.

В итоге при аналитическом подходе можно не интересоваться силами, происходящими от связей, а рассматривать лишь активные, внешние силы. Это достигается тем, что учитываются лишь те перемещения, которые допускаются связями.

Принципу виртуальных перемещений можно придать другую форму. Для равновесия системы из N частиц со связями (2.24) справедливы уравнения Ньютона

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.28)$$

Умножим каждое из них на бесконечно малое виртуальное перемещение $\delta \vec{r}_i$ и просуммируем по всем частицам системы. Тогда с учетом (2.25) получим другую формулировку принципа виртуальных перемещений в статике: *полная виртуальная работа всех сил реакции равна нулю на любых виртуальных перемещениях, не нарушающих связей*:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.29)$$

В механике часто встречаются *потенциальные силы*, для которых силы $\vec{F}_i$ выражаются через величину $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$, называемую *потенциальной энергией*, как

$$(\vec{F}_i)_x = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad (\vec{F}_i)_y = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad (\vec{F}_i)_z = -\frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (2.30)$$

Тогда

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = - \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right) = -\delta U = 0 \quad (2.31)$$

и применение принципа виртуальных перемещений к потенциальным силам в статике означает, что равновесное состояние материальной системы реализуется при экстремуме потенциальной энергии:

$$\delta U = 0. \quad (2.32)$$

2.4. ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Во главу динамики нужно поставить начало Д'Аламбера – общую теорему, которая указывает, как должны быть составлены уравнения движения для всякой динамической системы. Эта теорема была найдена Д'Аламбером, который заметил, что законы движения и уравнения движения похожи на законы равновесия и уравнения равновесия... Только с Д'Аламбера начинается динамика системы.

В.Л. Кирпичев,
Беседы о механике

Французский механик и математик **Д'Аламбер** в книге «Динамика» указал общий метод решения задач динамики несвободных систем, распространив на динамику принцип виртуальных перемещений. Аналитическое выражение этого принципа было дано позднее Лагранжем. Простая и плодотворная идея Д'Аламбера состоит в следующем. Мы исходим из основного закона Ньютона (2.23) для материальной точки в механической системе из N частиц и переписываем его в виде

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Введем вектор $\vec{I}_i$ следующим образом:

$$\vec{I}_i = -m_i \ddot{\vec{r}}_i. \quad (2.33)$$

Его можно рассматривать как силу, создаваемую движением (*да-ламберова сила инерции*). Теперь уравнение Ньютона можно записать в виде

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{I}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.34)$$

Казалось бы, что промежуточная ступень (2.33) дает лишь новое название произведению массы на ускорение, взятому с обратным знаком. «Именно эта кажущаяся тривиальность делает принцип Д'Аламбера гениальным открытием и в то же время постоянным источником неверных толкований и недоразумений»

[12. С. 113]. Принцип Д'Аламбера гласит, что *любая система сил в любой момент находится в равновесии, если мы добавляем к активным силам силы инерции*.

Покажем, что последовательное применение принципа Д'Аламбера и принципа виртуальных перемещений к механической системе, подчиненной стационарным, удерживающим и идеальным связям, позволяет получить *общее уравнение динамики*. Умножая уравнение (2.34) на вектор $\delta \vec{r}_i$ виртуального перемещения i -й частицы и суммируя по всем частицам, мы получаем общее уравнение статики

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{R}_i + \vec{I}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.35)$$

Поскольку для идеальных связей сумма работ сил реакции на виртуальных перемещениях равна нулю, мы получаем общее уравнение динамики

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{I}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (2.36)$$

Полная виртуальная работа всех приложенных сил и сил инерции равна нулю для всех обратимых виртуальных перемеще-



Жан Лерон Д'Аламбер (фр. Jean Le Rond d'Alembert; 16 ноября 1717 – 29 октября 1783) – французский механик и математик

ний. Полученное уравнение соединяет принцип Д'Аламбера и принцип виртуальных перемещений Лагранжа и носит название *уравнения Д'Аламбера–Лагранжа*.

Заданная система приложенных сил обычно не находится в равновесии, так как для этого требуется выполнение специальных условий. Полная виртуальная работа этих сил обычно отлична от нуля. Однако само движение системы восполняет данный недостаток. Тело движется таким образом, чтобы дополнительные инерционные силы, порождаемые движением, привели баланс работы к нулю. Таким путем из принципа Д'Аламбера следуют общие уравнения движения (2.36) произвольной механической системы. Кажется, что так как тело на самом деле движется, то нет никаких оснований рассматривать его покоящимся. Однако движение есть явление относительное. Мы можем ввести систему отсчета, движущуюся вместе с телом, и наблюдать за неподвижным телом из этой системы отсчета. Кроме того, принцип Д'Аламбера акцентирует внимание на силах, действующих на виртуальных перемещениях, которые можно производить в любой момент безотносительно к реальному движению тела. Этот принцип использует виртуальные, а не реальные перемещения и поэтому он одинаково применим как к покоящимся телам, так и к движущимся. *Принцип Д'Аламбера применим к системам с голономными и неголономными связями, а также к системам с трением, если включить силы трения в число активных сил. Все другие принципы механики являются просто другими математическими формулировками этого принципа, более удобными для решения конкретного класса задач.*

2.5. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПЕРВОГО РОДА

С помощью принципа Д'Аламбера можно вывести дифференциальные уравнения движения. Введем удобные для дальнейшего обозначения:

$$\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6), \quad \dots, \quad \vec{r}_N = (x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N});$$

$$\delta \vec{r}_1 = (\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3), \quad \delta \vec{r}_2 = (\delta x_4, \delta x_5, \delta x_6), \quad \dots, \quad \delta \vec{r}_N = (\delta x_{3N-2}, \delta x_{3N-1}, \delta x_{3N});$$

$$\vec{F}_1 = (F_1, F_2, F_3), \quad \vec{F}_2 = (F_4, F_5, F_6), \quad \dots, \quad \vec{F}_N = (F_{3N-2}, F_{3N-1}, F_{3N}).$$

Запишем уравнения Д'Аламбера–Лагранжа и уравнения m связей в виде (2.12) в новых обозначениях:

$$\sum_{\mu=1}^{3N} (m_{\mu} \ddot{x}_{\mu} - F_{\mu}) \delta x_{\mu} = 0; \quad (2.37)$$

$$\sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} \delta x_{\mu} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (2.38)$$

В этой системе линейных уравнений роль неизвестных играют δx_{μ} . На $3N$ переменных δx_{μ} наложено M связей (2.38), поэтому M переменных оказываются линейно зависимыми. Пусть зависимыми будут первые M переменных. Умножим каждое уравнение (2.38) на скалярный множитель λ_i , где λ_i – некоторые функции времени. Просуммируем по i и поменяем порядок суммирования:

$$\sum_{i=1}^M \lambda_i \sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} \delta x_{\mu} = \sum_{\mu=1}^{3N} \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} \delta x_{\mu} = 0. \quad (2.39)$$

Сложим (2.39) с уравнением Д'Аламбера–Лагранжа (2.37)

$$\sum_{\mu=1}^{3N} \left(m_{\mu} \ddot{x}_{\mu} - F_{\mu} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} \right) \delta x_{\mu} = 0. \quad (2.40)$$

Выберем неопределенные множители λ_i так, чтобы коэффициенты перед первыми M зависимыми перемещениями δx_{μ} обращались в нуль.

$$m_{\mu} \ddot{x}_{\mu} - F_{\mu} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} = 0; \quad \mu = 1, 2, \dots, m. \quad (2.41)$$

Таким образом λ_i выбираются так, чтобы по первым M координатам, x_{μ} ($\mu = 1, 2, \dots, M$) были справедливы уравнения Ньютона. Поскольку все остальные виртуальные перемещения независимы и не равны нулю, то для выполнения соотношения (2.40) мы обязаны положить равными нулю коэффици-

енты при каждом из оставшихся независимых виртуальных перемещениях:

$$m_{\mu} \ddot{x}_{\mu} - F_{\mu} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} = 0; \quad \mu = 1, 2, \dots, 3N - M. \quad (2.42)$$

Добавляя уравнения связей к (2.41), получаем *систему уравнений Лагранжа первого рода*:

$$\begin{cases} m_{\mu} \ddot{x}_{\mu} - F_{\mu} + \sum_{i=1}^M \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{\mu}} = 0; & \mu = 1, 2, \dots, 3N, \\ f_i(x_1, \dots, x_{3N}) = 0; & i = 1, 2, \dots, M, \end{cases} \quad (2.43)$$

справедливую для систем со связями. Система $3N+M$ уравнений (2.43) достаточна для нахождения $3N$ координат и M неизвестных множителей Лагранжа λ_i ($i = 1, 2, \dots, M$). В ней отсутствуют силы реакции, а введены только известные уравнения связи. Подобную систему уравнений можно вывести и для неголономных систем. Физический смысл λ_i определяется уравнением связи (размерностью функции f), размерностью координат x_{μ} и рассматриваемой задачей.

Рассмотрим в качестве примера динамику математического маятника (рис. 2.1) – материальной точки, закрепленной на конце нерастяжимой нити длиной l . Запишем связь между декартовыми и полярными координатами материальной точки:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.44)$$

Имеем одно уравнение связи

$$f = \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0. \quad (2.45)$$

Активная сила действует только по оси y : $F_1 = 0, F_2 = mg$. Производные по координатам от уравнения связи равны

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \varphi.$$

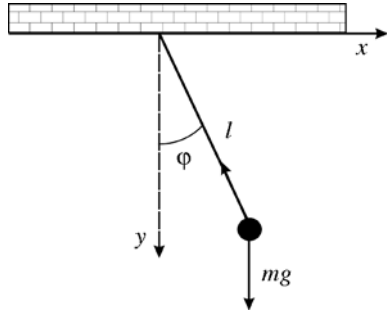


Рис. 2.1

Тогда для системы уравнений Лагранжа первого рода

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \lambda \cos \varphi = 0, \\ m\ddot{y} - mg + \lambda \sin \varphi = 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2} - l = 0. \end{cases}$$

Функция λ имеет смысл силы натяжения нити. Для интегрирования этой системы (см. гл. 4) требуется прежде всего исклю-

чить неизвестную λ , учитывая, что производная от нее в уравнения не входит.

2.6. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Новые идеи придумывать трудно. Для этого требуется исключительное воображение.

Р. Фейнман

Уравнения Лагранжа первого рода учитывают связи в системе, но их решение громоздко и неудобно. Для голономных систем Лагранж предложил другой способ решения. Пусть на систему из N материальных точек наложено M голономных связей (2.24). Как уже отмечалось, при таких связях мы можем выразить M декартовых координат из этих уравнений как функции остальных $3N - M$ координат и рассматривать эти последние в качестве обобщенных. Вообще любые величины, задание которых в количестве, равном числу степеней свободы, однозначно определит положение тела в пространстве, носят название *обобщенных координат*. Пусть вместо декартовых введены *независимые обобщенные координаты*, т. е. найдены $s = (3N - M)$ линейно независимых функций $q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-M}(t)$, через которые удалось выразить положение всех точек системы и решить уравнения (2.24). Тогда радиус-вектор положения каждой материальной точки $\vec{r}_i$ зависит от независимых обобщенных координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-M}(t)). \quad (2.46)$$

Эти функции, подставленные в (2.46), *обращают это уравнение в тождество*. После введения обобщенных координат в каждый момент устанавливается взаимно-однозначное соответствие между всевозможными положениями системы и точками в пространстве с координатами $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N-M}(t))$. Движению системы отвечает движение точки в этом пространстве. Первые производные по времени от обобщенных координат, т. е. величины $\dot{q}_k$ называются обобщенными скоростями системы, а вторые $\ddot{q}_k$ – обобщенными ускорениями. Для краткости обозначений мы будем часто условно понимать под q совокупность всех координат, а под $\dot{q}$ – совокупность всех скоростей.

Одновременное задание всех обобщенных координат и скоростей полностью определяет состояние системы в начальный момент и позволяет предсказать ее дальнейшее поведение. С математической точки зрения это означает, что уравнения Ньютона, как мы увидим далее, могут быть записаны в терминах обобщенных координат.

Выразим виртуальные перемещения каждой частицы через виртуальные перемещения обобщенных координат:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.47)$$

и подставим их в общее уравнение динамики (2.36):

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \left((m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = 0. \quad (2.48)$$

После изменения порядка суммирования получим

$$\sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0.$$

Поскольку все виртуальные перемещения обобщенных координат независимы и произвольны, то нулю должны равняться множители перед каждым виртуальным перемещением. В итоге

вследствие наложенных на систему связей мы получаем только $3N - M$ уравнений движения:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, 3N - M. \quad (2.49)$$

Представим входящие сюда величины через обобщенные координаты, скорости и ускорения. Заметим вначале, что скорость частицы в декартовых и обобщенных координатах связаны соотношением

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \quad (2.50)$$

Докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \quad (2.51)$$

т. е. при дифференцировании радиуса-вектора частицы можно менять порядок дифференцирования по времени и обобщенной координате. Подставим соотношение

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad (2.52)$$

которое сразу следует из (2.50):

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

в (2.51), мы немедленно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{j=1}^{3N-M} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{3N-M} \left(\frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right). \end{aligned}$$

Преобразуем в (2.49) слагаемые с силой инерции. Подставляя $\ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{v}}_i$ в тождество

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

и учитывая только что доказанные соотношения, получаем

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

После суммирования по индексу i

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (2.53)$$

в правую часть входит кинетическая энергия T системы частиц

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Из (2.50) следует, что она зависит не только от обобщенных скоростей, но и от обобщенных координат:

$$T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N-M} \sum_{j=1}^{3N-M} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.54)$$

где величины

$$a_{ij}(q) = \sum_{k=1}^{3N} m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \quad (2.55)$$

вследствие связей есть *нелинейные функции* от обобщенных координат.

Тогда уравнения движения (2.53) имеют вид

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T. \quad (2.56)$$

Ограничимся случаем, когда сила $\vec{F}_i$ выражается через потенциальную энергию системы $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{3N})$ соотношениями (2.30). При описании системы в обобщенных координатах логично ввести также и *обобщенную силу* как

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} =$$

$$= \frac{\partial U[\vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_s), \vec{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_s), \dots, \vec{r}_{3N}(q_1, q_2, \dots, q_s)]}{\partial q_j}.$$

Тогда (2.56) запишем в виде

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T. \quad (2.57)$$

Подставляя сюда $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$ и учитывая независимость потенциальной энергии от обобщенных скоростей $\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \right)$, получаем

уравнения движения в обобщенных координатах

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_j} = 0. \quad (2.58)$$

Или, обозначая $L = T - U$, имеем в окончательном виде уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} L - \frac{\partial}{\partial q_j} L = 0; \quad (2.59)$$

$$j = 1, 2, \dots, 3N - M.$$

Полученные уравнения носят название *уравнений Лагранжа второго рода для потенциальных сил*, а величина $L = T - U$, равная разности между кинетической и потенциальной энергией, называется *лагранжианом*, или *функцией Лагранжа*. В случае ес-

ли взаимодействие в системе отсутствует, функция Лагранжа равна просто кинетической энергии системы:

$$L = T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (2.60)$$

Пример. Рассмотрим снова решение задачи о математическом маятнике на основе уравнений Лагранжа второго рода. Будем использовать обозначения рис. 2.1. Количество степеней свободы $s = 1$. В качестве единственной обобщенной координаты возьмем угол отклонения маятника от вертикали ϕ . Тогда уравнения

$$x = l \sin \phi, \quad y = l \cos \phi$$

однозначно разрешают уравнение связи $r = l$. Кинетическая, потенциальная энергии и лагранжиан системы имеют компактный вид:

$$U = -mgy = -mgl \cos \phi;$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2;$$

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2} \dot{\phi}^2 + mgl \cos \phi.$$

Тогда уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

принимают компактный вид:

$$ml^2 \ddot{\phi} + mgl \sin \phi = 0. \quad (2.61)$$

Отметим преимущества уравнений Лагранжа второго рода.

1. Одна функция – лагранжиан – определяет всю динамику системы.

2. Вид уравнений движения не зависит от выбора обобщенных координат.

3. Уменьшается количество вычислений, так как не нужно вводить силы реакции связей. Учет связей в голономных системах сводится просто к уменьшению числа степеней свободы и, следовательно, уравнений.

4. Уравнения позволяют описать более общие (не механические) системы даже при отсутствии понятия массы.

2.7. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Столь прекрасная и до сих пор неслыханная задача.

Г. Лейбниц

Я, таким образом, одновременно решил две замечательные задачи – одну оптическую, другую механическую, т. е. я сделал больше того, что требовал от других. Я показал, что хотя эти две задачи взяты из совершенно различных частей науки, тем не менее они имеют одинаковую природу.

И. Бернулли

Одним из истоков возникновения вариационного исчисления является задача о брахистохроне (о кривой быстрейшего спуска): на материальную точку массы m , движущуюся в вертикальной плоскости от точки A к точке B , действует сила тяжести. Нужно найти траекторию, движение по которой при фиксированных точках начала и конца происходит за наименьшее время. Эта задача была впервые сформулирована и решена **Иоганном Бернулли** в 1696 г. При решении этой задачи был сформулирован мощный математический аппарат, объясняющий *принципы* движения в природе. Пусть искомая кривая аналитически выражается уравнением $y = f(x)$ (рис. 2.2). Если ds – элементар-



Иоганн Бернулли (нем. Johann Bernoulli; 27 июля 1667, Базель – 1 января 1748, Базель) – швейцарский математик. Развил теорию показательной функции, вывел правило раскрытия неопределенности типа $0/0$ (носящее имя Лопиталья), разработал методы интегрирования рациональных дробей, вычисления площадей плоских фигур, спрямление различных кривых и др. Ему принадлежит первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчисления

ный путь от точки (x, y) до точки $(x + dx, y + dy)$, то

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 =$$

$$= dx^2 \left(1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2} \right) = dx^2 (1 + (y'_x)^2);$$

или

$$ds = dx \sqrt{1 + (y'_x)^2}. \quad (2.62)$$

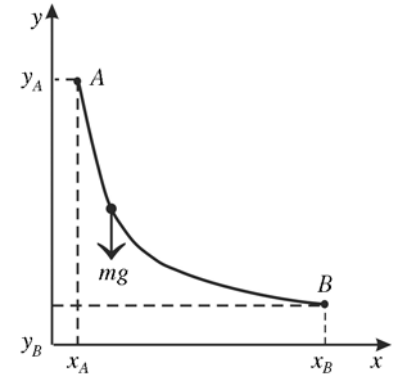


Рис. 2.2

Интервал ds материальная точка проходит за время dt :

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}{v}.$$

Упростим задачу, полагая, что скорость v в точке A равна нулю. Из закона сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} + mgy = mgy_A = E = \text{const}$ можно найти скорость v в точке с координатами $(x, y(x))$:

$$v = \sqrt{2g(y_A - y)}.$$

Следовательно

$$dt = \frac{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}{\sqrt{2g(y_A - y)}} dx,$$

и частица проходит путь от точки A до точки B за время

$$t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\frac{1 + (y'_x)^2}{2g(y_A - y)}} dx. \quad (2.63)$$

В этом выражении множеству функций $y = y(x)$ ставится в соответствие число t_{AB} . В таких случаях говорят, что на множестве

функций задан *функционал*. Подобные задачи могут быть сформулированы в общем виде следующим образом. Пусть задана функция $F(x, y, y'_x)$ трех переменных $x, y(x), y'_x$. Задан определенный интеграл

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y'_x) dx, \quad (2.64)$$

в котором функция $y(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$y(x_A) = a; \quad y(x_B) = b. \quad (2.65)$$

На функции $y(x)$ накладываются определенные условия (условия регулярности): они должны быть непрерывными, дифференцируемыми и иметь непрерывные производные. Требуется найти одну или несколько функций с граничными условиями (2.65), для которых J принимает минимальное или, по крайней мере, экстремальное значение. На первый взгляд, сформулированная задача совершенно отличается от предыдущих задач на экстремум функции нескольких переменных. Здесь должна быть минимизирована не функция, а определенный интеграл, и вместо совокупности независимых переменных, минимизирующих функцию, мы должны найти функцию $y(x)$, минимизирующую интеграл.

2.7.1. Подход Эйлера

Читайте, читайте Эйлера – это наш общий учитель.

П. Лаплас

Эйлер показал, что проблема минимизации определенного интеграла (2.64) может быть решена простыми («инженерными») методами, аппроксимацией определенного интеграла суммой большого числа членов со сколь угодно малыми ошибками. Для этого разобьем отрезок (x_A, x_B) на n равных частей с координатами $x_A, x_1, x_2, \dots, x_B$ и интервалом $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Обозначим $y(x_i) \equiv y_i$ и заменим производную отношением конечных разностей

$$y'(x_i) = y'_i \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad (2.66)$$

а интеграл (2.64) – конечной суммой

$$\begin{aligned} J &= \int_{x_A}^{x_B} F(y, y') dx \approx \sum_{i=1}^n F(y_i, y'_i) \Delta x = \\ &= \sum_{i=1}^n F(y(x_i), y'_i(x_i)) (x_{i+1} - x_i) = J(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Записанная сумма зависит от n переменных $y_1, \dots, y_n$. Используем условия экстремума функции многих переменных

$$\frac{\partial J}{\partial y_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.67)$$

и обозначим $F_i = F(y(x_i), y'(x_i))$. Из определения $y'(x_i)$ (2.66) видно, что $y(x_i)$ входит не только в y'_i , но и в y'_{i-1} , поэтому условие экстремума (2.67) перепишем в виде

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \frac{\partial F_i}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial y'_{i-1}} \frac{\partial y'_{i-1}}{\partial y_i} = 0. \quad (2.68)$$

Тогда с учетом (2.66) получаем

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} + \frac{\partial F_i}{\partial y'_i} \left(-\frac{1}{\Delta x} \right) + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial y'_{i-1}} \left(\frac{1}{\Delta x} \right) = 0, \quad (2.69)$$

Леонард Эйлер (нем. Leonhard Euler; 4 (15) апреля 1707, Базель, Швейцария – 7 (18) сентября 1783, Санкт-Петербург, Россия) – выдающийся математик, внесший значительный вклад в развитие математики, механики, физики, астрономии. Автор свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. В 1726 г. был приглашен работать в Санкт-Петербург, в 1727 г. переехал жить в Россию. В 1731–1741 гг. и начиная с 1766 г. был академиком Петербургской академии наук (в 1741–1766 гг. работал в Берлине, оставаясь почетным членом Петербургской академии)



или

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y'_i} - \frac{\partial F_{i-1}}{\partial y'_{i-1}} \right) \left(\frac{1}{\Delta x} \right).$$

Когда число разбиений отрезка неограниченно возрастает, то $\Delta x \rightarrow 0$ и при предельном переходе мы должны заменить дискретные величины их непрерывными аналогами:

$$y_i \rightarrow y(x), \quad y'_i \rightarrow y'(x), \quad F_i \rightarrow F(x, y(x), y'(x)).$$

При этом уравнение в конечных разностях (2.69) переходит в найденное Л. Эйлером дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'(x)} \quad (2.70)$$

для функции $F(x, y, y'_x)$.

2.7.2. Подход Лагранжа

Лагранж в 1760–1761 гг. решил задачу отыскания минимума определенного интеграла (2.64) с помощью методов, не требующих предельных переходов. Величина интеграла (2.64) зависит от выбора пути движения частицы между конечными точками, т. е. от вида функции $y(x)$ (рис. 2.3).

Для наглядности мы использовали график в декартовых координатах, однако по сути x является просто независимой переменной и вовсе не обязана быть переменной в декартовых координатах. Предположим, что кривая ArB будет траекторией движения, на которой J имеет экстремальное значение. Чтобы доказать, что это действительно так, нужно вычислить подобный интеграл для слегка измененной функции $\bar{y}(x)$, которую можно записать в виде

$$\bar{y}(x) = y(x) + \eta(x)\epsilon, \quad \epsilon \ll 1. \quad (2.71)$$

Мы рассматриваем соседнюю траекторию $Ar'B$ с теми же конечными точками A и B . Координаты двух точек, принадлежащих исходной функции p и слегка измененной p' , таковы: $p = (x, y)$; $p' = (x, y(x) + \eta(x)\epsilon)$, т. е. абсциссы точек одинаковы. Здесь $\eta(x)$ – произвольная функция от x , удовлетворяющая

тем же условиям непрерывности, что и функция $y(x)$, а также условию

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (2.72)$$

При помощи параметра ϵ мы можем делать изменение функции $y(x)$ произвольно малым. Теперь сравним значение измененной функции $\bar{y}(x)$ со значением исходной при некотором фиксированном значении независимой переменной x . Для этого образуем разность между $\bar{y}(x)$ и $y(x)$; она называется *вариацией функции* $y(x)$ и обозначается через $\delta y(x)$:

$$\delta y = \bar{y}(x) - y(x) = \epsilon \eta(x). \quad (2.73)$$

Вариация функции характеризуется двумя основными свойствами. Во-первых, это бесконечно малое изменение, так как параметр ϵ мал. Во-вторых, это виртуальное, мысленное изменение функции при фиксированном значении аргумента функции, которое можно осуществить произвольным образом. *Существенное различие* δy и dy состоит в том, что хотя обе величины являются бесконечно малыми изменениями функции $y(x)$, однако dy порождается бесконечно малым изменением dx независимой переменной x , в то время как δy обязано своим возникновением новой функции $\bar{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$. Мы уже сталкивались с вариацией функции, когда вводили представление о виртуальных перемещениях (2.8).

Природа процесса варьирования такова, что варьируется лишь функция $y(x)$, а варьирование независимой переменной x оказывается излишним. Поэтому мы всегда будем считать $\delta x = 0$. Кроме того, условие (2.10) означает, что две граничные ординаты заданы, следовательно, вариации $y(x)$ на концах отрезка равны нулю:

$$\begin{aligned} \delta[y(x)]|_{x=x_1} &= \epsilon \eta(x_1) = 0, \\ \delta[y(x)]|_{x=x_2} &= \epsilon \eta(x_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

В таких случаях говорят о варьировании при фиксированных граничных условиях. Исследуем свойства δy . Возьмем производную от функции $\bar{y}(x)$:

$$\bar{y}'(x) = y'(x) + \eta'(x)\epsilon. \quad (2.75)$$

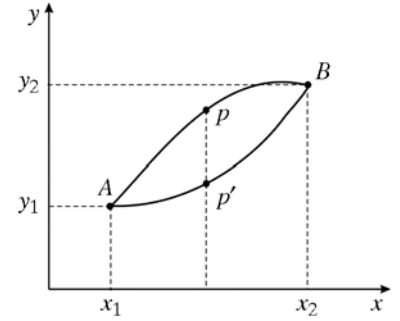


Рис. 2.3

Разность $\delta \bar{y}'(x) = \bar{y}'(x) - y'(x) = \eta'(x)\epsilon$ естественно назвать вариацией производной функции $y(x)$. Тем не менее нетрудно вычислить производную вариации

$$\frac{d}{dx} \delta y = \eta'(x)\epsilon.$$

Поэтому производная вариации функции равняется вариации производной от нее:

$$\delta \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) = \frac{d}{dx} \delta y(x).$$

Определим операцию *вариации определенного интеграла* (2.64), взятого между фиксированными пределами интегрирования. Под такой вариацией понимается изменение определенного интеграла вследствие изменения подынтегральной функции:

$$\begin{aligned} \delta J &= \delta \int_a^b F(x, y(x), y(x)') dx = \\ &= \int_a^b \left[\bar{F}(x, \bar{y}(x), \bar{y}(x)') - F(x, y(x), y(x)') \right] dx = \\ &= \int_a^b \delta F(x, y(x), y(x)') dx. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Эта вариация является функцией параметра ϵ :

$$\delta J = G(\epsilon),$$

вследствие условий экстремума функция $G(\epsilon)$ имеет минимум, если выполняются условия

$$\frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}(\epsilon=0) = 0, \quad \frac{d^2 G(\epsilon)}{d^2 \epsilon}(\epsilon=0) > 0. \quad (2.77)$$

Раскладывая $F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta')$ в ряд по степеням ϵ с точностью до ϵ^2 , мы получаем

$$\frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon}(\epsilon=0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0; \quad (2.78)$$

$$\frac{d^2 G(\epsilon)}{d^2 \epsilon}(\epsilon=0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \eta \eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y'} \eta'^2 \right) dx > 0. \quad (2.79)$$

Выражение в (2.78) неудобно для дальнейшего анализа, так как $\eta(x)$ и $\eta'(x)$ взаимосвязаны, однако эту взаимосвязь без явного вида функций невозможно записать в алгебраической форме. Эту трудность можно обойти, применив интегрирование по частям ко второй части интеграла (2.78):

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx.$$

В силу (2.74) первый член в последнем равенстве равен нулю и поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(-\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta + \frac{\partial F}{\partial y} \eta \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \eta dx = 0.$$

Введем для краткости обозначение $E(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right)$, тогда условие стационарности интеграла (2.64) запишем в виде

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x) \eta(x) dx = 0. \quad (2.80)$$

Нетрудно видеть, что (2.80) обратится в нуль при произвольной функции $\eta(x)$ только в том случае, если $E(x)$ тождественно равна нулю на интервале (x_1, x_2) . Это положение носит название *основной леммы* вариационного исчисления. Действительно, ввиду произвольности функции $\eta(x)$ мы можем выбрать ее таким образом, чтобы она обращалась в нуль в любой точке, кроме малой окрестности точки $x = \xi$. Обозначим радиус этой окрестности ρ , тогда

$$\eta(x) = \begin{cases} \eta(x), & x \in [x - \rho, x + \rho] \\ 0, & x \notin [x - \rho, x + \rho] \end{cases}.$$

Внутри малой окрестности $E(x)$ практически постоянна и может быть вынесена за знак интеграла в (2.80), тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} E(x) \eta(x) dx = E(\xi) \int_{\xi-\rho}^{\xi+\rho} \eta(x) dx. \quad (2.81)$$

Совершаемая при этом ошибка стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$.

Поскольку $\int_{\xi-\rho}^{\xi+\rho} \eta(x) dx$ может быть сделан отличным от нуля, для

обращения в нуль (2.80) необходимо, чтобы $E(\xi)$ была равна нулю. Точка $x = \xi$ может быть выбрана в любом месте интервала (x_1, x_2) , следовательно, во всем интервале справедливо уравнение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) = 0. \quad (2.82)$$

Это условие является и достаточным, так как, если подынтегральное выражение тождественно обращается в нуль в области интегрирования, то сам интеграл равен нулю. В итоге функция $y(x)$, которая является решением дифференциального уравнения (2.82) второго порядка, дает необходимое и достаточное условие стационарности интеграла J при граничных условиях (2.65). Это уравнение носит название дифференциального уравнения Эйлера–Лагранжа.

В случае минимума функционала необходимо выполнение условия (2.79). Интегрированием по частям слагаемого $2 \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \eta \eta'$ в нем нетрудно убедиться, что минимум функционала реализуется на решениях уравнения Эйлера–Лагранжа и условии

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y'} \eta'^2 \right) > 0. \quad (2.83)$$

Заметим, что в физических приложениях встречаются случаи, когда уравнение (2.82) имеет несколько решений. Тогда из них выбирается решение с наименьшим значением (2.64).

Если F не зависит от x , то уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} y'' = 0$$

для функции $F(y(x), y'(x))$ после умножения на y' преобразуется к виду

$$\frac{d}{dx} \left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = 0.$$

Поэтому порядок уравнения Эйлера–Лагранжа понижается

$$\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' \right) = \text{const}. \quad (2.84)$$

Пример. Необходимо найти в плоскости линию наименьшей длины, соединяющую точки A и B . Длина бесконечно малого отрезка $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \sqrt{1 + (y'_x)^2}; \quad dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Длина всей линии между точками A и B :

$$L_{AB} = \int \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Мы имеем задачу на определение стационарного значения определенного интеграла, где $F = \sqrt{1 + (y'_x)^2}$ и

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Тогда

$$\sqrt{1 + (y')^2} = C.$$

Отсюда следует, что y' – постоянная величина:

$$y' = \frac{dy}{dx} = a; \quad y = ax + b,$$

и линия наименьшей длины, соединяющая точки A и B , является прямой.

2.8. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ИЗ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Пять геометров, Клеро, Эйлер, Д'Аламбер, Лагранж и Лаплас, разделили между собою тот мир, существование которого открыл Ньютон. Они исследовали его во всех направлениях, проникли в области, которые считались недоступными, указали множество явлений в этих областях, которые еще не были открыты наблюдением, и, наконец, в этом их вечная слава, – они охватили с помощью одного принципа, одного-единственного закона самые тонкие и таинственные явления в движении небесных тел. Таким образом, геометрия осмелилась распоряжаться будущим, и ход будущих столетий только подтвердит во всех подробностях заключения науки.

*Д. Араго,
Похвальная речь о Лапласе*

Сравним два выражения:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'(x)} - \text{уравнение Эйлера–Лагранжа};$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 - \text{уравнение Лагранжа}.$$

Связано ли движение тела с экстремалами некоторого функционала?

В 1744 г. **П. Мопертюи** выдвинул принцип: «Количество действия, необходимое для того, чтобы произвести некоторое изменение в природе, является наименьшим возможным... Мы можем восхищаться результатами его применения ко всем явлениям.

Движение животных, произрастание растений, вращение звезд являются только его следствиями» [17. С. 26]. Определяя новую величину, названную им действием, для тела массой m как mvs (v – скорость, s – путь, пройденный телом), он вывел из принципа наименьшего действия законы рычага, преломления света и т. д.

Гамильтон обобщил определение действия Мопертюи на определенный функционал и показал, что условие его минимальности приводит к уравнениям Лагранжа. Следуя Гамильтону, придадим принципу Д'Аламбера (2.50) в обобщенных координатах вариационную формулировку. Проинтегрируем левую часть уравнения (2.50) по времени в интервале от $t = t_1$ до $t = t_2$, введем обобщенную силу (2.58) и представим результат в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) \delta q_j = 0. \quad (2.85)$$

Используя коммутативность дифференцирования и варьирования, запишем член $m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$ в форме

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Пьер Луи де Мопертюи (фр. Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698–1759) – французский физик, астроном и геодезист, автор принципа наименьшего действия



Тогда левая часть уравнения (2.85) равна

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i \delta \vec{r}_i) - m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i \right) + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \\ & = \sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N (-m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i) + \delta q_j \frac{\partial U}{\partial q_j} \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{3N-M} \left(\sum_{i=1}^N \left(m_i \dot{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) \right) \Big|_{t_1}^{t_2} - \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (m_i \dot{r}_i^2) - U \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали перестановочность операций интегрирования и варьирования по обобщенным координатам $q_j (j = 1, 2, \dots, 3N - M)$. Потребуем, чтобы при $t = t_1$ и $t = t_2$ положение системы было заданным, или иными словами, вариации обобщенных координат в эти моменты обращались в нуль:

$$\delta q_j(t = t_1) = 0, \quad \delta q_j(t = t_2) = 0. \quad (2.86)$$

Выражение $\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (m_i \dot{r}_i^2) - U \right)$ является лагранжианом системы в

обобщенных координатах. В итоге принцип Д'Аламбера для голономных систем эквивалентен интегральному принципу Гамильтона.

Пусть в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$ система занимает определенные положения, характеризуемые двумя наборами значений координат $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (2.87)$$

принимал наименьшее значение. Величина S называется *действием*. Принцип наименьшего действия есть один из основных принципов в теоретической физике.

Замечания к принципу наименьшего действия

1. Отметим, что принцип **Гамильтона** мы вывели из принципа Д'Аламбера. Однако, более современная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать его как *исходный принцип* с заданным лагранжианом. В этом случае уравнения движения Лагранжа и остальные законы механики выводятся из него.

2. Принцип Гамильтона не добавляет новых сведений к тем, которыми мы уже располагаем, однако дает более *изящную краткую и плодотворную формулировку* законов движения, чем другие постулаты.

3. И уравнения Лагранжа (первого и второго рода), и законы Ньютона детализируют движение решением дифференциальных уравнений. *Принцип Гамильтона – интегральный принцип*. Он рассматривает движение как нечто целое.

4. Еще одно его преимущество состоит в том, что он может быть применен к немеханическим системам, к которым законы Ньютона неприменимы. Эта *большая общность* принципа Гамильтона является дополнительной причиной для принятия его в качестве основного постулата.

5. Идея о получении основных уравнений природы из вариационных принципов сохранилась в современной физике. Уравнения классической и квантовой теории поля получены из принципа наименьшего действия Гамильтона с определенными лагранжианами.



Вильям Роуэн Гамильтон (англ. William Rowan Hamilton; 4 августа 1806 Дублин – 2 сентября 1865) – один из выдающихся физиков и математиков XIX в. Президент Королевской ирландской академии

6. Принцип наименьшего действия рассматривает движение частицы по всем возможным траекториям, из которых выбирается траектория с наименьшим действием. Физический смысл такого подхода становится ясным в квантовой механике, когда частице приписывается набор траекторий.

7. Лагранжиан определен с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат и времени. Действительно, для двух функций $L'(q, \dot{q}, t)$ и $L(q, \dot{q}, t)$, отличающихся друг от друга на полную производную по времени от какой-либо функции координат и времени $f(q, t)$:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t),$$

интегралы действия связаны соотношением

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}f(q, t) dt = \\ &= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1). \end{aligned}$$

Они различаются дополнительным членом, исчезающим при варьировании, и оба лагранжиана приводят к одинаковым уравнениям движения. Тем не менее во многих физических задачах, когда решение уравнений зависит от параметров, именно требование минимума действия определяет значения параметров и отвечает истинному движению системы.

8. Отметим, что численное значение интеграла (2.87) совершенно не зависит от выбора совокупности обобщенных координат, в которой решается задача. При любых их преобразованиях уравнения Лагранжа второго рода справедливы и в новых координатах. Тем не менее остановимся на этом вопросе детальнее.

Пусть каждая независимая переменная q_i исходного набора обобщенных координат $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ связана с другим набором обобщенных координат $(Q_1, Q_2, \dots, Q_s)$ при помощи однозначных обратимых преобразований

$$q_i = F_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s) \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (2.88)$$

называемых *точечными преобразованиями*. При этом обратное преобразование, записанное в виде

$$Q_i = G_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

удовлетворяет тождеству

$$q_i = F_i(G_1(q_1, q_2, \dots, q_s), G_2(q_1, q_2, \dots, q_s), \dots, G_s(q_1, q_2, \dots, q_s)).$$

Движение в системе координат $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ описывается временной зависимостью s -мерного вектора $\vec{q}(t)$, а в системе координат $(Q_1, Q_2, \dots, Q_s)$ – зависимостью s -мерного вектора $\vec{Q}(t)$. Выразим $L(q, \dot{q})$ через новый набор независимых переменных,

$$\text{учитывая, что } \dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j = \sum_{j=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j;$$

$$L(q_i, \dot{q}_i) = L\left(F_i(Q), \sum_{j=1}^s \frac{\partial F_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j\right) = \bar{L}(Q_i, \dot{Q}_i). \quad (2.89)$$

Ясно, что обращение в нуль вариации действия (2.87) с функцией Лагранжа $L(q, \dot{q})$ и фиксированными граничными условиями требует обращения в нуль вариации действия с функцией Лагранжа $\bar{L}(Q, \dot{Q})$ при варьировании обобщенных координат $(Q_1, Q_2, \dots, Q_s)$ с фиксированными граничными условиями для них.

Покажем инвариантность уравнений Лагранжа прямыми вычислениями. Запишем уравнения Лагранжа в новых координатах. Дифференцируя тождество (2.89), получаем

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial F_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i}, \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_{k=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} + \sum_{k=1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i}.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_j} \right) = \sum_{k=1}^s \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q_j}, \quad (2.90)$$

из которого следует, что уравнения Лагранжа справедливы в произвольных обобщенных координатах.

Таким образом, уравнения Лагранжа преобразуются как частные производные скалярной функции многих переменных при замене независимых переменных, т. е. как ковариантный вектор. Это свойство позволяет часто использовать координаты, соответствующие особенностям конкретной задачи для упрощения уравнений движения.

2.9. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Уравнения Ньютона или уравнения Лагранжа второго рода (2.59) для механической системы с N степенями свободы представляют собой N уравнений второго порядка, и их общее решение зависит от $2N$ произвольных постоянных:

$$q_i(t) = q(C_1, \dots, C_{2N}, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2.91)$$

Константы C_i однозначно связаны с значениями обобщенных координат и скоростей в начальный момент t_0 . При $t = t_0$ мы получаем

$$q_i(t_0) = q(C_1, \dots, C_{2N}, t_0),$$

$$\dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i(C_1, \dots, C_{2N}, t_0),$$

и независимые постоянные C_i ($i = 1, 2, \dots, 2N$) могут быть найдены из этих уравнений. Если связи стационарные и силы, действующие на систему, не зависят явно от времени, тогда одна постоянная всегда войдет в комбинацию $(t - t_0)$:

$$q_i(t) = q(C_1, \dots, C_{2N-1}, t - t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\dot{q}_i(t) = \dot{q}_i(C_1, \dots, C_{2N-1}, t - t_0) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

При явном виде решений в форме (2.91) всегда можно выразить постоянные C_i ($i = 1, 2, \dots, 2N$) в виде определенных функций, F_i ($i = 0, 1, 2, \dots, 2N$) – обобщенных координат и скоростей:

$$C_i = F_i(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 2N).$$

После подстановки (2.91) в функции $F_i(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$ они обращаются в постоянные C_i . Величины

$$F_i(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \quad (i = 1, 2, \dots, 2N)$$

называются *первыми интегралами движения*, или просто *интегралами движения*. Такое определение является чисто формальным и говорит только об их существовании. Как правило, общее решение динамической системы нам неизвестно и интегралом движения

$$F(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \quad (2.92)$$

называется определенная функция обобщенных координат, скоростей и времени, которая сохраняет свое численное значение

$$\frac{d}{dt} F = 0$$

во время эволюции динамической системы. Иными словами, после подстановки $q_i(t)$ из решений уравнений Лагранжа выражение (2.92) обращается в постоянную. В аналитической формулировке $F(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$ есть интеграл движения, если выражение

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) \quad (2.93)$$

равно нулю после подстановки $\ddot{q}_k$, выраженных из уравнений Ньютона.

Если интеграл движения алгебраически зависит от обобщенных координат и скоростей, то его называют *алгебраическим*. В противном случае – неалгебраическим, или *трансцендентным*.

Существует ряд методов поиска интегралов движения, некоторые из которых мы обсудим в главе 6. Их наличие позволяет существенно упростить процедуру получения полного решения и получить сведения о системе, не интегрируя ее.

Пусть в лагранжиан системы не входит некоторая обобщенная координата q_i , а только обобщенная скорость $\dot{q}_i$. Такая координата называется *циклической*. Уравнение Лагранжа для нее примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L - \frac{\partial}{\partial q_i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L = 0.$$

Поэтому величина

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L, \quad (2.94)$$

называемая *обобщенным импульсом*, сохраняется во время движения. Выразим из соотношения (2.92) обобщенную скорость:

$$\dot{q}_i = G(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{i-1}, \dot{q}_{i+1}, \dots, \dot{q}_N, p_i) \quad (2.95)$$

и заменим в уравнениях Лагранжа $\dot{q}_i$ на (2.93). Тогда задача интегрирования редуцируется к интегрированию системы с $N - 1$ степенями свободы с параметром p_i .

2.9.1. Закон сохранения энергии

Среди первых интегралов движения есть связанные с основными свойствами пространства и времени – их однородностью и изотропией. Они имеют важное общее свойство *аддитивности*. Их численное значение для системы, состоящей из нескольких частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности. Типичными аддитивными законами сохранения являются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. Зная эти законы, можно сделать ряд заключений о поведении системы до взаимодействия ее частей и после него. Поскольку вся информация о динамике системы содержится в одной функции Лагранжа, то из ограничений, налагаемых фундаментальными свойствами пространства и времени на лагранжиан системы, можно получить выражение для сохраняющихся величин (энергии, импульса, момента импульса) в терминах этой функции.

Пусть система замкнута или находится в постоянном внешнем поле, и связи стационарны. Время в такой системе однородно – начало отсчета времени для любого физического явления

несущественно и физический смысл имеют только интервалы времени. Лагранжиан системы в этом случае не зависит явным образом от времени: $L(\dot{q}, q, t) = L(\dot{q}, q)$ и

$$\frac{d}{dt} L(\dot{q}, q) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}. \quad (2.96)$$

Тогда, если $q(t)$ – решение уравнения Лагранжа, то, заменяя в соответствии с этими уравнениями $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ на $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, получаем

$$\frac{d}{dt} L(\dot{q}, q) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i.$$

Это соотношение можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left[L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right] = 0.$$

Следовательно, величина

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \quad (2.97)$$

есть интеграл движения системы, т. е. имеет постоянное значение (не зависит от времени) на *решениях уравнения движения*. Полученное выражение является определением *энергии системы*. Аддитивность энергии невзаимодействующих систем A и B следует непосредственно из аддитивности функций Лагранжа:

$$\begin{aligned} E_{A+B} &= \sum_i \frac{\partial L_{A+B}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L_{A+B} = \\ &= \sum_i \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L_B}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L_A - L_B = E_A + E_B. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Механические системы, энергия которых сохраняется, называются *консервативными*.

2.9.2. Закон сохранения импульса

В замкнутой системе частиц, где нет взаимодействия с внешними силами, пространство является однородным. Механические свойства не должны меняться при переносе системы как целого, или выборе системы координат, сдвинутой на произвольный вектор $\vec{\epsilon}$ (рис. 2.4).

Поскольку вся информация о механической системе содержится в функции Лагранжа, то ее изменение при однородной трансляции

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{\epsilon}$$

должно быть равно нулю:

$$L(\dot{\vec{r}}'_i, \vec{r}'_i) - L(\dot{\vec{r}}_i, \vec{r}_i) = 0.$$

При $\epsilon \ll 1$ изменение функции Лагранжа равно

$$\delta L = L(\dot{\vec{r}}, \vec{r} + \vec{\epsilon}) - L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}) = \vec{\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} + O(\epsilon^2) = 0,$$

где $O(\epsilon^2)$ означает члены более высокого порядка по ϵ . Поскольку величина $\vec{\epsilon}$ произвольная, то

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0.$$

В соответствии с уравнениями Лагранжа это выражение принимает вид

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0.$$

Напомним, что величина $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i$ есть обычный (не обобщен-

ный) импульс частицы i . Следовательно, в замкнутой механической системе векторная величина

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (2.99)$$

остается постоянной. Вектор $\vec{P}$ называется импульсом системы и складывается из импульсов всех входящих в систему частиц, т. е. является аддитивной величиной. На величине импульса системы в отличие от энергии никак не сказывается наличие взаимодействия между ее частями. Заметим, что сохраняется только полный импульс системы в декартовых

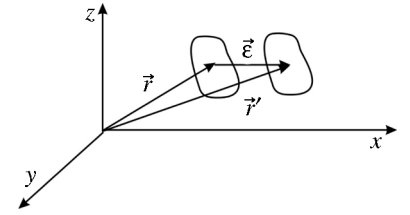


Рис. 2.4

координатах. Обобщенный импульс $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, вообще говоря,

не равен произведению массы частицы на ее скорость, и вопрос

о сохранении $\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ величины надо рассматривать отдельно.

Найдем ограничения, налагаемые законом сохранения импульса на взаимодействие между телами в замкнутой системе. Функция Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

в замкнутой системе не должна меняться при сдвиге системы как целой на произвольный вектор $\vec{\epsilon}$: $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{\epsilon}$. Отсюда следует, что $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = U(\vec{r}_1 + \vec{\epsilon}, \vec{r}_2 + \vec{\epsilon}, \dots, \vec{r}_N + \vec{\epsilon})$ и потенциальная энергия U зависит только от разности радиусов-векторов материальных точек. Тогда в системе с парным взаимодействием потенциальная энергия U будет равна сумме потенциальных энергий парных взаимодействий $U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Поскольку потенциальная энергия является скаляром, то она может зависеть только от модуля относительного расстояния между частицами:

$$U(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

В итоге

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

В подразделе 2.2. мы разделили силы на внутренние и внешние. В замкнутой системе действуют только внутренние силы и уравнения Ньютона для нее имеют вид

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{in}}.$$

Тогда из закона сохранения полного импульса

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i = 0 = \sum_{j \neq i, j=1}^N \sum_{i=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{in}}$$

следует, что сумма всех внутренних сил, действующих на все частицы замкнутой системы, равна нулю. Поэтому в замкнутых системах выполняется третий закон Ньютона $\vec{F}_{ij}^{\text{in}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{in}}$: сила, действующая на частицу i со стороны частицы j , равна по величине, но противоположна по направлению силе, действующей на частицу j со стороны частицы i . Для систем, где потенциальная энергия U равна сумме потенциальных энергий парных взаимодействий $U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$, справедливость третьего закона сразу следует из формулы

$$\vec{F}_{ij}^{\text{in}} = \frac{\partial U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_j} = -\vec{F}_{ji}^{\text{in}}.$$

2.9.3. Центр инерции и уравнения его движения

По определению *центром инерции* системы материальных точек называется воображаемая точка, в которой сосредоточена вся масса системы, и радиус-вектор ее положения равен

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (2.100)$$

Дифференцируя по времени это соотношение

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{R}}{M} = \vec{V},$$

находим, что полный импульс системы пропорционален полной массе M и скорости движения центра масс.

Докажем, что *центр инерции движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложена равнодействующая внешних сил*. Просуммируем уравнения Ньютона для системы из N частиц при наличии внутренних $\vec{F}_{ij}^{\text{in}}$ и внешних по отношению к системе $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ сил. Получаем

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{in}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

По третьему закону Ньютона ($\vec{F}_{ij}^{\text{in}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{in}}$) первое слагаемое в правой части уравнения равно нулю. Тогда, дифференцируя по времени выражение для радиуса-вектора центра инерции (2.91) и

подставляя $\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i$, взятый из (2.100), получаем уравнение движения центра инерции:

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (2.101)$$

Этот закон иногда называют *косой Мюнхгаузена*: *любые внутренние силы не могут привести в движение центр инерции*.

При отсутствии внешних сил центр инерции движется равномерно и прямолинейно. В таком виде это есть обобщение закона инерции, полученного нами ранее для свободной материальной точки.

2.9.4. Закон сохранения момента импульса

Отсутствие выделенного направления в пространстве называется *изотропностью*. К каким физическим следствиям это приводит? Очевидно, что в силу равноправия всех направ-

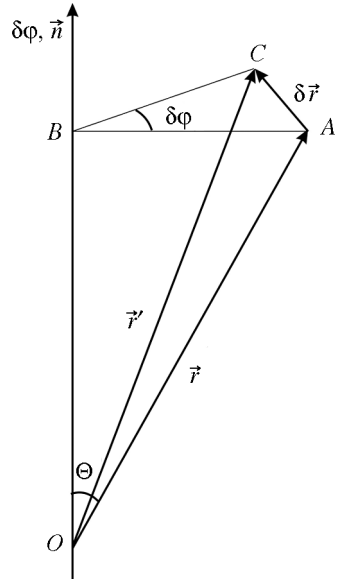


Рис. 2.5

вательно, $(\vec{r}')^2 = (\vec{r} + \delta\vec{r})^2 = \vec{r}^2 + 2\vec{r}\delta\vec{r} + O(\delta\vec{r}^2) = \vec{r}^2$. Следо-
вательно, $(\vec{r}')^2 = (\vec{r} + \delta\vec{r})^2 = \vec{r}^2 + 2\vec{r}\delta\vec{r} + O(\delta\vec{r}^2) = \vec{r}^2$. Угол пово-
рота бесконечно мал, и последним членом в квадрате суммы
можно пренебречь. Тогда $\delta\vec{r}\vec{r} = 0$, и изменение радиуса-вектора
при бесконечно малом повороте перпендикулярно начальному
положению радиуса-вектора материальной точки: $\delta\vec{r} \perp \vec{r}$. По-
скольку угол $\angle ABO = 90^\circ$, то длина $AB = |\vec{r}|\sin\Theta$ и $|\delta\vec{r}| = AB\delta\phi =$
 $= |\vec{r}|\sin\Theta\delta\phi$. Запишем $\delta\vec{r}$ в виде векторного произведения. Если
 $\delta\vec{\chi}$ – любой бесконечно малый вектор и $\delta\vec{r}\vec{r} = 0$, то вектор $\delta\vec{r}$ все-
гда можно представить в виде $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\chi}, \vec{r}]$. Тогда из уравнения
 $|\delta\vec{r}| = \sin(\delta\vec{\chi}, \vec{r})|\vec{r}||\delta\vec{\chi}|$ и соотношения $|\delta\vec{r}| = AB\delta\phi = |\vec{r}|\sin\Theta\delta\phi$ сле-
дует, что длина вектора $\delta\vec{\chi}$ равна $\delta\phi$ и $\delta\vec{\chi} = \vec{n}\delta\phi$, где $\vec{n}$ – единич-
ный вектор, направленный по оси вращения. Поэтому удобно
вращение описывать вектором $\vec{\phi}$, который направлен по оси
вращения и по абсолютной величине равен углу поворота вокруг
этой оси. По этому соглашению $\delta\vec{\phi} = \vec{n}\delta\phi$ и

$$\delta\vec{r}_i = [\delta\vec{\phi}, \vec{r}_i], \quad (2.102)$$

где индекс i указывает на номер частицы в системе, радиус-век-
тор которой изменился в результате поворота системы. Изме-

лений механические свойства замк-
нутой системы не должны изме-
няться при любом повороте всех
материальных точек системы на
один и тот же угол.

Существуют три независимых
поворота в пространстве, и любой
поворот можно представить в виде
суперпозиции поворотов относи-
тельно трех перпендикулярных осей.
Обсудим поворот вокруг любой оси
 $\vec{n}$. Обратимся к рис. 2.5: на нем вве-
ден Θ – угол между осью $\vec{n}$ и ради-
усом-вектором $\vec{r}$ материальной точки.
Пусть $\delta\phi$ – бесконечно малый угол
поворота вокруг оси $\vec{n}$, $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ – по-
ложения радиуса-вектора до поворота
и после него соответственно. Из ри-
сунка видно, что для случая беско-
нечно малого поворота $\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r}$. По

строению длина вектора при пово-
роте не меняется: $(\vec{r}')^2 = (\vec{r})^2$. Следо-

вательно, $(\vec{r}')^2 = (\vec{r} + \delta\vec{r})^2 = \vec{r}^2 + 2\vec{r}\delta\vec{r} + O(\delta\vec{r}^2) = \vec{r}^2$. Угол пово-
рота бесконечно мал, и последним членом в квадрате суммы
можно пренебречь. Тогда $\delta\vec{r}\vec{r} = 0$, и изменение радиуса-вектора
при бесконечно малом повороте перпендикулярно начальному
положению радиуса-вектора материальной точки: $\delta\vec{r} \perp \vec{r}$. По-
скольку угол $\angle ABO = 90^\circ$, то длина $AB = |\vec{r}|\sin\Theta$ и $|\delta\vec{r}| = AB\delta\phi =$
 $= |\vec{r}|\sin\Theta\delta\phi$. Запишем $\delta\vec{r}$ в виде векторного произведения. Если
 $\delta\vec{\chi}$ – любой бесконечно малый вектор и $\delta\vec{r}\vec{r} = 0$, то вектор $\delta\vec{r}$ все-
гда можно представить в виде $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\chi}, \vec{r}]$. Тогда из уравнения
 $|\delta\vec{r}| = \sin(\delta\vec{\chi}, \vec{r})|\vec{r}||\delta\vec{\chi}|$ и соотношения $|\delta\vec{r}| = AB\delta\phi = |\vec{r}|\sin\Theta\delta\phi$ сле-
дует, что длина вектора $\delta\vec{\chi}$ равна $\delta\phi$ и $\delta\vec{\chi} = \vec{n}\delta\phi$, где $\vec{n}$ – единич-
ный вектор, направленный по оси вращения. Поэтому удобно
вращение описывать вектором $\vec{\phi}$, который направлен по оси
вращения и по абсолютной величине равен углу поворота вокруг
этой оси. По этому соглашению $\delta\vec{\phi} = \vec{n}\delta\phi$ и

$$\delta L = L(\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i, \vec{v}_i + \delta\vec{v}_i) - L(\vec{r}_i, \vec{v}_i) = 0.$$

Разложим δL в ряд Тейлора:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta\vec{v}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i \right) + O(\delta\vec{r}_i) + O(\delta\vec{v}_i).$$

После подставки в δL полученных выражений для изменения ра-
диусов-векторов положения и скоростей частиц при бесконечно
малом повороте получим

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} [\delta\vec{\phi}, \vec{r}_i] + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} [\delta\vec{\phi}, \vec{v}_i] \right).$$

Используя уравнения Лагранжа второго рода, производные

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \text{ заменим на } \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \dot{\vec{p}}_i, \text{ а } \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \text{ на } \vec{p}_i:$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{p}}_i [\delta\vec{\phi}, \vec{r}_i] + \vec{p}_i [\delta\vec{\phi}, \vec{v}_i] \right) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\vec{p}}_i [\delta\vec{\phi}, \vec{r}_i] + \vec{p}_i [\delta\vec{\phi}, \dot{\vec{r}}_i] \right) = 0.$$

Производя циклическую перестановку сомножителей в век-
торных произведениях и вынося $\delta\vec{\phi}$ за знак суммы, имеем

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\delta\vec{\phi} [\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i] + \delta\vec{\phi} [\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i] \right) =$$

$$= \delta\vec{\phi} \sum_{i=1}^N \left([\vec{r}_i, \dot{\vec{p}}_i] + [\dot{\vec{r}}_i, \vec{p}_i] \right) = \delta\vec{\phi} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

Поскольку все компоненты $\delta\vec{\phi}$ независимы, то из инвариантности функции Лагранжа (δL) следует:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \text{const.} \quad (2.103)$$

Поэтому при указанных ограничениях в процессе движения любой механической системы вектор $\vec{M}$, который называется *моментом импульса*, сохраняется со временем (это открыл еще И. Кеплер). Аддитивность этой величины очевидна в силу самой ее конструкции. Отметим, что момент импульса $\vec{M}$ может сохраняться и в незамкнутой системе. Например, если система находится во внешнем поле с цилиндрической симметрией, потенциальная энергия $U(\rho)$ которого зависит только от ρ . Лагранжиан не меняется при повороте вокруг оси цилиндра, и сохраняется проекция момента на эту ось. Если в сферической системе координат (r, θ, ϕ) потенциальная энергия частицы зависит только от r , то поворот на произвольный угол вокруг любой оси, проходящей через начало координат (центр поля), не изменяет функцию Лагранжа, поэтому механический момент частицы сохраняется относительно центра поля.

В итоге замкнутая механическая система в классической механике всегда имеет минимум семь аддитивных интегралов движения: энергию, три компоненты импульса и три компоненты момента импульса.

2.9.5. Уравнение движения момента импульса незамкнутой системы

В отличие от замкнутой системы в системе, подвергающейся внешнему воздействию, механический момент не обязан сохраняться. Его полная производная по времени имеет вид

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i \right] + \left[\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \right] \right\}. \quad (2.104)$$

В силу параллельности $\dot{\vec{r}}_i$ и $\vec{p}_i$ первый член под знаком суммы равен нулю. Подставляя во второе слагаемое выражение $\dot{\vec{p}}_i$ из уравнений Ньютона (2.23) в отсутствие связей, получаем

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i [\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i] = \sum_i [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}] + \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}].$$

Разобьем последнее слагаемое на две части:

$$\sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}].$$

Переобозначим $i \Leftrightarrow j$ во второй сумме:

$$\sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}^{\text{in}}].$$

Учтем, что в силу третьего закона Ньютона, все силы входят парами, причем $\vec{F}_{ji}^{\text{in}} = -\vec{F}_{ij}^{\text{in}}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] - \sum_{i,j=1}^N [\vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}}]. \end{aligned}$$

Внутренняя сила $\vec{F}_{ij}^{\text{in}}$ в системе с парными взаимодействиями,

определенная уравнением $\vec{F}_{ij}^{\text{in}} = \frac{\partial U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_i}$, коллинеарна вектору $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$:

$$\vec{F}_{ij}^{\text{in}} = \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{\partial U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}{\partial(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}$$

и, следовательно, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}^{\text{in}} = 0$. В результате в выражении для $\frac{d\vec{M}}{dt}$ остается слагаемое, обусловленное только внешними силами:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{внеш}}] = \vec{N}. \quad (2.105)$$

В итоге *скорость изменения момента импульса незамкнутой системы равна моменту внешних сил N* .

Уравнения (2.101), (2.105) есть общие уравнения динамики системы материальных частиц.

2.10. ТЕОРЕМА НЁТЕР

Великая книга природы написана на языке математики, ее буквами служат треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без помощи которых человеку невозможно понять ее речь; без них – напрасное блуждание в темном лабиринте.

Г. Галилей,
Беседы о двух главнейших
системах мира

Рассмотренные законы сохранения для замкнутых систем были связаны с классическими преобразованиями координат – трансляцией временных и пространственных переменных и поворотами системы. В общем случае непрерывное преобразование обобщенных координат

$$q'_i = F_i(q_1, q_2, \dots, q_N, \epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.106)$$

называется *однопараметрическим*, если новые координаты q' задаются непрерывными функциями $f_i(q_1, q_2, \dots, q_N, \epsilon)$ и характеризуются непрерывным параметром ϵ . Преобразование (2.106) называется обратимым, когда старые координаты можно однозначно выразить через новые. Изменение координат (x, y) материальной точки

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \epsilon - y \sin \epsilon, \\ y' &= y \cos \epsilon + x \sin \epsilon \end{aligned} \quad (2.107)$$

при вращении вокруг оси Oz на угол ϵ является простейшим примером обратимых непрерывных преобразований.

Пусть параметр ϵ выбран так, что тождественному преобразованию соответствует значение $\epsilon = 0$:

$$F_i(q_1, q_2, \dots, q_N, 0) = q_i.$$

Тогда для бесконечно малых значений параметра ϵ ($\epsilon \ll 1$) мы получаем бесконечно малое изменение обобщенных координат

$$q'_i = q_i + \delta q_i. \quad (2.108)$$

Здесь

$$\delta q_i = \left. \frac{\partial F_i(q_1, q_2, \dots, q_N, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon = f_i(q_1, q_2, \dots, q_N) \epsilon \quad (2.109)$$

и опущены члены более высокого порядка по ϵ .

Обобщением рассмотренных ранее непрерывных преобразований, оставляющих лагранжиан инвариантным, является фундаментальная теорема Э. Нётер. *Любому непрерывному, обратимому, однопараметрическому преобразованию обобщенных координат механической системы, при котором функция действия остается инвариантной, соответствует интеграл движения*. Для доказательства этой теоремы найдем для бесконечно малых изменений обобщенных координат (2.108) изменение

функции действия $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt. \quad (2.110)$$

Эмми Нётер (нем. Amalie Emmy Noether; 23 марта 1882, Эрланген – 14 апреля 1935, Брин-Мор, США) – немецкий математик. Именем Нётер называется фундаментальная теорема теоретической физики, связывающая законы сохранения с симметрией системы. В 1928–1929 гг. читала лекции по алгебре в Московском университете



Учитывая коммутативность операций дифференцирования и

варьирования $\delta \dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$, имеем

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \right\} dt. \quad (2.111) \end{aligned}$$

Меняя у первого и третьего слагаемых порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\delta S = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^N \int_{t_2}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt.$$

Подынтегральное выражение в последнем слагаемом равно нулю на истинных траекториях движения, и условие инвариантности действия запишем как

$$\delta S = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (2.112)$$

Отметим, что в отличие от рассмотренной ранее вариационной задачи с закрепленными концами, для вариаций в (2.210) выполняются условия: 1) $\delta q_i(t = t_1) \neq 0$ и $\delta q_i(t = t_2) \neq 0$, 2) t_1 и t_2 – произвольны. Поэтому если действие инвариантно при проведенном преобразовании, то остается потребовать

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q_1, q_2, \dots, q_N) \varepsilon = \text{const}. \quad (2.113)$$

Значит, величина

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (2.114)$$

является *интегралом движения*.

Рассмотрим несколько примеров применения теоремы Нётер. Выберем в качестве обобщенных координаты вектора (x, y, z) и в качестве преобразований, сохраняющих действие системы, – трансляцию вдоль оси Ox . Тогда $\delta x = \varepsilon$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$

и сохраняется компонента импульса $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$. При вращении вокруг оси Oz

$$\delta x = \varepsilon y, \quad \delta y = -\varepsilon x,$$

и инвариантном действии, z -я компонента момента импульса $M_z = p_x y - p_y x$ сохраняется. Интегралы движения возникают не только в связи с симметрией пространства и времени. Пусть лагранжиан двух трехмерных гармонических осцилляторов имеет вид

$$L = \frac{\vec{p}_1^2}{2m} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m} + U(\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2), \quad \vec{p}_1 = m\dot{\vec{r}}_1, \quad \vec{p}_2 = m\dot{\vec{r}}_2. \quad (2.115)$$

Если поменять местами индексы 1 и 2, то лагранжиан не изменится, однако это случай дискретной симметрии и условия теоремы Нётер здесь не выполняются. Тем не менее лагранжиан (2.115) не изменяется при непрерывных обратимых преобразованиях («изоспиновых» преобразованиях):

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1' \cos \varepsilon + \vec{r}_2' \sin \varepsilon,$$

$$\vec{r}_2' = -\vec{r}_1' \sin \varepsilon + \vec{r}_2' \cos \varepsilon$$

и величина $J = \vec{p}_1 \vec{r}_2 - \vec{p}_2 \vec{r}_1$ – есть интеграл движения. Как показано еще **Лапласом**, при движении в центральном поле с потенциальной энергией $U = -\alpha/r$ помимо момента импульса сохраняется

величина $\vec{A} = \left[m\dot{\vec{r}}, \vec{M} \right] - \frac{\alpha \vec{r}}{r} m$ (вектор Рунге–Ленца). Соответ-

ствующие выкладки приведены в главе 5. Его сохранение связано с определенными непрерывными преобразованиями. Последние два примера – это примеры *скрытых интегралов движения*, которые не связаны с классическими преобразованиями пространства-времени.

Если лагранжиан системы не инвариантен относительно определенных непрерывных преобразований, то с их помощью, согласно методу Гелл-Манна и Лоу, можно найти выражение для *частично сохраняющихся интегралов движения*. Аналитические выражения для них часто бывают полезны при формулировке интегральных теорем динамики. Положим в преобразовании (2.109) параметр ϵ зависящим от времени:

$$\delta q_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_N)\epsilon(t) \quad (2.116)$$

и найдем изменение лагранжиана при таких преобразованиях. Поскольку $\delta \dot{q}_i = \dot{f}_i(q)\epsilon(t) + f_i(q)\dot{\epsilon}(t)$, то

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} f_i(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{f}_i(q) \right) \epsilon(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q) \dot{\epsilon}(t).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \epsilon} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} f_i(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{f}_i(q), \\ \frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} f_i(q). \end{aligned} \quad (2.117)$$



Пьер-Симон Лаплас (фр. Pierre-Simon Laplace; 23 марта 1749 – 5 марта 1827) – французский математик и астроном; известен работами в области дифференциальных уравнений, один из создателей теории вероятностей

Тогда вследствие уравнений Лагранжа справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}} = \frac{\delta L}{\delta \epsilon}. \quad (2.118)$$

Величину $\frac{\delta L}{\delta \dot{\epsilon}}$ называют *частично сохраняющимся интегралом движения*, так как она совпадает с (2.114), если действие инвариантно относительно преобразований (2.108). Выражение $\frac{\delta L}{\delta \epsilon}$ указывает на источник нарушения такой инвариантности.

Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Это (теория колебаний и волн) – область науки, исследующая колебательные и волновые процессы в системах различной природы; причем теория колебаний и волн в первую очередь интересуется общими свойствами колебательных процессов, а не деталями поведения системы, связанными с проявлением ее конкретной природы (физической, биологической и т. д.).

М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков

3.1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Под *колебаниями* понимают регулярные изменения во времени параметров системы. Точное интегрирование задач теории колебаний механики затруднено. Однако существует определенный тип колебаний для систем с любым числом степеней свободы, с помощью которых можно провести полное описание эволюции системы во времени. Эти колебания характеризуются малостью амплитуды около устойчивого положения равновесия с достаточно малыми скоростями, причем понятие малости определяется характерными физическими постоянными задачи. Тогда во время движения отклонения и скорости будут малы, а уравнения Лагранжа заменятся приближенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решения которых выражаются в терминах элементарных функций. Область, в которой можно пользоваться такими уравнениями, определяется из анализа старших членов разложения нелинейных уравнений Лагранжа в ряды.

3.1.1. Гармонические колебания

Свободными колебаниями называются колебания в системе, которая после кратковременного возбуждения движется далее без внешних воздействий. Теория линейных колебаний с

одной степенью свободы является нетривиальным обобщением задачи о линейных колебаниях математического маятника (рис. 3.1).

Движение характеризуется обобщенной координатой – φ -углом отклонения от наинизшего положения маятника. Уравнение движения маятника (см. (2.61))

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi \quad (3.1)$$

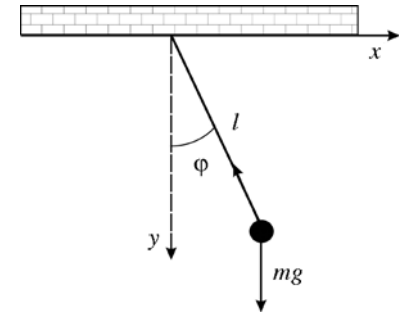


Рис. 3.1

имеет два положения равновесия $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Рассмотрим малые колебания вблизи положения равновесия $\varphi = 0$. Так как $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3} + \dots$, если $\varphi \ll 1$, то влияние второго и последующих слагаемых мало и ими можно пренебречь. Тогда динамика маятника описывается линейными уравнениями движения

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi, \quad (\omega_0^2 = \frac{g}{l}). \quad (3.2)$$

Если амплитуда колебаний мала, то система остается вблизи положения равновесия, которое является *устойчивым*. Любое малое отклонение от положения равновесия $\varphi = \pi$ приводит к бесконечному удалению системы от положения равновесия. Малые колебания отсутствуют и положение равновесия *неустойчиво*. Рассмотренный пример является характерным при исследовании в общем случае колебаний около положения равновесия.

Если на систему наложены стационарные голономные связи и остается только одна степень свободы, то кинетическая энергия T как функция обобщенных координат q и скоростей $\dot{q}$ имеет вид (2.55):

$$T = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2. \quad (3.3)$$

Пусть действующие на систему стационарные потенциальные силы таковы, что существует хотя бы одно положение равновесия. Тогда потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум. Обозначим соответствующее минимуму значение обоб-

щенной координаты q_0 . Согласно (2.58), обобщенная сила, приложенная к системе, в положении равновесия должна быть равна нулю:

$$F(q_0) = - \left(\frac{\partial U}{\partial q} \right) \Big|_{q=q_0} = 0.$$

При малых отклонениях от положения равновесия потенциальную энергию можно разложить в ряд по степеням $q - q_0$ с точностью до величин второго порядка малости:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U(q)}{dq^2} \Big|_{q=q_0} (q - q_0)^2 = \frac{k}{2} (q - q_0)^2 + U(q_0), \quad (3.4)$$

где коэффициент k равен значению второй производной от $U(q)$ при $q = q_0$. В окрестности равновесия возникает обобщенная сила

$$F(q) = -k(q - q_0), \quad (3.5)$$

которая отрицательна при $k > 0$, $q > q_0$. Поэтому вблизи минимума потенциальной энергии возникает сила, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. В этом случае система с малыми отклонениями $q - q_0$ и малыми скоростями во время движения не выйдет за пределы наперед заданной окрестности точки равновесия, что и оправдывает «линеаризацию» задачи. Положение равновесия, отвечающее минимуму потенциальной энергии, называется устойчивым. Если состояние равновесия при $q = q_0$ реализуется в максимуме потенциальной энергии, то при малой начальной скорости и отклонениях материальная точка не остается в любой заданной окрестности точки равновесия. В процессе движения она выйдет за ее пределы.

Функция Лагранжа $L = T - U$ вблизи устойчивого положения равновесия имеет вид

$$L = \frac{1}{2} a(q_0) \dot{q}^2 - \frac{k}{2} (q - q_0)^2 = \frac{m \dot{x}^2}{2} - \frac{k x^2}{2}. \quad (3.6)$$

Здесь в разложении $a(q) = a(q_0) + \frac{da(q)}{dq} + \dots$ оставлен только первый не исчезающий член и введены обозначения $a(q_0) = m$ и

$q - q_0 = x$ для отклонения координаты от ее равновесного значения. Подчеркнем, однако, что величина m совпадает с массой, только если x – декартова координата частицы.

Подставляя (3.6) в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (x = q - q_0), \quad (3.7)$$

получаем уравнение малых колебаний (уравнение гармонического осциллятора):

$$m \ddot{x} + kx = 0. \quad (3.8)$$

Обозначим

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.9)$$

и перепишем уравнение движения (3.8) в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.10)$$

Его решение имеет вид

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (3.11)$$

и описывает простое *гармоническое колебание* частицы около положения равновесия. Наибольшее отклонение называется *амплитудой* a , $\omega_0 t + \varphi$ носит название *фазы* колебаний, φ – начальной фазы колебаний. Постоянные a и φ определяются из начальных условий – положения материальной точки и ее скорости в начальный момент $t = 0$. Положим, $x(t = 0) = x_0$, $\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0$. Из (3.11) находим соотношения

$$\begin{aligned} x_0 &= x(t = 0) = a \cos(\varphi), \\ \dot{x}_0 &= \dot{x}(t = 0) = -a \omega_0 \sin(\varphi), \end{aligned} \quad (3.12)$$

которые позволяют найти a и φ .

Закон движения (3.11) можно представить в форме, где постоянные интегрирования выражены через начальные данные. Применяя формулу для косинуса суммы, из соотношений (3.11), (3.12) получаем

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (3.13)$$

Циклическая частота ω_0 , которую часто называют просто *частотой*, зависит только от параметров системы и не зависит от начальных условий движения. Она всецело определяется свойствами механической системы как таковой. Это свойство частоты собственных колебаний связано с малостью колебаний и исчезает для нелинейных колебаний осциллятора.

Кинетическая T и потенциальная U энергия

$$T = \frac{m}{2} a^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$U = \frac{m}{2} \omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

меняются с частотой $2\omega_0$. Во время колебаний происходят периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и обратный процесс. Полная энергия системы

$$E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = T + U = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{k x^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \quad (3.14)$$

пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и квадрату собственной частоты и не зависит от времени. Закон сохранения энергии для гармонического осциллятора можно получить сразу из уравнений движения. Умножая уравнение (3.8) на $\dot{x}$

$$\ddot{x} \dot{x} + \omega_0^2 x \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 \right) = 0,$$

закключаем, полная энергия

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2} x^2 \quad (3.15)$$

сохраняется: $\dot{E} = 0$ на решениях уравнения (3.8), т. е. величина E является интегралом движения. Исторически именно при исследовании движения маятника Гюйгенс предложил одну из первых формулировок закона сохранения механической энергии.

3.1.2. Фазовая плоскость

Описание движения в виде зависимости обобщенной координаты во времени не является единственно возможным. В ряде случаев качественное описание движения можно получить пред-

ставлением движения на *фазовой плоскости*. Рассмотрим плоскость с координатами $(x, y = \dot{x})$, которая называется фазовой. Точка с координатами $x(t), y(t)$ называется *изображающей точкой*. На фазовой плоскости алгебраическое уравнение (3.15) определяет кривую второго порядка (эллипс) (рис. 3.2), параметризуемую в виде

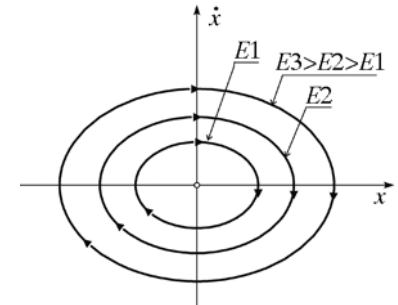


Рис. 3.2

$$x(t) = \frac{\sqrt{2E}}{\omega_0} \sin \theta(t), \quad \dot{x}(t) = \sqrt{2E} \cos \theta(t). \quad (3.16)$$

Из сравнения этих формул следует, что $\dot{\theta} = \omega_0$ (при $E > 0$), т. е. изображающая точка движется по эллипсу с равномерным вращением, что дает ясный «сценарий» движения системы. Направление движения показано на рис. 3.2 стрелками. Вся фазовая плоскость заполнена бесконечным множеством вложенных друг в друга эллипсов, различающихся только параметром E . При начальных условиях $\dot{x} = x = 0$ изображающая точка находится в устойчивом положении равновесия, которое называется *центром*.

3.2. ЗАТУХАЮЩИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В реальных физических колебательных системах всегда присутствуют силы сопротивления, действие которых уменьшает энергию системы. Энергия при этом переходит в тепло, или, как говорят, диссипируется (по-латински диссипация означает рассеяние).

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим, и его рассмотрение требует учета движения среды, в которой движется тело, и внутреннего теплового состояния как самой среды, так и тела. Однако во многих случаях влияние сил сопротивления (вязкого трения) можно приближенно описать феноменологически введением в уравнение движения дополнительных членов. В удовлетворительном согласии с опытом для достаточно малых скоростей действующая на тело сила трения пропорциональна скорости и направлена против направ-

ления скорости. Поэтому обобщенную силу трения $f_{\text{тр}}$, действующую на систему, совершающую малые колебания с обобщенной координатой x , можно записать в виде

$$f_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x} \quad (\alpha > 0), \quad (3.17)$$

где положительная величина α называется коэффициентом сопротивления или вязкого трения, а знак «минус» показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Тогда уравнения движения для гармонического осциллятора с учетом трения имеют вид

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha \dot{x}. \quad (3.18)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.19)$$

где ω_0 – частота свободных колебаний системы в отсутствие трения, величина λ называется показателем или *декрементом затухания*:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\lambda = \frac{\alpha}{m}. \quad (3.20)$$

3.2.1. Комплексификация линейных дифференциальных уравнений

При интегрировании линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вещественными коэффициентами удобно применять процедуру комплексификации. Запишем неоднородное линейное дифференциальное уравнение в операторном виде

$$Dx = F_1, \quad (3.22)$$

где линейный оператор D представляется в общем случае полиномом операторов дифференцирования с постоянными коэффициентами. Так, для уравнения (3.21)

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\lambda \frac{d}{dt} + \omega_0^2. \quad (3.23)$$

Комплексификацией выражения (3.22) является уравнение

$$Dz = F \quad (3.24)$$

для комплексной функции $z = x + iy$. Действительная часть комплексной функции $F = F_1 + iF_2$ совпадает с F_1 , а мнимая часть F_2 выбирается из соображений удобства. Тогда вследствие линейности оператора D

$$Dz = D(x + iy) = Dx + iDy = F_1 + iF_2 \quad (3.25)$$

уравнение (3.24) распадается на (3.22) и $Dy = F_2$. Поэтому, зная комплексные решения (3.24), можно найти вещественные решения выражения (3.22). В дальнейшем для простоты записи мы при решении вместо $z(t)$ будем писать $x(t)$, полагая ее комплексной переменной, переходя к вещественной части только в окончательном результате вычислений. Применим процедуру комплексификации к уравнению (3.22). Ищем решение уравнения в виде $x = e^{rt}$. Тогда его общее решение определяется корнями $r_{1,2}$ характеристического уравнения $r^2 = 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2},$$

и при $r_1 \neq r_2$ есть линейная комбинация независимых решений

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (3.26)$$

Поведение функции $x(t)$ зависит от соотношения ω_0 и λ . Рассмотрим сначала случай слабого затухания $\lambda < \omega_0$. При этом условии мы имеем два различных комплексно сопряженных корня $r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Обозначая

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (3.27)$$

мы получаем решение в виде

$$x(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (3.28)$$

где фаза φ и амплитуда в начальный момент определяются начальными условиями, а ω_1 – параметрами системы.

Полученная функция $x(t)$ не является периодической, она определяет осциллирующий затухающий процесс с экспоненци-

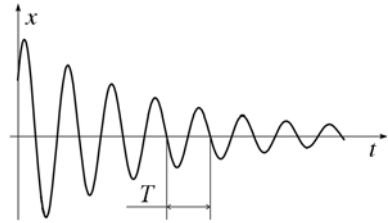


Рис. 3.3

ально убывающей амплитудой $A \exp(-\lambda t)$ (рис. 3.3).

Хотя периода колебаний в строгом смысле этого слова не существует, условный период-интервал между двумя последовательными прохождениями материальной точки через положения равновесия равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}.$$

3.2.2. Логарифмический декремент затухания

В любой колебательной системе трение задерживает движение и приводит к увеличению периода колебаний. Скорость убывания амплитуды определяется показателем λ , зависящим от выбора единиц измерения. Поэтому используют другую меру затухания амплитуды, связанную с числом условных периодов. Величину

$$d = \lambda T_1 \quad (3.29)$$

называют логарифмическим декрементом затухания. Тогда величина $n = \frac{1}{d}$ дает число условных периодов, за которое амплитуда уменьшается в e раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+nT_1)} = \frac{A(t)}{A(t+\lambda)} = e.$$

Если затухание в системе значительное, то $\lambda > \omega_0$ и оба значения r вещественны и отрицательны. Решение имеет вид двух экспонент

$$x = c_1 \exp t \left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right) + c_2 \exp t \left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \right). \quad (3.30)$$

Мы видим, что при достаточно большом трении движение состоит в монотонном убывании x , т. е. в его асимптотическом приближении к положению равновесия без колебаний с течением времени (рис. 3.4). Этот тип движения называется аperiodическим затуханием.

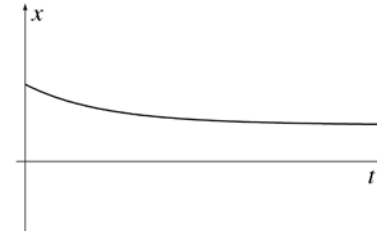


Рис. 3.4

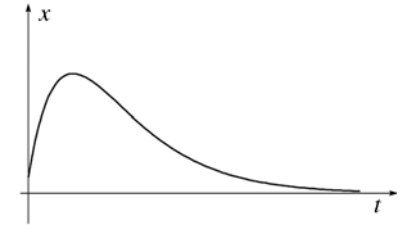


Рис. 3.5

Наконец, в особом случае, когда $\lambda > \omega_0$, характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda.$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что в случае кратных корней, при кратности, равной двум, общее решение имеет вид

$$x = (c_1 + c_2 t) \exp(-\lambda t). \quad (3.31)$$

Это решение – пограничное между затухающим колебательным процессом и аperiodическим затуханием. Второй член в множителе перед экспонентой первоначально может обеспечить рост отклонения от положения равновесия, но в конце концов, безусловно, экспоненциальный спад «устремит» отклонение к нулю (рис. 3.5).

Обсудим фазовый портрет гармонического осциллятора с учетом трения при $\omega_0 > \lambda$. Для построения фазовых кривых затухающих гармонических колебаний необходимо из параметрических уравнений кривых на фазовой плоскости $(x, y = \dot{x})$

$$x = A \exp(-\lambda t) \cos(\omega_1 t + \varphi),$$

$$y = A \exp(-\lambda t) (-\lambda \cos(\omega_1 t + \varphi) - \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi))$$

исключить t . Введем новые переменные u, v линейным преобразованием

$$u = \omega_1 x, \quad v = y + \lambda x. \quad (3.32)$$

Тогда в полярных координатах ρ, ψ

$$u = \rho \cos \psi, \quad v = \rho \sin \psi \quad (3.33)$$

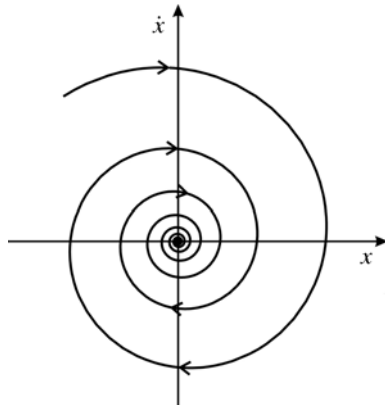


Рис. 3.6

параметрические уравнения фазовых кривых приобретают простой вид

$$\rho = \omega_1 A \exp(-\lambda t), \quad \psi = -(\omega_1 t + \varphi).$$

Исключая время из этих уравнений, получаем

$$\rho = C \exp\left(\frac{\lambda \psi}{\omega_1}\right). \quad (3.34)$$

В итоге на плоскости (u, v) или (x, y) фазовые траектории представляют собой логарифмические спирали, скручивающиеся к

началу координат (рис. 3.6). Изображающая точка, двигаясь по любой фазовой траектории, при $t \rightarrow \infty$ приближается к началу координат. Эта точка равновесия называется *устойчивым фокусом*.

Нетрудно показать, что при больших коэффициентах затухания ($\lambda > \omega_0$) семейство фазовых кривых представляет собой деформированные параболы

$$(y + r_1 x) = C(y + r_2 x)^\alpha, \quad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha = \frac{r_2}{r_1}, \quad (3.35)$$

которые касаются прямой $y = -r_1 x$ ($\lambda > \omega_0$) (рис. 3.7). Изображающая точка приближается к началу координат к состоянию равновесия $x = 0, y = 0$, которое представляет собой *устойчивый узел*. При отрицательных значениях коэффициента затухания изображающая точка движется от начала координат (которое называется *неустойчивым фокусом* ($\lambda^2 < \omega_0^2$), или *неустойчивым узлом* ($\lambda^2 > \omega_0^2$) к увеличивающимся значениям положения и скорости частицы. Динамика таких систем при нелинейных колебаниях обсуждается в следующей главе.

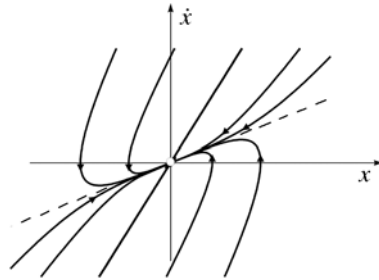


Рис. 3.7

3.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Пусть на систему, рассмотренную в предыдущем подразделе, действуют нестационарные периодические внешние силы, зависящие явно от времени. Тогда система наряду с собственными колебаниями будет совершать *вынужденные* колебания, определяемые внешней силой. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, подразумевается, что внешнее поле довольно слабое и не выводит систему из окрестности положения равновесия. Линеаризуя уравнения Лагранжа и добавляя к ним внешнюю силу $f \cos \omega t$, получаем уравнение движения в следующем виде:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \omega t, \quad (3.36)$$

где f – амплитуда, ω – частота внешней силы, здесь мы снова ввели собственную частоту свободных колебаний ω_0 .

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами складывается из суммы двух слагаемых: $x = x_0 + x_1$, где x_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения, а x_1 – частное решение неоднородного уравнения. В данном случае x_0 представляет собой рассмотренные ранее свободные затухающие колебания (3.28), а x_1 – вынужденные колебания, зависящие от вида функции $F(t)$. Исследуем последний вид колебаний. Применим процедуру комплексификации к (3.36) и решим уравнение

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \exp(i\omega t) \quad (3.37)$$

подстановкой

$$x = b \exp(i\omega t). \quad (3.38)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.37), получаем

$$-b\omega^2 + 2\lambda b i \omega + \omega_0^2 b = \frac{f}{m},$$

откуда находим коэффициент b :

$$b = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\lambda)}. \quad (3.39)$$

Интересующая нас действительная часть решения (3.38), (3.39) имеет вид

$$x = B \cos(\omega t + \delta), \quad (3.40)$$

где

$$B = \sqrt{bb^*} = \frac{f}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2}}, \quad (3.41)$$

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\operatorname{Im}(b)}{\operatorname{Re}(b)} = -\frac{2\lambda\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3.42)$$

Отсюда следует, что вынужденные колебания являются гармоническими колебаниями с частотой ω вынуждающей силы. Амплитуда этих колебаний зависит от частоты и пропорциональна амплитуде внешней силы. Величина

$$V = Bf$$

называется *коэффициентом усиления*. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину δ , которая также является функцией частоты.

Для получения общего решения уравнения (3.36) добавим к (3.40) общее решение соответствующего однородного уравнения. Тогда

$$x(t) = A \exp(-\lambda t) \cos(\omega_1 t + \varphi) + B \cos(\omega t + \delta), \quad (3.43)$$

где постоянные A и φ определяются из начальных условий. График функции (3.43) при $A = 3,5$, $B = 1$, $\varphi = \pi$, $\delta = \pi/4$, $\omega_1 = 2$, $\omega = 1$, $\lambda = 0,05$ представлен на рис. 3.8. Первое слагаемое экспоненциально убывает со временем и заметно только на малых временах до установления устойчивых вынужденных колебаний с постоянной амплитудой.

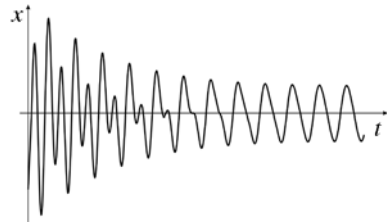


Рис. 3.8

Резонанс

Рассмотрим снова осциллятор без затухания ($\lambda = 0$). Выберем в качестве начальных условий $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. Тогда, согласно (3.43), движение осциллятора задается формулой

$$x = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)). \quad (3.44)$$

Тригонометрическими преобразованиями она приводится к виду

$$x = \frac{-2f}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}. \quad (3.45)$$

Проследим за изменением амплитуды колебаний, когда частота внешней силы приближается к частоте свободных колебаний. Положим $\omega = \omega_0 + \epsilon$, где величина $\epsilon \ll 1$. В этом случае

$$x \approx \frac{f}{m\omega_0\epsilon} \sin \frac{\epsilon t}{2} \sin \omega_0 t. \quad (3.45)$$

Функция $x(t)$ для таких колебаний, называемых *биениями*, изображена на рис. 3.9. Их можно представить как колебания с частотой ω_0 и амплитудой $A(t)$

$$A(t) = \frac{f}{m\omega_0\epsilon} \sin \frac{\epsilon t}{2},$$

которая медленно меняется во времени с периодом $T = \frac{4\pi}{\epsilon}$. При $\epsilon \rightarrow 0$ в системе наступает *резонанс* – резкое возрастание амплитуды установившихся колебаний при частотах вынуждающей силы, близких к частоте собственных колебаний системы. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ уравнение

$$x = \frac{f}{2m\omega_0\epsilon} t \sin \omega_0 t \quad (3.46)$$

описывает колебания (рис. 3.10), амплитуда которых линейно рас-



Рис. 3.9

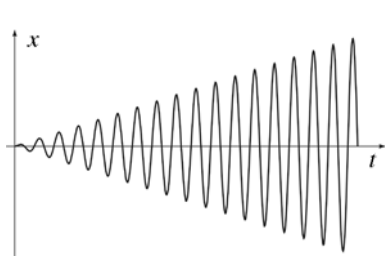


Рис. 3.10

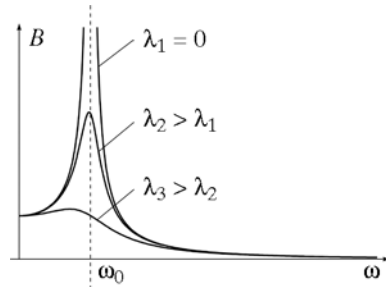


Рис. 3.11

тет со временем. Такое поведение амплитуды является следствием идеализированной модели. Оно справедливо до тех пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой. Влияние нелинейных эффектов описано в следующей главе. Здесь мы опишем учет трения в резонансных явлениях.

При фиксированном значении ω_0 амплитуда B (3.41) максимальна при значении

$$\omega_r^2 = \omega^2 - 2\lambda^2.$$

Поэтому резонанс наступает при частоте, которая меньше частоты собственных колебаний с затуханием (рис. 3.11).

Положим $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) в области вблизи резонанса. Тогда

$$B = \frac{f}{2m\omega_0 \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \lambda^2}}, \quad \tan \delta = \frac{\lambda}{\omega - \omega_0}. \quad (3.48)$$

Пусть ω постоянна и мы изменяем ω_0 (настройка «радиоприемника»). Тогда $\frac{\partial B}{\partial \omega_0} = 0$ при $\omega_0 = \omega$, и резонанс наступает при равенстве периода собственных колебаний периоду внешней силы. Для малого затухания различие между этими резонансными частотами несущественно. При увеличении частоты начиная с $\omega = 0$ величина δ меняется от нуля до $-\pi$ и равна $-\pi/2$ при $\omega = \omega_0$ (рис. 3.12). Заметим, что в силу принципа причинности смещение всегда отстает от вынуждающей силы.

Исследуем энергетические соотношения при движении осциллятора в установившемся режиме, когда осциллятор совершает колебания (3.40) с частотой вынуждающей силы. Умножим уравнение (3.36) на $m\dot{x}$ и представим его в виде

$$\frac{dE}{dt} = P_e + P_f, \quad (3.49)$$

где

$$E = \frac{m(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2)}{2} = \frac{mB^2}{2} (\omega_0^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)),$$

$$P_f = -2m\lambda \dot{x}^2 = -2m\lambda \omega^2 B^2 \sin^2(\omega t + \delta), \quad (3.50)$$

$$P_e = f\dot{x} \cos(\omega t) = -\omega f B \sin((\omega t + \delta)) \cos(\omega t).$$

Величина P_f является отношением работы сил трения $-2m\lambda \dot{x}$ на перемещении dx к промежутку времени dt , в течение которого эта работа совершается, или мощностью, рассеиваемой осциллятором. Величина P_e есть работа внешних сил над осциллирующей системой в единицу времени, или входная мощность. Величина E представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии осциллятора и не зависит от времени только в резонансе $\omega_0 = \omega$. В этом случае внешняя сила компенсирует силу трения. При частотах внешней силы, не равных резонансной, энергия осциллятора зависит от времени и колеблется с частотой 2ω . Как следует из уравнений (3.50), в течение четверти периода колебаний материальной точки часть работы внешней силы расходуется на работу против сил трения, другая часть приводит к росту энергии осциллятора. В течение следующей четверти периода, когда P_e меньше, чем P_f , осциллятор отдает свою энергию.

В экспериментальных исследованиях колебательных процессов чаще всего измеряются не мгновенные значения величин, а их средние значения за период колебаний. Среднее значение величины $C(t)$ (с периодом T) за период колебаний обозначается как $\langle C \rangle$ и вычисляется по формуле

$$\langle C \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T C(t) dt.$$

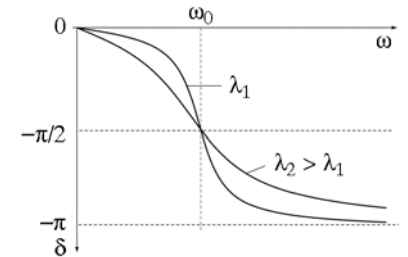


Рис. 3.12

Из (3.49), (3.50) сразу следует, что в установившемся режиме за период колебаний изменение энергии осциллятора равно нулю и среднее значение работы внешней силы в единицу времени равно среднему значению энергии, поглощаемой осциллятором в единицу времени. Поскольку

$$P_e = f \dot{x} \cos(\omega t) = -\omega f B \left(\frac{\sin(2\omega t)}{2} \cos \delta + \cos(\omega t)^2 \sin \delta \right)$$

и $\langle \cos(\omega t)^2 \rangle = 1/2$, $\langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$, то среднее по времени поглощенной мощности осциллятором, согласно (3.41), (3.42), определяется формулой

$$P(\omega) = \langle P_e \rangle = \frac{f^2 \lambda \omega^2}{m \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2 \right)}. \quad (3.51)$$

Ее максимальное значение равно

$$P(\omega_0) = \frac{f^2}{4m\lambda}$$

при $\omega = \omega_0$ (рис. 3.13).

Для характеристики степени затухания наблюдаемой в эксперименте функции $P(\omega)$ находят значения частот ω , при которых она равна половине $P(\omega_0)$. Согласно (3.51) эти частоты определяются формулами

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \lambda^2} \pm \lambda. \quad (3.52)$$

Интервал между ними называется *шириной резонанса* Γ , или *шириной резонансной линии* $\Gamma = 2\lambda$. При малом затухании $\lambda \ll \omega_0$ вблизи резонанса выражение для $P(\omega)$ имеет простой вид

$$P(\omega) = P(\omega_0) \frac{\left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}. \quad (3.53)$$

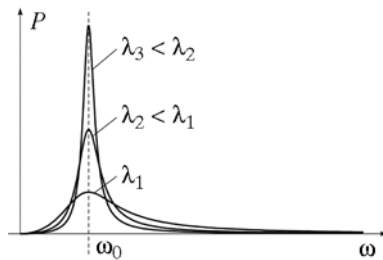


Рис. 3.13

Эта формула применяется при исследовании резонансных явлений в разных областях физики и позволяет по наблюдаемому среднему значению поглощенной мощности определить коэффициент затухания.

Если на осциллятор действует произвольная внешняя сила, то уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (3.54)$$

решаются методом **Фурье**. Сила $f(t)$ представляется интегралом Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (3.55)$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения (3.54) дается интегралом

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \quad (3.56)$$

где $b(\omega)$ совпадает с (3.41).

Жан Батист Жозеф Фурье (фр. Jean Baptiste Joseph Fourier; 21 марта 1768, Осер, Франция — 16 мая 1830, Париж) – выдающийся французский математик и физик



3.4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

После уравнения Галилея–Ньютона и принципа сохранения энергии разложение произвольного движения на моды, или нормальные колебания, представляет собой, возможно, самый фундаментальный результат физики. Его обобщения и приложения, от простых механических задач до современных проблем физики элементарных частиц, просто невозможно перечислить.

А.Г. Филиппов

3.4.1. Колебания системы с двумя степенями свободы

Внутри каждой большой задачи сидит маленькая, пытающаяся пробиться наружу.

Закон больших задач Хаара

Как простейший пример малых колебаний консервативной системы с двумя степенями свободы рассмотрим динамику двух одинаковых математических маятников, соединенных невесомой пружиной, длина которой равна расстоянию между точками подвеса (рис. 3.14). Если массой пружины можно пренебречь, то в случае малых колебаний кинетическая и потенциальная энергии системы имеют вид

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2), \quad (3.57)$$

$$U = \frac{mgl}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{1}{2} kl^2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2,$$

где k – коэффициент упругости пружины, m – масса маятников. После замены переменных $Q_1 = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$ и $Q_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$ получим

$$T = ml^2 (\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2),$$

$$U = mgl(Q_1^2 + Q_2^2) + 2kl^2 Q_2^2. \quad (3.58)$$

В новых координатах Q_1, Q_2 кинетическая и потенциальная энергия системы представляется суммой квадратов смещений и скоростей соответственно. Такие координаты называются *нормальными координатами*. Уравнения Лагранжа имеют простой вид:

$$\ddot{Q}_1 + \omega_0^2 Q_1 = 0,$$

$$\ddot{Q}_2 + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m} \right) Q_2 = 0, \quad (3.59)$$

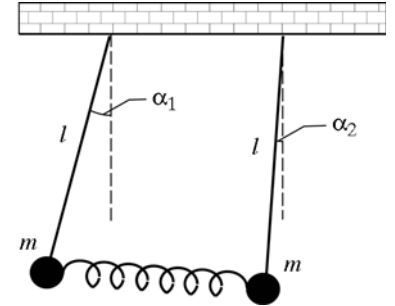


Рис. 3.14

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – циклическая частота колебаний свободных маятников. В итоге в системе двух взаимодействующих математических маятников собственные частоты колебаний равны

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}}. \quad (3.60)$$

Нормальные колебания записываются как

$$Q_1 = A \cos(\omega_0 t + \alpha_{01}), \quad Q_2 = B \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + \frac{2k}{m\omega_0^2}} t + \alpha_{02}\right), \quad (3.61)$$

а колебания каждого маятника имеют вид

$$\alpha_1 = A \cos(\omega_0 t + \alpha_{01}) + B \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + \frac{2k}{m\omega_0^2}} t + \alpha_{02}\right); \quad (3.62)$$

$$\alpha_2 = A \cos(\omega_0 t + \alpha_{01}) - B \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + \frac{2k}{m\omega_0^2}} t + \alpha_{02}\right). \quad (3.63)$$

Нормальные колебания имеют наглядную интерпретацию. Если $Q_2 = 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ и оба маятника будут двигаться с частотой $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, а пружина в этом случае «не работает» (синфаз-

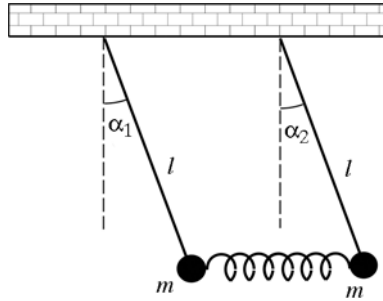


Рис. 3.15

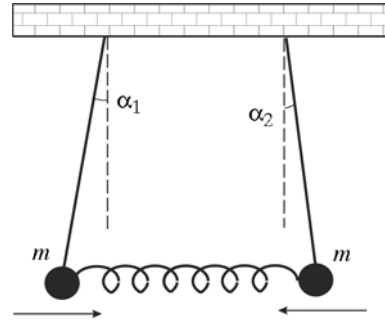


Рис. 3.16

ные колебания, рис. 3.15). При $Q_1 = 0$ справедливо соотношение $\alpha_1 = -\alpha_2$ и маятники движутся в противофазе (рис. 3.16) с частотой

$\sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}}$, которая увеличилась из-за действия пружины.

Проанализируем взаимодействие маятников, когда в начальный момент первый маятник выводится из положения равновесия, а второй неподвижен. Пусть при $t = 0$ $\alpha_1 = \alpha_2 = Q_1 = Q_2 = 0$ (маятники покоятся) и только первому из них сообщена скорость $\dot{\alpha}_1 = C$, $\dot{\alpha}_2 = 0$. При таких начальных условиях из (3.62), (3.63) следует, что

$$\alpha_{1,2} = \frac{C}{2\omega_1\omega_2} \{ \omega_2 \sin \omega_1 t \pm \omega_1 \sin(\omega_2 t) \}. \quad (3.64)$$

В большинстве аналогичных задач справедливо условие слабой связи ($k/m\omega_0^2 \ll 1$). Тогда $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}} \approx \omega_0 + k/m\omega_0$ и искомые решения имеют вид

$$\alpha_1 \approx \frac{C}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \cos\left(\frac{k}{2m\omega_0} t\right); \quad (3.65)$$

$$\alpha_2 \approx -\frac{C}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \sin\left(\frac{k}{2m\omega_0} t\right). \quad (3.66)$$

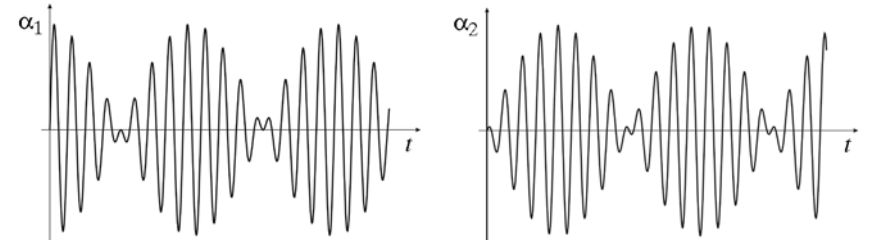


Рис. 3.17

Поскольку $k/2m\omega_0^2 \ll 1$, то маятники совершают колебания с частотой ω_0 , амплитуда которых медленно меняется. Получились биения, представленные на рис. 3.17. При $(kt/2m\omega_0^2 = \frac{\pi}{2})$ первый маятник будет неподвижен и вся энергия перейдет ко второму. Таким образом, даже слабая связь приводит к тому, что происходит периодический обмен энергией между осцилляторами, причем период перекачки зависит от величины связи и кратен величине $T \approx 2\pi m\omega_0/k$.

3.4.2. Малые колебания системы из N материальных точек

Нетривиальным обобщением рассмотренной в предыдущем параграфе задачи является задача о малых колебаниях системы N взаимодействующих частиц. В этом параграфе показано, что для такой системы существуют нормальные координаты, в которых кинетическая и потенциальная энергия системы имеют простой вид, и изучим свойства собственных частот систем.

Рассмотрим систему из N материальных точек с радиусами $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и M идеальными голономными связями. Кроме того, мы полагаем, что действующие на систему силы являются стационарными и потенциальными. Решим уравнения связи и выразим декартовы координаты материальных точек $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-m})$ через обобщенные координаты $q = \{q_1, q_2, \dots, q_{3N-m}\}$.

Как показано в главе 2, функция Лагранжа в обобщенных координатах принимает вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (3.67)$$

где симметричный тензор $a_{jk}(q) = a_{kj}(q)$ зависит только от q и $n = 3N - M$. Найдем положения равновесия: $\dot{q}_i = 0$; $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$, отвечающие экстремуму потенциала. Из всех положений равновесия q_{i0} выберем одно устойчивое положение равновесия и рассмотрим малое отклонение системы от него:

$$q_i = q_{i0} + \xi_i(t); \quad |\xi| \ll 1. \quad (3.68)$$

Найдем вид функции Лагранжа для новых переменных ξ . Поскольку $\dot{q}_i = \dot{\xi}_i$, то кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j), \quad (3.69)$$

где $a_{ij} = a_{ji} = a_{ij}(q - q_0)$ является однородным многочленом от скоростей, или, как говорят, квадратичной формой от скоростей. Из вида кинетической энергии в декартовых координатах следует, что T – положительно определенная форма, т. е. имеет положительные значения при всех значениях аргументов. Разлагая по малым смещениям потенциальную энергию U с точностью до членов второго порядка малости, получим выражение в виде

$$\begin{aligned} U(q_1, q_2, \dots) &= U(q = q_0 + \xi) = \\ &= U(q_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \Big|_{q=q_0} \xi_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j + \dots = \\ &= U(q_0) + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j + \dots, \end{aligned} \quad (3.70)$$

где

$$U_{ij} = U_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=q_{0i}}. \quad (3.71)$$

Если точка равновесия устойчива, то, как известно из курса высшей математики, потенциальная энергия в этом положении имеет

изолированный минимум и квадратичная форма $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \xi_i \xi_j$ положительно определена. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий (критерий Сильвестра):

$$U_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} U_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & U_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & U_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.72)$$

Отбрасывая несущественное слагаемое $U(q_0)$, мы получаем функцию Лагранжа для малых колебаний в следующем виде:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (a_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j - U_{ij} \xi_i \xi_j), \quad (3.73)$$

где коэффициенты a_{ik} , U_{ik} определяются параметрами динамической системы. Если начальные смещения $\xi_i(t=0)$ от устойчивого положения равновесия и скорости $\dot{\xi}_i(t=0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) достаточно малы, то они останутся малыми во время всего движения. Это и позволяет нам рассматривать далее только лагранжиан (3.73), отбросив члены более высокого порядка малости. Отсюда сразу можно получить уравнение движения

$$\sum_k (a_{ik} \ddot{\xi}_k + U_{ik} \xi_k) = 0 \quad (3.74)$$

в виде системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решим эту систему подстановкой:

$$\xi_k = C_k e^{i\lambda t}. \quad (3.75)$$

В результате получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений на коэффициенты C_k :

$$\sum_k (a_{ik} \lambda^2 - U_{ik}) C_k = 0. \quad (3.76)$$

Она имеет нетривиальное решение при условии

$$\det \|a_{ik}\lambda^2 - U_{ik}\| = 0. \quad (3.77)$$

После разворачивания определителя получается алгебраическое уравнение, которое является полиномом степени n :

$$b_0 - \lambda^2 b_1 + \lambda^4 b_2 - \lambda^6 b_3 + \dots (-1)^n \lambda^{2n} b_n = 0$$

относительно λ^2 . Согласно основной теореме алгебры, это уравнение, называемое *характеристическим*, имеет n решений λ_α^2 , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Величины λ_α носят название *собственных частот* системы. Тогда для каждого λ_α^2 решением уравнения (3.76) находится величина $C_{k\alpha}$, называемая *собственным вектором*:

$$\sum_k (a_{ik}\lambda_\alpha^2 - U_{ik})C_{k\alpha} = 0. \quad (3.78)$$

Покажем вещественность собственных значений λ_α^2 . Умножим (3.78) на $C_{i\alpha}^*$ и просуммируем по индексу i :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{i\alpha}^* C_{k\alpha} \lambda_\alpha^2 - U_{ik} C_{i\alpha}^* C_{k\alpha} = 0. \quad (3.79)$$

Это соотношение удобно записать в матричном виде, вводя матрицы $A = \{a_{ik}\}$, $U = \{U_{ik}\}$. Представим величину $C_{k\alpha}$ как k -компоненту n -мерного вектора-столбца C_α : $C_{k\alpha} = (C_\alpha)_k$, $C_{i\alpha}^*$ как k -компоненту n -мерного вектора-строки $C_{i\alpha}^* = C_{i\alpha}^* = (C_\alpha^*)_i$. Тогда соотношение (3.69) приводится к виду

$$C_\alpha^* A C_\alpha \lambda_\alpha^2 - C_\alpha^* U C_\alpha = 0, \quad (3.80)$$

следовательно:

$$\lambda_\alpha^2 = \frac{C_\alpha^* U C_\alpha}{C_\alpha^* A C_\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n U_{ik} C_{i\alpha}^* C_{k\alpha}}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{i\alpha}^* C_{k\alpha}}. \quad (3.81)$$

Поскольку матрицы U и A вещественные и симметричные, то величины $C_\alpha^* U C_\alpha$, $C_\alpha^* A C_\alpha$ также вещественные, поскольку

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n U_{ik} C_{i\alpha}^* C_{k\alpha} \right)^* = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n U_{ik} C_{i\alpha} C_{k\alpha}^* \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n U_{ki} C_{k\alpha} C_{i\alpha}^* \right);$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{i\alpha}^* C_{k\alpha} \right)^* = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{i\alpha} C_{k\alpha}^* \right) = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} C_{k\alpha} C_{i\alpha}^* \right).$$

Для доказательства их положительности разложим комплексный вектор C_α на действительную и мнимую часть: $C_\alpha = B_\alpha + iD_\alpha$. Тогда

$$C_\alpha^* U C_\alpha = (B_\alpha^T - iD_\alpha^T) U (B_\alpha + iD_\alpha) = B_\alpha^* U B_\alpha + D_\alpha^* U D_\alpha$$

и $C_\alpha^* A C_\alpha > 0$, так как формы $B_\alpha^* U B_\alpha$, $D_\alpha^* U D_\alpha$ положительно определены по условию. Аналогично доказывается, что величина $C_\alpha^* A C_\alpha$ больше нуля.

В итоге общее решение уравнения (3.74) можно написать как сумму частных решений (3.75) – суперпозиций колебаний с частотами λ_α :

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^n C_{k\alpha} e^{i\lambda_\alpha t}. \quad (3.82)$$

Тем самым доказывается гипотеза Бернулли: каждое мыслимое колебание в системе с n степенями свободы может рассматриваться как результат наложения n -независимых колебаний. Подчеркнем, что нельзя рассматривать собственную частоту λ_α как частоту колебаний какой-либо материальной точки системы, она является *частотой коллективных движений*, в которых участвуют все точки системы.

Если квадратичная форма для U отрицательно определена, то состояние равновесия неустойчиво. С ростом амплитуды возникает аperiодическое движение и дальнейшая динамика определяется уже нелинейными уравнениями движения.

Для выражения (3.74) можно выбрать набор координат, каждая из которых участвует только в одном гармоническом движении с собственной частотой λ_α . Докажем, что существует

Q_α – линейная комбинация функций ξ , для которой уравнения движения (3.74) приводимы к виду

$$\ddot{Q}_\alpha + \lambda_\alpha^2 Q_\alpha = 0. \quad (3.83)$$

Координаты Q_α , как и в параграфе 3.4.1, называются *нормальными координатами*. Пусть

$$Q_\alpha = \sum_k \beta_{\alpha k} \xi_k. \quad (3.84)$$

Умножим уравнение (3.74) на постоянные $C_{i\alpha}$, просуммируем по i и изменим индекс суммирования с i на k ($i \leftrightarrow k$). Получаем

$$\sum_{ik} a_{ik} \xi_i C_{k\alpha} + U_{ik} \xi_i C_{k\alpha} = 0. \quad (3.85)$$

Система (3.85) совпадает с системой (3.84) и (3.83), если выполняется условие

$$\begin{cases} \sum_k a_{ik} C_{k\alpha} = \beta_{\alpha i}, \\ \sum_k U_{ik} C_{k\alpha} = \beta_{\alpha i} \lambda_\alpha^2. \end{cases}$$

Докажем некоторые важные свойства коэффициентов $C_{k\alpha}$. Во-первых, умножим уравнение (3.78) на $C_{i\gamma}$ и просуммируем по i . Тогда получим

$$\sum_{i,k} C_{i\gamma} a_{ik} C_{k\alpha} \lambda_\alpha^2 = \sum_{i,k} U_{ik} C_{i\gamma} C_{k\alpha}. \quad (3.86)$$

Заменим индексы $\alpha \leftrightarrow \gamma$. Получим $\sum_{i,k} C_{i\alpha} a_{ik} C_{k\gamma} \lambda_\gamma^2 = \sum_{i,k} U_{ik} C_{i\alpha} C_{k\gamma}$ и

вычтем его из первого соотношения. Матрица U симметрична, поэтому

$$\sum_{i,k} C_{i\gamma} a_{ik} C_{k\alpha} (\lambda_\alpha^2 - \lambda_\gamma^2) = 0,$$

следовательно:

$$\sum_{i,k} C_{i\gamma} a_{ik} C_{k\alpha} = 0, \quad \alpha \neq \gamma \quad (\alpha, \gamma = 1, \dots, n),$$

если все λ_α^2 различны. Поскольку величины $C_{i\alpha}$ определены с точностью до множителя, то мы всегда можем выбрать их такими, чтобы выполнялось соотношение $\sum_{i,k} C_{i\gamma} a_{ik} C_{i\gamma} = 1$ (здесь нет суммирования по γ).

Таким образом, получаем первое свойство:

$$\sum_{i,k} C_{i\gamma} a_{ik} C_{k\alpha} = C_\gamma^T A C_\alpha = \delta_{\alpha\gamma}. \quad (3.87)$$

Иными словами, векторы C_α и C_γ с разными собственными значениями частот ортогональны, если их скалярное произведение определено с «весом», зависящим от матрицы A . Получим следующее свойство, умножая (3.87) на $C_{l\gamma}$ и суммируя по индексу γ :

$$\sum_{ik\gamma} C_{i\gamma} a_{ik} C_{l\gamma} C_{k\alpha} = C_{l\alpha}.$$

Отсюда следует, что произведение $\sum_{i\gamma} C_{i\gamma} a_{ik} C_{l\gamma}$ – это единичная матрица по индексам k, l :

$$\sum_{i,\gamma} C_{i\gamma} a_{ik} C_{l\gamma} = \delta_{kl}.$$

В частном случае отсутствия связей, когда $a_{ik} = \delta_{ik}$, если рассматривать элементы C_{ik} как элементы матрицы C , то соотношения (3.87), (3.88) записываются в виде

$$\begin{cases} CC^T = E, \\ C^T C = E, \end{cases} \quad (3.89)$$

где E – единичная матрица. В этом случае переход от обычных координат к нормальным является вращением с помощью ортогональной матрицы C размерности $3N \times 3N$.

Найдем выражения ξ_r через нормальные координаты Q_α . Умножим выражение

$$Q_\alpha = \sum_i \beta_{\alpha i} \xi_i = \sum_{ik} a_{ik} C_{k\alpha} \xi_i$$

на $C_{\alpha k}$, возьмем сумму по α и используем (3.79). В итоге получаем

$$\xi_k = \sum_{\alpha} C_{k\alpha} Q_\alpha. \quad (3.90)$$

Лагранжиан (3.67) системы, как и ее гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (3.91)$$

могут быть записаны в терминах нормальных координат. Из формул (3.81), (3.82), (3.87) следует, что в нормальных координатах гамильтониан представляет собой сумму гамильтонианов

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 + \lambda_\alpha^2 Q_\alpha^2) \quad (3.92)$$

не взаимодействующих гармонических осцилляторов с частотами λ_α (3.81).

Мы показали, что решение задачи о малых колебаниях системы N взаимодействующих частиц существенно упрощается введением нормальных координат соотношениями (3.82), (3.90). В отсутствие кратных корней характеристического уравнения эти формулы позволяют исследовать все малые колебания системы. Случай кратных корней не представляет особых затруднений. Как показано еще Вейерштрассом, каждому корню λ_α кратности p соответствует p линейно независимых решений уравнения (3.78) и формула (3.82) дает общее решение для этого случая.

Глава 4. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Не будет, вероятно, преувеличением сказать, что среди процессов, как свободно протекающих в природе, так и используемых в технике, колебания, понимаемые в широком смысле этого слова, занимают во многих отношениях выдающееся и часто первенствующее место... Развитие учения о колебаниях неразрывно связано с развитием математических методов их трактовки.

Н.Д. Папалекси

В области колебаний особенно отчетливо выступает взаимодействие между физикой и математикой, влияние потребностей физики на развитие математических методов и обратное влияние математики на наши физические знания.

А.А. Андронов, С.Э. Витт

Теория колебаний в самом начале возникновения ограничивалась изучением простейших видов колебаний и простыми математическими методами*. Большинство нелинейных задач механики очень часто «линеаризировалось», рассматривались только малые колебания, многие нелинейные уравнения механики сводились к линейным. Это объяснялось главным образом тем, что математический аппарат линейных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, имевшийся к тому времени в руках исследователей, был хорошо разработан. «Несмотря на замечательные результаты, полученные таким линейным подходом к нелинейным задачам, очень часто при такой идеализации реальных задач из рассмотрения ускользали не только наблюдаемые эффекты, но и сущность исследуемого явления. Такое “ли-

* Превосходный обзор развития теории нелинейных колебаний до середины XX в. дан в статье [20] и монографиях [22–24].

неаризирование” всегда искусственно, редко бывает полезным, большей частью вообще ничему не научает, а иногда и прямо вредно» [21. С. 11]. Хотя к этому времени в трудах А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова конца XIX в. были заложены математические основы теории нелинейных колебаний и развиты некоторые методы (теория возмущений, исключение секулярных членов), с помощью которых были исследованы некоторые колебательные системы и задачи небесной механики, их применение часто носило характер случайных или придуманных приемов. В начале XX в. «...основные результаты Пуанкаре и Ляпунова не были достаточно утилизированы физиками и инженерами, которые продолжали даже при изучении существенно нелинейных проблем пользоваться классическим аппаратом линейной теории как лекарством от всех болезней... Первые строгие методы в радиотехнике были применены Льенаром и Картаном во Франции, в СССР представителями школы Мандельштама–Папалекси» [24. С. 611].

Решающую роль в развитии теории нелинейных колебаний в это время сыграли потребности быстро развивающихся областей техники, особенно радиофизики и радиотехники. Генерация и прием незатухающих электромагнитных волн требовали теоретического изучения особого рода автономных колебательных систем (позже названных автоколебательными), в которых за счет постоянного источника энергии могут поддерживаться колебания определенной формы, частоты и мощности.



Леонид Исаакович Мандельштам (4 мая 1879, Могилев – 27 ноября 1944, Москва) – выдающийся советский физик, академик АН СССР (с 1929 г.), лауреат Сталинской премии (1942 г.). В 1928 г. открыл (совместно с Г.С. Ландсбергом) комбинационное рассеяние света. Совместно с Н.Д. Папалекси выполнены основополагающие исследования по нелинейным колебаниям, разработан метод параметрического возбуждения электрических колебаний, предложен радиоинтерференционный метод. Один из основателей научной школы радиофизики в СССР. Был также выдающимся организатором науки, лектором и педагогом. С 1925 г. и до конца жизни профессор Леонид Мандельштам был заведующим кафедрой теоретической физики Московского университета. В его честь назван кратер на обратной стороне Луны

Их характерной особенностью является независимость колебаний от начальных условий, что не описывается линейными дифференциальными уравнениями. Проблемы трансформации и стабилизации частоты, модуляции и демодуляции колебаний требовали также разработки математического аппарата для количественного решения конкретных задач и понимания физических явлений в этих областях. Кроме того, вопросы практики вынуждали создавать простые инженерные методы расчета. Поэтому развивались параллельно два направления в изучении нелинейных колебательных систем: теоретическое и инженерно-практическое. Математическим фундаментом для создания теории нелинейных колебаний послужили три направления: качественная (топологическая) теория дифференциальных уравнений, метод малого параметра А. Пуанкаре и теория устойчивости А.М. Ляпунова.

Теория нелинейных колебаний исследует периодические колебательные движения, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями. По сравнению с линейной теорией она более полно отображает свойства колебательных систем. Отметим некоторые из них.

1. К нелинейным системам неприменим принцип суперпозиции: из найденных независимых частных решений нелинейных дифференциальных уравнений нельзя составить общего решения, как это делается для линейных систем. Суперпозиция двух или нескольких колебательных движений, каждый из которых существует в нелинейной системе, не будет ее колебанием.

2. Если действующая на нелинейную систему сила разложена в ряд Фурье, то ее действие не будет равно линейной сумме действий каждого отдельного слагаемого ряда.

3. В нелинейных системах возможны несколько стационарных и периодических колебательных движений. Собственные частоты нелинейных колебаний в консервативных системах в отличие от таковых линейных систем зависят от начальных условий.

4. Свободные колебания линейных систем при наличии трения всегда затухают. В нелинейных же системах даже при трении возможны периодические колебательные движения.

5. В линейных системах при действии внешней (возмущающей) гармонической силы в установившемся режиме колебания происходят с периодом этой силы. В нелинейных системах вы-

нужденные колебания происходят с периодом, кратным периоду внешней гармонической силы с необычными свойствами амплитудно-частотной характеристики.

К настоящему времени, несмотря на интенсивную научную деятельность многих поколений математиков и физиков, не существует полной замкнутой теории, позволяющей описать в аналитическом виде общую динамику нелинейных систем даже для систем одной степенью свободы. Наиболее полно разработана динамика консервативных систем с одной степенью свободы. Однако для слабонелинейных систем с малым параметром нелинейности существуют достаточно хорошо разработанные общие методы решений. В этой главе представлено элементарное введение в теорию нелинейных явлений, обсуждается динамика консервативных систем с одной степенью свободы и асимптотическими методами решения нелинейных задач: методом усреднения и методом многих масштабов.

4.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Изучение свободных колебаний консервативных систем с одной степенью свободы представляет собой элементарное введение в теорию нелинейных колебаний и простой способ ознакомления с качественной теорией нелинейных систем (метод фазовой плоскости).

Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы. Такая система описывается одной вещественной переменной x , ее движение под действием приложенных сил приводит к изменению этой величины с течением времени. Хотя физическая природа и размерность $x(t)$ может быть разной, уравнение движения в консервативной системе всегда может быть приведено к виду

$$\ddot{x} = f(x). \quad (4.1)$$

В механике $f(x)$ можно рассматривать как силу, отнесенную к единице массы.

Запишем уравнение (4.1) в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad (4.2)$$

$$\dot{y} = f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.3)$$

где $U(x) = \int f(x)dx$ – потенциальная энергия системы. В дальнейшем мы полагаем, что $f(x)$ – аналитическая функция на всем интервале изменения x , т. е. в каждой точке этого интервала она разлагается в степенной ряд с отличным от нуля радиусом сходимости.

Найдем зависимость скорости от координат

$$y(t) = y(x(t)). \quad (4.4)$$

В силу того, что $y = \dot{x}$ и

$$\frac{d}{dt}y = \ddot{x} = f(x) = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{dy}{dx}y,$$

мы получаем дифференциальное уравнение фазовой (интегральной) траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}, \quad (4.5)$$

по которой движется материальная точка в фазовой плоскости (y, x) . Решение этого уравнения $y = y(x, c)$ по теореме Коши единственно в некоторой области D фазовой плоскости, если функция

$P(x, y) = \frac{f(x)}{y}$ – однозначная и непрерывная в данной области D с непрерывной производной $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$. При выполнении теоремы

единственности через данную точку проходит только одна фазовая траектория и фазовые траектории не пересекаются. Точки, где эти условия не выполняются, называются *особыми*, или *критическими*. Через них может проходить несколько фазовых траекторий. Точки x_i , $(i = 1, 2, \dots, n)$, в которых $\dot{x} = \ddot{x} = 0$:

$$y = 0, \quad f(x_i) = \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = 0,$$

называются точками равновесия и являются особыми точками, так как значения $P(x, y) = \frac{f(x)}{y}$ в них неопределенно, а фазовая траектория может проходить через них в разных направлениях.

С физической точки зрения система с начальными условиями $y(0) = 0$, $x = x_i$ при $t = 0$ сохраняет эти значения скорости и положение при всех временах t .

Уравнения движения (4.2), (4.3) можно решить следующим образом. Умножим первое из них на $\frac{\partial U}{\partial x}$, второе – на y и сложим почленно. Получим

$$\dot{y}y + \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + U(x) \right) = 0. \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что полная энергия системы на единицу массы

$$E = \frac{\dot{x}^2 + U(x)^2}{2} + U(x) = \frac{y^2}{2} + U(x) \quad (4.7)$$

не зависит от времени и является интегралом движения. Данные системы в главе 2 были названы консервативными. Наличие такой сохраняющейся во времени величины позволяет понизить порядок дифференциального уравнения. Из (4.7) мы получаем дифференциальное уравнение движения консервативной системы в виде

$$y = \dot{x} = \pm \sqrt{2(E - U(x))}. \quad (4.8)$$

Обсудим движение с начальными условиями $x(t=0)$, $y(t=0)$. Положим для определенности $y(0) > 0$. Полная энергия E определена начальными условиями. Прямым интегрированием уравнения (4.8) $\dot{x} = \sqrt{2(E - U(x))}$ нельзя вначале получить непосредственно x как функцию t , но можно, интегрируя уравнение $\frac{dt}{dx} = \left(\sqrt{2(E - U(x))} \right)^{-1}$, найти обратную функцию $t(x)$.

Полученное решение зависит от двух параметров E и x_0 . Его удобно записать в виде неявной функции

$$F(t, x) = t - \int_{x_0}^x \frac{d\zeta}{\sqrt{2(E - U(\zeta))}} = 0, \quad (4.9)$$

оно называется *решением в квадратурах*.

Качественное описание движения с помощью фазовой плоскости

Характер движения материальной точки можно качественно описать с помощью фазовой плоскости без обращения интеграла (4.9). Условие вещественности решений ($E - U(x) > 0$) в (4.9) разбивает область изменения переменной x на определенное число интервалов $(a_i(E), b_i(E))$; $i = 1, 2, \dots, n$. Концы интервалов являются либо точками поворота, которые вычисляются из условия $E - U(x) = 0$, либо неограниченными $a_i(E), \rightarrow -\infty$, $b_i(E) \rightarrow \infty$.

Рассмотрим движение в одном из интервалов $[a, b]$, когда $x(0) \in (a, b)$, причем величина a может принимать как конечные, так и бесконечные значения, а величина $2(E - U(x))$ на этом интервале не имеет корней. Из (4.9) находим частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2(E - U(x))}}.$$

Очевидно, что они непрерывны на интервале $[a, x(0)]$. Тогда из теоремы о существовании однозначной и непрерывной неявной функции следует, что на этом интервале соотношение (4.9) определяет x как однозначную функцию времени.

Поскольку $\dot{x}(t) = \sqrt{2(E - U(x))} > 0$, то $x(t)$ – монотонно возрастающая функция. Поэтому, если $a \rightarrow -\infty$ и $\sqrt{2(E - U(x))}$ всегда

положительно (например при $E = E_6$), то из расходимости интеграла (4.9) на нижнем пределе следует, что движение в этом случае неограниченно: $\lim x(t) \rightarrow -\infty$.

При конечном значении b возможны два типа движения. Пусть точка поворота не совпадает с точкой равновесия, например точка b совпадает с x_5 на рис. 4.1. Поскольку в разложении

$$E - U(x) = -U'(b)(x - b) - \frac{1}{2}U''(b)(x - b)^2 \quad (4.10)$$

первый член отличен от нуля, интеграл в соотношении (4.9) сходится при $x = b$. Поэтому при некотором конечном значении t_1 имеем $x(t_1) = b$.

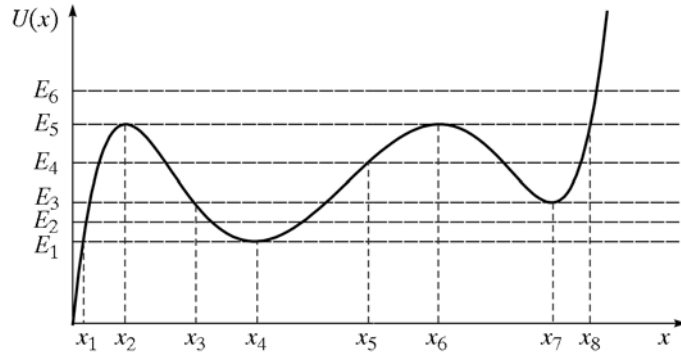


Рис. 4.1

Полученное движение может быть непрерывно продолжено на последующие моменты, поскольку $\ddot{x}(t_1) \neq 0$ и

$$x(t_1 + \varepsilon) = x(t_1) + \frac{1}{2}\ddot{x}(t_1)\varepsilon^2 + \dots \neq x(t_1) \quad (\varepsilon \ll 1).$$

Такое движение уже описывается уравнением $\dot{x} = -\sqrt{2(E - U(x))}$ с теми же значениями полной энергии и начальным условием $\dot{x}_1(t_1) = 0$, $x(t_1) = b$. Поэтому функция $x(t)$, определяемая из соотношения

$$t - t_1 = -\int_b^x \frac{d\zeta}{\sqrt{E - U(\zeta)}}, \quad (4.11)$$

монотонно убывает и однозначна в интервале (a, b) . Если значение a неограниченно и величина $\sqrt{E - U(\zeta)}$ всегда положительна, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow -\infty$. При конечном значении a , не совпадающем с равновесным состоянием системы, функция $x(t)$ достигает значения $x = a$ при конечном $t = t_2$. Дальнейшая эволюция системы вновь определяется уравнением $\dot{x} = \sqrt{2(E - u(x))}$ с начальным условием $x(t_2) = a$ и т. д. Таким образом, если концы интер-

вала движения (a, b) не совпадают со стационарной точкой потенциальной энергии, то движение является либо неограниченным, либо колебательным между $x = a$ и $x = b$. Период колебаний T равен удвоенному времени прохождения между точками остановки

$$E = \sqrt{2} \int_{a(E)}^{b(E)} \frac{d\zeta}{\sqrt{E - U(\zeta)}}. \quad (4.12)$$

Пусть точка остановки совпадает с точкой равновесия: $U'(b) = 0$, например точки x_2, x_6 на рис. 4.1. Тогда интеграл (4.9) логарифмически расходится на верхнем пределе и время движения от точки $x(0)$ до значений $x = b$ неограниченно. Движение $x(t)$ асимптотически стремится к точке равновесия, отвечающей максимальному значению потенциальной энергии: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = b$.

Общую картину движения при разных начальных условиях можно выявить путем качественного анализа. Каждое решение $x(t), y(t)$ системы (4.2), (4.3) изображается точкой в плоскости (x, y) . Непрерывное изменение состояния системы приводит к перемещению этой точки по фазовой траектории. Каждая траектория соответствует некоторой величине энергии, определяемой

начальными условиями $E = \frac{\dot{x}^2(0)}{2} + U(x(0))$, и описывается урав-

нением (4.8). Поскольку заданному значению E соответствует бесконечное множество начальных условий $x(0), y(0)$ при $t = t_0$, то построение семейства (4.7) позволяет сразу представить картину всевозможных движений при различных начальных условиях. Зависимость $U(x)$ можно задать графически, а затем по уравнению (4.8) построить фазовую траекторию. Линии равной энергии или изолированы, или являются объединением нескольких фазовых траекторий.

График потенциальной энергии удобно построить над графиком фазовой плоскости так, чтобы оси $U(x)$ и y были соосны, а оси x параллельны (рис. 4.2). В верхней полуплоскости ($y > 0$) изображающая точка движется всегда вправо (направление движения указано стрелкой), в сторону увеличения x (так как $\dot{x} > 0$), в нижней – влево. Интегральная кривая пересекает ось абсцисс ($y = 0$) в неособой точке всегда под прямым углом.

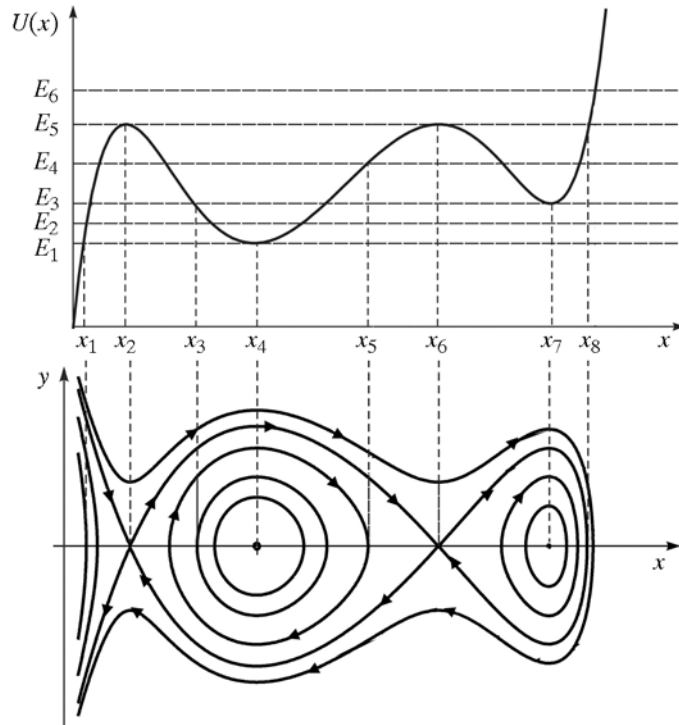


Рис. 4.2

Для построения фазовой траектории нужно, согласно (4.8), для всех значений x в разрешенных интервалах $(a_i(E), b_i(E))$ движения последовательно вычислять величины $\sqrt{2(E - U(x))}$ и откладывать их по оси y . В окрестности точек поворота, не совпадающих с особыми, фазовая траектория приближенно описывается гиперболой

$$y^2 = 2U'(b)(b - x) \quad (U'(b) > 0, x < b),$$

или

$$y^2 = -2U'(a)(x - a) \quad (U'(a) < 0, x > a).$$

Вид фазовой траектории в окрестности точек равновесия $x = x_i$

$$y = \pm \sqrt{2(E - U(x_i)) - U''(x_i)(x - x_i)^2} \quad (4.13)$$

существенно зависит от типа экстремума потенциальной энергии. В окрестности минимума потенциала ($U''(x_i) > 0$) линии уровня при $E > U(x_i)$ представляют собой семейство деформированных эллипсов, которые при $E = U(x_i)$ вырождаются в изолированную точку равновесия (точки x_4, x_7 на рис. 4.2). В окрестности максимума потенциальной энергии уравнение (4.13) описывает набор гипербол, которые при $E = U(x_i)$ переходят в прямые $y = \pm U''(x_i)(x - x_i)$, проходящие через положение равновесия (точки x_2, x_6 на рис. 4.2). На фазовой плоскости есть кривые, отделяющие области, в которых фазовые траектории имеют различный вид, отвечающий финитному (ограниченному) и инфинитному (неограниченному) движению. Такие кривые называют *сепаратрисами*. Движения около точки, отвечающей максимуму потенциальной энергии, представляют собой движения около неустойчивого состояния равновесия. Все изображающие точки (кроме тех, которые движутся по двум ветвям сепаратрисы) уходят от положения равновесия. Особые точки, соответствующие неустойчивому положению равновесия, называются *седлами* (впадина горы), по аналогии с топографическими линиями равной высоты.

Проведенный выше анализ достаточен для исследования различных типов движения. Построим, например, фазовый портрет движения с потенциальной энергией, изображенной на рис. 4.1. При $E = E_1$, $x(t_0) > x_1$, $x(t_0) \neq x_4$ движение отсутствует. При начальном значении энергии, равной $E = E_1$, и $x(t_0) = x_4$ фазовая траектория вырождается в точку равновесия $(0, x_4)$. При начальных условиях $x_2 < x(t_0) < x_6$ и $E_1 < E < E_5$ фазовые траектории являются замкнутыми кривыми около точки $(0, x_4)$ и описывают континуум периодических движений в ограниченной области фазового пространства. В верхней полуплоскости ($\dot{x} > 0$) изображающая точка движется слева направо, в нижней – в обратном направлении. При значениях E , близких к E_1 , колебания около точки $x = x_4$ близки к гармоническим, период которых не зависит от амплитуды. При дальнейшем увеличении полной энергии возникают нелинейные колебания, их период (4.12) зависит от амплитуды и неограниченно вырастает при $E = E_5$. При значении полной энергии $E = E_5$ помимо точек равновесия для начальных условий $x_6 < x(t_0) < x_8$ существует

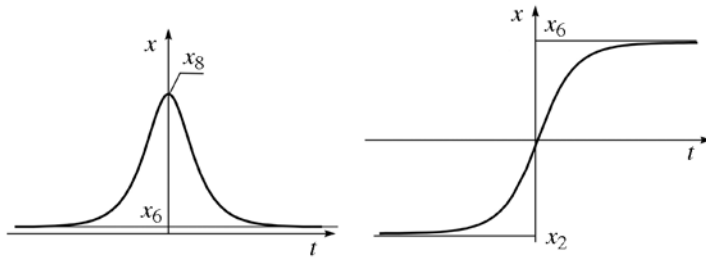


Рис. 4.3

фазовая траектория, приходящая к положению равновесия $(0, x_6)$ за бесконечный интервал времени. Такая сепаратриса замыкается на седло и разделяет области с разными типами движения – финитным и инфинитным. Соответствующая фазовая траектория соединяет неустойчивые положения равновесия. Из разложения (4.13) при $E = U(x_i)$ получаем экспоненциальный спад

$$x \rightarrow x_6 - e^{-t/\sqrt{U(x_6)}/c} \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

при подходе к неустойчивой точке равновесия. Он переходит в степенное поведение

$$x \rightarrow x_6 - \frac{c}{t^{\frac{n-1}{2}}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

в случае, если кратность нуля функции $E - U(x)$ на рис. 4.2 при $x = x_6$ равна n ($n > 1$). Графики функций $x(t)$, отвечающие движению по сепаратрисе, представлены на рис. 4.3. Замкнутой сепаратрисе отвечает локализованный импульс, незамкнутой – кинк, т. е. локализованный переход от значений x_2 к x_6 .

Рассмотренные случаи являются характерными типами движений в консервативных нелинейных системах. Таким образом, нелинейность восстанавливающей силы приводит к следующему:

- 1) ангармонизму периодических колебаний с периодом, зависящим от начальных условий;
- 2) существованию особого типа решений, отвечающих локализованным импульсам и кинкам, при наличии неустойчивых положений равновесия.

4.2. КОЛЕБАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Маятник сыграл чрезвычайно большую роль в истории физики.

Л.И. Мандельштам

Маятнику надо поставить памятник, как собаке Павлова.

Е.А. Туров

Уравнение движения маятника

$$\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \sin \varphi \quad (4.15)$$

встречается в разных областях теоретической физики и является эталонной моделью для описания нелинейных колебаний. Его интеграл движения

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos \varphi) = E \quad (4.16)$$

легко вычисляется по формулам (4.7). Фазовый портрет и кривые потенциальной энергии показаны на рис. 4.4. Фазовая кривая периодична по φ с периодом 2π . При значениях E , меньших максимального значения потенциальной энергии $U_{\max} = 2\omega_0^2$, существуют нелинейные колебания около устойчивого положения равновесия $\varphi = 0$. При $E > 2\omega_0^2$ движение инфинитное и нелинейные колебания отсутствуют. Таким движениям отвечают, например, начальные условия, когда маятник находится в верхнем положении ($\varphi(0) = \pi$) и, согласно (4.16), ему сообщена скорость $\dot{\varphi}(0) = \pm\sqrt{E - 2\omega_0^2}$. Колебательные и инфинитные движения разделяются сепаратрисами, уравнения которых при $E = 2\omega_0^2$, по (4.16), имеют простой вид

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (4.17)$$

Для колебательных движений, положив

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin u, \quad E = 2k^2\omega_0^2 \quad (0 < k < 1), \quad (4.18)$$

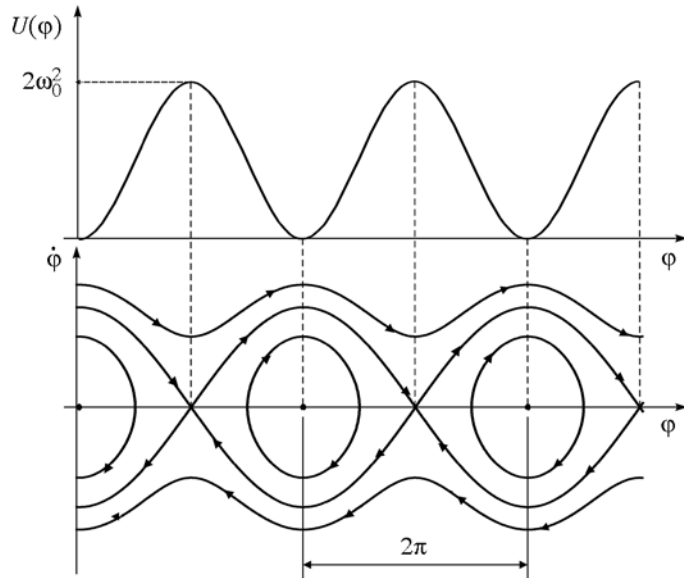


Рис. 4.4

преобразуем выражение (4.16) к виду

$$\dot{u}^2 = \omega_0^2(1 - k^2 \sin^2 u).$$

В итоге после разделения переменных в этом уравнении

$$\omega dt = \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

мы получили закон движения маятника как зависимость времени от угла отклонения

$$\omega_0(t - t_0) = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} = F(u, k). \quad (4.19)$$

Функция $F(u, k)$ известна как *неполный эллиптический интеграл первого рода*, так как впервые встретился при вычислении длины дуги эллипса. Она не выражается через элементарные трансцендентные функции ($\ln$, $\arcsin$, ...), но может быть пред-

ставлена в виде бесконечных рядов. Таблицы значений функции $F(u, k)$ приведены во многих справочниках. Нахождение обратной функции $u = u(t)$ называется *обращением* интеграла (4.19). Согласно Якоби, эта функция называется амплитудой, постоянная k – модулем, для нее принято специальное обозначение

$$u = am(\omega_0(t - t_0), k). \quad (4.20)$$

Синус и косинус этой функции обозначаются как sn , cn :

$$\begin{aligned} \sin u &= \sin am(\omega_0(t - t_0), k) = \text{sn}(\omega_0(t - t_0), k), \\ \cos u &= \cos am(\omega_0(t - t_0), k) = \text{cn}(\omega_0(t - t_0), k). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Знаменатель подынтегрального выражения в (4.19) обозначается как dn :

$$\text{dn}(\omega_0(t - t_0), k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(\omega_0(t - t_0), k)}. \quad (4.22)$$

В итоге решение уравнения (4.15) при $E = 2k^2\omega_0^2$ ($0 < k < 1$) записывается в виде

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \text{sn}(\omega_0(t - t_0), k). \quad (4.23)$$

В случае $E > 2\omega_0^2$ (инфинитное движение маятника) сделаем следующую замену:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin u, \quad E = \frac{2\omega_0^2}{k^2} \quad (0 < k < 1) \quad (4.24)$$

в уравнении (4.16). Тогда обращение интеграла

$$\frac{\omega_0(t - t_0)}{k} = \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}$$

дает решение в эллиптических функциях

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \text{sn} \left(\frac{\omega_0(t - t_0)}{k}, k \right). \quad (4.25)$$

Найдем производные эллиптических функций. Продифференцируем по времени соотношение (4.19), положив для простоты записи $\omega_0 = 1$, $t_0 = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u},$$

следовательно:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sn}(t, k) = \frac{d}{dt} \sin(u) = \cos u \frac{d}{dt} u = \operatorname{cn}(t, k) \operatorname{dn}(t, k). \quad (4.26)$$

Производные функций sn и dn можно получить дифференцированием соотношений

$$\operatorname{cn}(t, k)^2 + \operatorname{sn}(t, k)^2 = 1, \quad \operatorname{dn}(t, k)^2 + k^2 \operatorname{sn}(t, k)^2 = 1, \quad (4.27)$$

что дает

$$\frac{d}{dt} \operatorname{cn}(t, k) = -\operatorname{sn}(t, k) \operatorname{dn}(t, k), \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{dn}(t, k) = -k^2 \operatorname{sn}(t, k) \operatorname{cn}(t, k).$$

Таблицу значений эллиптических функций можно найти в специальных руководствах. Качественное поведение их общей зависимости от времени можно получить из анализа уравнения для нелинейных колебаний

$$\dot{\varphi} = \pm 2 \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (4.29)$$

графика потенциальной энергии и соотношения (4.18). Пусть маятник в момент $t = 0$ находится в наини́зшем положении $\varphi = 0$. Тогда, согласно (4.18), (4.19) (при $\omega_0 = 1$, $t_0 = 0$), $\operatorname{sn}(0, k) = 0$. При положительной начальной скорости как угол отклонения φ , так и величина u увеличиваются вплоть до момента $t = K$, когда $\sin \frac{\varphi}{2} (t = K) = k$, $u = \frac{\pi}{2}$, следовательно:

$$\operatorname{sn}(K, k) = 1,$$

где

$$K = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}. \quad (4.30)$$

Величину K называют *полным эллиптическим интегралом первого рода*. Дальнейший подобный анализ показывает, что $\operatorname{sn}(u, k)$ уменьшается от единицы до нуля в интервале от K до $2K$. В интервале от $2K$ до $4K$ эта функция принимает отрицательные значения. Она убывает в интервале от $2K$ до $3K$ ($\operatorname{sn}(3K, k) = -1$) и возрастает до нуля в интервале $3K$ до $4K$. Отсюда следует, что функция sn нечетная и является периодической с периодом $4K$

$$\operatorname{sn}(t + 4K, k) = \operatorname{sn}(t, k). \quad (4.31)$$

Отметим несколько важных для дальнейшего изложения свойств эллиптических функций и интегралов. При $k < 1$ подынтегральное выражение в (4.30) разлагается в сходящийся ряд, который можно проинтегрировать и

$$K = \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 \dots \right). \quad (4.32)$$

При тех же значениях k функция $\operatorname{sn} u$ разлагается в ряд Фурье

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \sin(2n-1) \frac{\pi u}{2K}, \quad (4.33)$$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{kK} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1 - q^{2n-1}} \cos(2n-1) \frac{\pi u}{2K},$$

где

$$q = \exp\left(\frac{-\pi K'}{K}\right), \quad K' = F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1 - k^2}\right), \quad (4.34)$$

$$q = \frac{k^2}{16} + 8 \left(\frac{k^2}{16}\right)^2 + 84 \left(\frac{k^2}{16}\right)^3 + \dots \quad (k \ll 1).$$

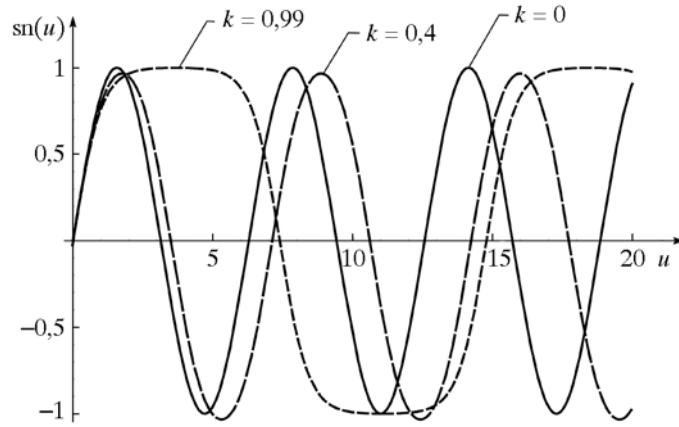


Рис. 4.5

Графики функции $\text{sn}u$ для трех значений k изображены на рис. 4.5. Видно, что с увеличением k период колебаний увеличивается. Функция $\text{sn}(u, k)$ отличается от $\sin u = \text{sn}(t, 0)$ тем, что становится более пологой с ростом k . При $k = 1$ ряды (4.33), (4.34) расходятся, но интеграл (4.17) вычисляется явно

$$\omega_0(t - t_0) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} \right|.$$

Отсюда

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \pm \text{th} \omega_0(t - t_0), \quad (4.35)$$

и при увеличении t от t_0 до ∞ изображающая точка движется по сепаратрисе на рис. 4.4 от значения $\varphi = 0$ до $\varphi = \pm\pi$. Решение для скорости

$$\dot{\varphi} = \frac{\pm 2\omega_0}{\text{ch} \omega_0(t - t_0)} \quad (4.36)$$

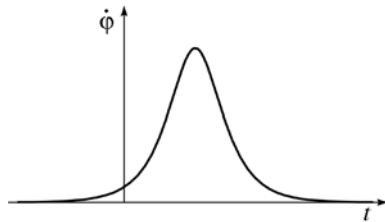


Рис. 4.6

экспоненциально спадает при $t \rightarrow \pm\infty$ и носит название *солитон*. Ширина его профиля обратно пропорциональна ω_0 (рис. 4.6).

4.3. МАЛОАМПЛИТУДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Как уже упоминалось, свободными колебаниями называются колебания физической системы, которая после начального внешнего воздействия предоставлена самой себе. При этом происходит перекачка потенциальной энергии, определяемой взаимодействием с окружающими телами, в кинетическую энергию и наоборот. Если сумма этих энергий в процессе колебаний сохраняется, то система называется консервативной.

Свободные колебания консервативных систем с одной степенью свободы описываются универсальным уравнением (4.1), где восстанавливающая сила $f(x)$ на единицу массы в общем случае является нелинейной функцией x . Если $x = 0$ положение равновесия системы, то для малых отклонений от него $f(x)$ можно разложить в ряд Тейлора

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right) (x=0), \quad (4.37)$$

где параметр $a_1 = -\omega_0^2$ определяет частоту линейных колебаний. Если положим $\omega_0 = 1$, то безразмерное время t измеряется в периодах свободных колебаний. Тогда для нечетной функции уравнение (4.1) в первом нелинейном приближении запишем в виде

$$\ddot{x} = -x - \varepsilon x^3, \quad (4.38)$$

простейшего примера ангармонического осциллятора.

Безразмерный параметр $\varepsilon = \frac{a_3}{a_1} \ll 1$ характеризует степень

нелинейности системы. Так для математического маятника разложение силы имеет вид $G[\varphi] = -\frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{g}{l} \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \right) + \dots$ и ма-

лый параметр $\varepsilon = -\frac{1}{3!}$.

Хотя точное решение уравнения (4.38) выражается в эллиптических функциях, уместно найти приближенное аналитическое выражение для колебаний ангармонического осциллятора. Построим его вначале прямым разложением.

4.3.1. Прямое разложение

Одним из широко используемых аналитических методов исследования нелинейных систем является метод теории возмущений. Он применяется к уравнениям, в которых нелинейные члены связаны с малым параметром. В выражении (4.38) правая часть является аналитической функцией ε и x , приближенное решение можно искать с помощью прямого разложения $x(t)$ по возрастающим степеням малого параметра ε , т. е. в виде ряда

$$x(t) = \sum_0^\infty \varepsilon^n x_n(t). \quad (4.39)$$

После подстановки (4.39) в нелинейное дифференциальное уравнение, группировки членов с одинаковыми степенями малого параметра, отбрасывания членов, содержащих параметр ε выше некоторой степени N и приравнивания нулю коэффициентов при каждой степени параметра мы получаем систему $N + 1$ уравнений. С помощью этого способа, называемого *прямым разложением*, можно дифференцированием и интегрированием последовательно определить члены $x_0, x_1, \dots, x_N$ ряда (4.39), если известно общее решение при $\varepsilon = 0$. При $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (4.38) записывается в виде

$$x_0 = a \cos(t + \beta) \quad (4.40)$$

с произвольными постоянными a, β . Разложение (4.38) типично для теории возмущений. Мы полагаем, что влияние малого слагаемого εx^3 (возмущения) вызывает изменение a, β со временем и появление других гармоник. Подставим (4.39) в (4.38) и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях ε :

$$(\ddot{x}_0(t) + x_0(t)) + \varepsilon(\ddot{x}_1(t) + x_1(t) + 3x_0(t)^3) + \dots = 0.$$

Полученное уравнение должно выполняться для всех значений ε . Так как степени ε^n при разных n независимы, то коэффициент при каждой степени n должен обращаться в нуль. В итоге в каждом порядке получаем дифференциальные уравнения для x_n :

$$\ddot{x}_n + x_n = G(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0). \quad (4.41)$$

Правые части $G(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$ этих уравнений зависят от x_m с номерами m , меньшими чем n . Поскольку однородное уравнение $\ddot{x}_n + x_n = 0$ имеет решение типа (4.40), то решение (4.41) не представляет особых затруднений.

Введем степени малости величин в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы обозначаем

$$f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)] \quad (4.42)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, если существует число A такое, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \rightarrow A, \quad 0 < |A| < \infty; \quad (4.43)$$

и

$$f(\varepsilon) = o[g(\varepsilon)], \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.44)$$

если

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \rightarrow 0.$$

Ряды (4.39), как правило, являются *асимптотическими рядами Пуанкаре*, для которых

$$x(t) = \sum_{m=0}^n \varepsilon^m x_m(t) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.45)$$

Иными словами, ошибка, связанная с ограничением ряда на члене n , не превосходит первого отброшенного члена (пропорционального ε^{n+1}). При любых фиксированных значениях n и t асимптотический ряд

$$x_n(t) = \sum_{m=0}^n \varepsilon^m x_m(t) \text{ расходится } |x(t) - x_n(t)| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Последовательные приближения по n вначале приближают $x_n(t)$ к $x(t)$, но после некоторого значения $n_0(\varepsilon)$ ошибка начинает возрастать. На практике ограничиваются вычислениями нескольких членов ряда.

Коэффициент при ε в (4.41) приводит к уравнению

$$\ddot{x}_1 = -x_1 - x_0^3 = -x_1 - \frac{a^3}{4} [3 \cos(t + \beta) + \cos(3t + \beta)], \quad (4.46)$$

которое удобно представить в матричном виде

$$\dot{y} = Ay + h, \quad (4.47)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0^3 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Тогда, записывая выражение (4.47) в виде

$$\frac{d}{dt}(\exp[-At]y) = \exp[-At]h,$$

мы сразу получаем его решение (с начальными условиями $y(t = t_0) = y_0$) в виде суммы

$$y = y_g + y_p \quad (4.49)$$

общего решения y_l однородного уравнения и частного решения y_p неоднородного

$$y_g = e^{A(t-t_0)}y_0, \quad y_p = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} h(s) ds. \quad (4.50)$$

Вычисление матрицы

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

значительно упрощается спектральным разложением матрицы A с собственными значениями λ_1, λ_2 по проекционным операторам P_1, P_2 :

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \quad P_1 = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad P_2 = -\frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (4.51)$$

где E – единичная матрица и

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0, \quad P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2.$$

Из этих соотношений сразу следует простая формула

$$e^{At} = e^{\lambda_1 t} P_1 + e^{\lambda_2 t} P_2, \quad (4.52)$$

с помощью которой решение (4.49) записывается в виде

$$x_1 = a \cos(t + \beta) - \frac{3a^3}{8} t \sin(t + \beta) + \frac{1}{32} a^3 \cos(3t + 3\beta). \quad (4.53)$$

Слагаемое, пропорциональное $\cos(t + \beta)$, которое называется *резонансным членом*, в правой части (4.46) является вынуждающей силой для колебаний осциллятора с переменной $x_1(t)$. Совпадение частоты свободных колебаний $x_1(t)$ с частотой вынуждающей силы приводит к резонансу, описываемому слагаемым, пропорциональным времени. В астрономической литературе такие члены называют *вековыми*, или *секулярными*. Разложение типа (4.39) называется *равномерно пригодным на определенном интервале времени*, если каждый член ряда является малой поправкой к предыдущему *при любом t* . В нашем

случае при $t > O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ поправка $\varepsilon x_1(t)$, которая предполагалась малой, становится больше $x_0(t)$ – главного члена разложения. Поэтому разложение (4.53) неравномерно по t и оно справедливо только на интервале $t \ll \frac{1}{\varepsilon}$. Существует несколько методов, позволяющих избавиться в теории возмущений от возникновения вековых членов. Рассмотрим вначале метод многих масштабов.

4.3.2. Метод многих масштабов

Метод многих масштабов столь популярен, что его заново открывают почти каждые полгода. Он применялся к широкому кругу задач физики, техники и прикладной математики.

А. Найфэ

Для выявления причины появления секулярных членов обратимся к точному решению уравнения (3.38). Оно имеет интеграл движения

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^4}{4} = E \quad (4.54)$$

с потенциальной энергией $U(x) = x^2 + \frac{\varepsilon x^4}{4}$. График $U(x)$ (рис. 4.7)

существенно зависит от знака ε . При $\varepsilon > 0$ нелинейные колебания существуют для любых значений энергии E , при $\varepsilon < 0$ – только

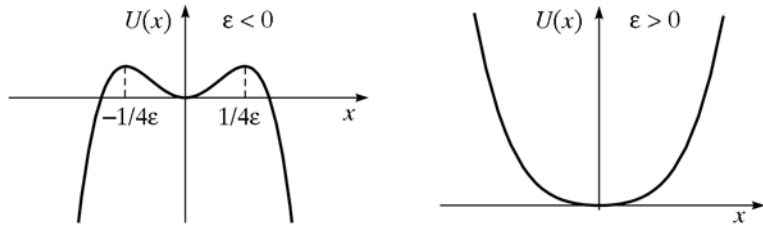


Рис. 4.7

при $E = \frac{1}{4\epsilon}$. Найдем точное решение (4.55). Значение энергии E удобно связать с амплитудой b нелинейных колебаний

$$E = \frac{b^2}{2} + \frac{\epsilon b^4}{4}, \quad (4.55)$$

так как в момент, когда скорость $\dot{x} = 0$, координата x совпадает с b . Тогда уравнение

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{\epsilon x^4}{4} = \frac{b^2}{2} + \frac{\epsilon b^4}{4} \quad (4.56)$$

после замены

$$x(t) = b \cos y(t_1), \quad t_1 = \sqrt{1 + \epsilon b^2} t \quad (4.57)$$

преобразуется к виду

$$1 - k^2 \sin^2 y(t_1) = \left(\frac{d}{dt_1} y(t_1) \right)^2, \quad (4.58)$$

где

$$k^2 = \frac{\epsilon b^2}{2(1 + \epsilon b^2)}. \quad (4.59)$$

Решением уравнения (4.58) согласно (4.19) является функция

$$y(t_1) = am(t_1, k),$$

следовательно, $x(t)$ выражается в эллиптических функциях Якоби

$$x(t) = b \operatorname{cn}(\sqrt{1 + \epsilon b^2} t, k). \quad (4.60)$$

При разложении $\operatorname{cn}(\sqrt{1 + \epsilon b^2} t, k)$ по степеням ϵ из формул (4.32)–(4.34) видно, что невозможно разделить функциональную зависимость x от t и ϵ , поскольку функция x будет не только раздельно зависеть от этих аргументов, но и от произведений ϵt , $\epsilon^2 t$, $\epsilon^3 t$:

$$x = x(t, \epsilon, \epsilon t, \epsilon^2 t, \epsilon^3 t, \dots). \quad (4.61)$$

Так, в наинизшем порядке по ϵ из (4.32)–(4.34), (4.59), (4.60) следует

$$x(t) = b \cos \left(\left(1 + \frac{3}{8} \epsilon b^2 \right) t \right) + O(\epsilon)$$

и влияние нелинейности приведет к изменению частоты колебаний.

Введем вспомогательные аргументы

$$T_0 = t, \quad T_n = \epsilon^n t \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (4.62)$$

которые представляют разные временные масштабы. Так, для

$\epsilon = \frac{1}{10}$ изменения в масштабе T_0 соответствуют периодам коле-

баний, T_1 – десяткам периодов, T_2 – сотням и т. д. В методе многих масштабов приближенное решение ищется в виде

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \quad (4.63)$$

где каждый член разложения рассматривается как *функция независимых переменных* $T_0, T_1, T_2, \dots$. Технические вычисления, связанные с уравнениями с частными производными, как мы увидим далее, не представляют особых затруднений. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right) \times \\ &\times (x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots), \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \left(\frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \right)^2 \times \\ \times (x_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots). \quad (4.65)$$

Тогда (4.38) принимает вид уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + x_0 + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + x_1 + x_0^3 \right) + O[\varepsilon^2] = 0. \quad (4.66)$$

В нулевом порядке по ε решение этого уравнения

$$x_0 = a(T_1, T_2, \dots) \cos(T_0 + \beta(T_1, T_2, \dots)) \quad (4.67)$$

определяется амплитудой $a(T_1, T_2, \dots)$ и фазой $\beta(T_1, T_2, \dots)$, которые не являются постоянными, а зависят от медленных переменных $T_1, T_2, \dots$. Их вид определяется далее путем исключения вековых членов. Подставляя (4.67) в (4.66) и приравнявая нулю первый порядок по ε , получаем

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + x_1 = 2 \frac{\partial a}{\partial T_1} \sin(T_0 + \beta) + 2a \left(\frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{8} a^2 \right) \cos(T_0 + \beta) - \\ - \frac{1}{4} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta). \quad (4.68)$$

Здесь мы использовали тригонометрическое тождество

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha).$$

Слагаемые в правой части уравнения (4.68), пропорциональные $\sin(T_0 + \beta)$ и $\cos(T_0 + \beta)$, приводят к секулярным членам в x_1 . Для того чтобы избежать их появления, в методе многих масштабов эти слагаемые приравниваются нулю

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3}{8} a^2 = 0. \quad (4.69)$$

При интегрировании (4.68) учитывается только частное решение неоднородного уравнения

$$x_1 = \frac{1}{32} a^3 \cos(3T_0 + 3\beta). \quad (4.70)$$

Уравнения (4.69) также элементарно интегрируются

$$a = a_0(T_2, \dots), \quad \beta = \frac{3}{8} T_1 a^2 + \beta_0(T_2, \dots).$$

Они содержат величины $a(T_2, \dots)$ и $\beta_0(T_2, \dots)$, зависящие от медленных переменных $T_2, T_3, \dots$, и их явный вид определяется порядками разложения (4.66). В итоге, возвращаясь к прежним независимым переменным, получаем

$$x = a_0 \cos \left(t + \frac{3}{8} \varepsilon t a_0^2 + \beta_0 \right) + \quad (4.71)$$

$$+ \frac{1}{32} \varepsilon a^3 \cos \left(3t + \frac{9}{8} \varepsilon t a^2 + 3\beta_0 \right) + O[\varepsilon^2 t]. \quad (4.71)$$

Эта формула совпадает с (4.53), если мы используем некорректное разложение

$$\cos \left(t + \frac{3}{8} \varepsilon t a_0^2 + \beta_0 \right) \approx \cos(t + \beta_0) - \frac{3}{8} \varepsilon t a_0^2 \sin(t + \beta_0).$$

При временах $0 < t < O[1/\varepsilon]$ величины $a_0(T_2, \dots)$ и $\beta_0(T_2, \dots)$ можно считать постоянными, в этом интервале формула

$$x = a_0 \cos \left(t - \frac{3}{8} \varepsilon t a_0^2 + \beta_0 \right) + O[\varepsilon] \quad (4.72)$$

дает приближенное аналитическое решение для колебаний ангармонического осциллятора с правильной зависимостью частоты от амплитуды колебаний. Из-за отсутствия вековых членов и малой поправки разложение (4.72) является равномерным.

4.3.3. Метод усреднения. Подход Ван дер Поля

Мы считаем более правильным (следуя также пути исторического развития) рассматривать всю проблему и применять те или иные приближения, руководствуясь главным образом физическими соображениями, и не обращать особого внимания на математическую строгость.

Б. Ван дер Поля

Можно сделать много возражений, но в механике нельзя требовать той же строгости, как в чистом анализе.

А. Пуанкаре

Метод усреднения был предложен голландским физиком Ван дер Полем – одним из пионеров физико-математического направления в теории нелинейных колебаний. Исследуя главным образом уравнения типа

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(\dot{x}, x), \quad (4.73)$$

он предложил метод «медленно меняющихся коэффициентов». С помощью этого метода были выяснены некоторые вопросы теории нелинейных колебаний и в первом приближении правильно описаны процессы самовозбуждения колебаний в уравнении (4.73). Несмотря на отсутствие строгости, отмеченной в эпиграфе к этому параграфу, методы, примененные **Ван дер Полем** и его коллегами, оказались чрезвычайно плодотворными и жизненными в начальный период развития нелинейной теории колебаний.

Изложим его метод на примере уравнения (4.38):

$$\ddot{x} = -x - \varepsilon x^3.$$

При $\varepsilon = 0$ его решение $x_0 = A \cos(t + \beta)$ и

$$x'_0 = -A \sin(t + \beta).$$

В методе усреднения вначале используется метод вариации произвольных постоянных. Предполагается, что при решении уравнения имеет вид

$$x = A(t) \cos(t + \beta(t)), \quad (4.74)$$

где величины $A(t)$, $\beta(t)$ являются функциями времени. Введение этих двух независимых функций вместо одной $x(t)$ требует наложения одного независимого условия. Удобно его выбрать в том же виде, что и для линейного уравнения

$$\dot{x} = -A(t) \sin(t + \beta(t)). \quad (4.75)$$

Дифференцируя (4.74) с учетом (4.75) мы получаем первое уравнение

$$\begin{aligned} -A(t) \sin(t + \beta(t))(1 + \dot{\beta}(t)) + \dot{A}(t) \cos(t + \beta(t)) = \\ = -A(t) \sin(t + \beta(t)) \end{aligned}$$

и после подстановки (4.74), (4.75) в (4.38) – второе:

$$\begin{aligned} -\dot{A}(t) \sin(t + \beta(t)) - A(t) \cos(t + \beta(t))(1 + \dot{\beta}(t)) = \\ = -A(t) \cos(t + \beta(t)) + \varepsilon (A(t) \cos(t + \beta(t)))^3. \end{aligned}$$

Балтазар Ван дер Поля (англ. Balthasar van der Pol, 27 января 1889 – 6 октября 1959) – голландский физик и математик. Родился в Утрехте. Окончил Утрехтский университет (1916 г.), затем занимался у Дж. Флеминга в Лондоне и у Дж. Томсона в Кавендишской лаборатории Кембриджского университета (1916–1919 гг.). В 1922–1949 гг. руководил исследованиями в электротехнической лаборатории в Эйндховене. Основные работы в математике и радиофизике относятся к теории колебаний, теории электрических цепей и распространению радиоволн. В 1920 г. вывел знаменитое уравнение (уравнение Ван дер Поля), описывающее автоколебания в ламповом генераторе. Для его решения предложил метод «медленно меняющихся коэффициентов» (метод Ван дер Поля), который сыграл важную роль в развитии теории нелинейных колебаний. Позднее Ван дер Поля распространил его на более общие случаи дифференциальных уравнений. В 1935 г. за выдающиеся заслуги в радиофизике награжден золотой медалью Института радиоинженеров (сейчас IEEE). Его именем назван астероид 10443.



Тогда исходное уравнение (4.38) заменяется двумя уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \varepsilon A^3 \sin \varphi \cos^3 \varphi, \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon A^2 \cos^4 \varphi\end{aligned}\quad (4.76)$$

для величин $A(t)$, $\varphi = t + \beta(t)$. В этих выражениях зависимость новых переменных от ε наиболее явно выражена: для малых ε функции $A(t)$, $\beta(t)$ меняются значительно медленнее ($\dot{A} \sim O(\varepsilon)$, $\dot{\beta} \sim O(\varepsilon)$), чем $\varphi(t)$. Переменные $A(t)$, $\beta(t)$ называют *медленными переменными*, $\varphi(t)$ – *быстрой переменной*. Процедура усреднения исключает быстрые переменные из уравнений возмущенного движения. Так как $|\sin \varphi \cos^3 \varphi| < 1$, то можно ожидать, что за время, равное периоду, амплитуда A изменится незначительно. Проинтегрируем обе части уравнений (4.76) по времени от t до $t + 2\pi$.

Так как $\frac{d}{dt} A(t)$, $\frac{d}{dt} \beta(t)$ порядка $O(\varepsilon)$, то их изменения в интервале $(t, t + 2\pi)$ будут также порядка $O(\varepsilon)$. Поэтому, если при интегрировании величины $A(t)$, $\beta(t)$ считать постоянными, то ошибка будет порядка $O(\varepsilon^2)$. При интегрировании правых частей возникают слагаемые типа $A(t + 2\pi) - A(t)$, которые в том же приближении можно заменить на $2\pi \frac{d}{dt} A(t)$. Поэтому, согласно принципу усреднения, в первом приближении правые части уравнений (4.76) можно заменить их усредненными значениями за период $T \in [0, \pi]$ или, в том же приближении, усредненными значениями по φ за период $[0, \pi]$. «Такие утверждения часто являются плодотворным источником математических теорем» [15. С. 253]. Тогда

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \varepsilon A^3 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi = 0, \\ \dot{\varphi} &= 1 + \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_0^\pi A^2 \cos^4 \varphi d\varphi = 1 + \varepsilon \frac{3}{8} A^2.\end{aligned}$$

В итоге в первом приближении

$$x = A \cos \varphi, \quad A = \text{const}, \quad \varphi = \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} A^2\right) t \quad (4.77)$$

и (4.77) совпадает с решением (4.72), полученным методом многих масштабов.

Хотя метод усреднения Ван дер Поля позволяет получить некоторые приближенные уравнения, он не содержит способов оценки полученных решений, пределов применимости и получения высших приближений.

4.3.4. Обобщенный метод усреднения. Подход Крылова и Боголюбова

В настоящем труде разработаны новые методы, которые позволяют изучать произвольные движения, возникающие в результате малого возмущения каких-либо движений или состояния равновесия, и эти методы названы здесь методами нелинейной механики ввиду того, что они были созданы специально для решения задач, относящихся к нелинейным колебаниям.

*Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов.
Приложение методов нелинейной механики
к теории стационарных колебаний*

Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов сумели посмотреть на весь предмет с совершенно новой точки зрения. Это позволило им разработать асимптотический метод, который в качестве первого слагаемого давал решение, которое можно было получить методом Ван дер Поля, носившим эвристический характер. Эти работы положили начало новому большому направлению в теории асимптотических методов. Оно глубоко проникло в различные области теоретической физики, в прикладную астрономию, динамику космических аппаратов и т. д.

*Н.Н. Моисеев. Асимптотические
методы нелинейной механики*

Обобщенный метод усреднения предложен **Н.М. Крыловым** и **Н.Н. Боголюбовым** и развит в различных вариантах многими исследователями. Основная его идея состоит в *замене переменных, позволяющей с заданной точностью исключить быстрые переменные из уравнений возмущенного движения* и разделить в итоге эволюцию быстрых и медленных переменных.

Для этого общее решение уравнения (4.38) ищем в виде асимптотического разложения

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon x_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 x_2(a, \varphi) \dots + \varepsilon^m x_m(a, \varphi) \dots; \quad (4.78)$$

где $\varphi = t + \beta(t)$ и величины $x_m(a, \varphi)$ являются периодическими функциями φ с периодом 2π . Динамика a, φ задается дифференциальными уравнениями

$$\dot{a} = H(a, \varepsilon) = \varepsilon H_1(a) + \varepsilon^2 H_2(a) + \dots \varepsilon^{m-1} H_{m-1} + \dots; \quad (4.79)$$

$$\dot{\varphi} = G(a, \varepsilon) = 1 + \varepsilon G_1(a) + \varepsilon^2 G_2(a) + \dots \varepsilon^{m-1} G_{m-1}(a) + \dots, \quad (4.80)$$

правая часть которых не содержит быстрых переменных. Функции $H(a, \varepsilon)$, $G(a, \varepsilon)$, как и коэффициенты их разложения, заранее неизвестны, их явный вид определяется в результате решения задачи. Для однозначности их определения принимаются дополнительные условия

$$\int_0^{2\pi} x_m(a, \varphi) \cos \varphi = \int_0^{2\pi} x_m(a, \varphi) \sin \varphi = 0 \quad (m=1, 2, \dots), \quad (4.81)$$



Николай Митрофанович Крылов (16 (29) ноября 1879, Петербург, Российская империя – 11 мая 1955, Москва, СССР) – русский советский математик, академик Академии наук СССР (с 1929 г.). Основные труды относятся к интерполяции, приближенному интегрированию дифференциальных уравнений математической физики, нелинейной механике. С 1932 г. Н.М. Крылов совместно с академиком Н.Н. Боголюбовым большое количество времени научной деятельности посвящал проблемам теории нелинейных колебательных процессов, где им удалось заложить основы нелинейной механики

согласно которым функции $x_m(a, \varphi)$ ($m = 1, 2, \dots$) не содержат слагаемых, пропорциональных $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$. Такое требование приводит к отсутствию вековых членов в разложении (4.78). После подстановки (4.78)–(4.80) в уравнение (4.38) и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях ε вплоть до уравнений порядка ε^{m+1} мы получаем систему m -уравнений, определяющих приближенное решение для $x_m(a, \varphi)$. Оно отличается от точного на величину порядка $\varepsilon^{m+1}t$. Наложение дополнительных условий (4.81) определяет коэффициенты $H_1, H_2, \dots, H_{m-1}$ и $G_1, G_2, \dots, G_{m-1}$. В итоге автономная система (4.79) интегрируется простыми математическими приемами и эволюция быстрой переменной φ определяется непосредственным интегрированием уравнений (4.80). Полученное формальное разложение на n шаге может быть использовано как расчетная формула и как замена переменных, которая приводит точное уравнение к приближенному, удобному для дальнейших теоретических исследований.

Так, в первом порядке по ε мы получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial^2 \varphi} + x_1 - 2H_1(a) \sin \varphi + 1/4 a^3 \cos 3\varphi + \frac{a}{4} (3a^2 - 8G_1(a)) \cos \varphi = 0. \quad (4.82)$$

Николай Николаевич Боголюбов (8 (21) августа 1909, Нижний Новгород – 13 февраля 1992, Москва) – выдающийся советский математик и физик-теоретик, академик РАН (1991 г.), академик АН СССР (1953 г.) и АН УССР (1948 г.), основатель научных школ по нелинейной механике и теоретической физике, с 1951 г. директор лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) в Дубне, с 1965 по 1988 г. – директор ОИЯИ. Автор многих фундаментальных работ в теоретической физике и математике. Основные работы по математике посвящены асимптотическим методам нелинейной механики, вариационному исчислению, приближенным методам математического анализа, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики, теории устойчивости, теории динамических систем и другим областям. В теоретической физике его работы внесли большой вклад в статистическую механику неидеальных классических систем и квантовую статистику, теорию сверхпроводимости, квантовую теорию поля, физику сильных взаимодействий



Дополнительные условия (4.81) определяют вид $G_1(a)$ и $H_1(a)$:

$$G_1(a) = 3a^2/8, \quad H_1(a) = 0, \quad (4.83)$$

явные выражения для которых приводят к отсутствию вековых членов.

При выборе a в качестве первой гармоники необходимо отбросить общее решение однородного уравнения (4.82). В итоге полученное в наинизших порядках решение

$$x = a \cos \varphi + \varepsilon \frac{a^3}{32} \cos 3\varphi, \quad a = \text{const}, \quad \varphi = \left(1 + \varepsilon \frac{3}{8} a^2\right) t \quad (4.84)$$

полностью совпадает с (4.71).

4.4. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Естественные и технические науки часто ставят перед математикой вопросы, на которые математика неспособна дать точные ответы. Другие же задачи, хотя уже и решенные точно, дают настолько сложные алгоритмы, что не могут быть применены на практике. Нахождение простейшего и в то же время достаточно точного метода приближенного решения вместе с оценкой степени точности приближения нередко требуют исключительного таланта и глубоких знаний. В этом смысле и нужно, очевидно, воспринимать слова великого русского математика П.Л. Чебышева (приведенные как-то французским геометром Г. Дарбу) о том, что приближенное решение лучше точного.

Н. М. Крылов

Характерной чертой вынужденных колебаний является наличие внешних возмущений. Возмущающие силы $F(t)$ чаще всего аппроксимируются ступенчатыми, импульсными или гармоническими функциями. Уравнение движения ангармонического осциллятора при наличии затухания и внешней силы с амплитудой F и частотой α имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx + bx^3 - \alpha\dot{x} + F \cos \delta t. \quad (4.85)$$

Введем безразмерные переменные $u(\omega_0 t)$, μ, f соотношениями

$$x(t) = Uu(\omega_0 t), \quad b = -\frac{m\varepsilon\omega_0^2}{U^2}, \quad \alpha = 2\varepsilon\mu m\omega_0, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (4.86)$$

$$F = fmU\omega_0^2, \quad \delta = \omega\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Тогда после замены $\omega_0 t \rightarrow t$ запишем искомое уравнение в удобном виде

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 + 2\varepsilon\mu\dot{u} - f \cos \omega t = 0, \quad (4.87)$$

где частота ω представляет собой отношение частоты внешней силы δ к частоте ω_0 колебаний линейной системы.

В нелинейных недиссипативных системах возможны вынужденные гармонические колебания с определенными частотами и амплитудой, зависящей от внешней силы. Так, при $\mu = 0$ и произвольных значениях ε уравнение (4.87) допускает точное решение

$$u = A \cos[\omega/3t],$$

где амплитуда и частота определяются внешней силой

$$A = \sqrt[3]{\frac{4f}{\varepsilon}}, \quad \omega = \frac{3}{2} \sqrt{4 + 3A^2\varepsilon}.$$

При наличии возмущающих сил и затухании величина

$$E(t) = \frac{\dot{u}^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{\varepsilon u^4}{4}$$

не является интегралом движения и

$$\frac{d}{dt} E(t) = \dot{u}(-2\varepsilon\mu\dot{u} + f \cos \omega t)$$

согласно уравнениям движения. При $\varepsilon > 0$ функция $E(t)$ положительна и в отсутствие внешних сил уменьшается с течением времени до стационарного значения $u(t) = 0$ при любых начальных условиях.

Аналитическое решение уравнения (4.87) с произвольными значениями параметров к настоящему времени крайне затруднено. Далее показано, что незатухающие колебания могут сущест-

воват при малой нелинейности системы, малом затухании и определенных соотношениях между параметрами колебаний и внешней силы.

4.4.1. Прямое разложение

Найдем приближенное аналитическое решение уравнения (4.87) с точностью до первого порядка параметра ε . С этой целью исследуем вначале прямое разложение

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (4.88)$$

Подстановка его в (4.87) дает в двух наинизших порядках уравнения

$$\ddot{u}_0 + u_0 = f \cos \omega t; \quad (4.89)$$

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -2\mu \dot{u}_0 - u_0^3. \quad (4.90)$$

Решение уравнения (4.89) имеет вид

$$u_0 = a \cos(t + \beta) + \frac{f}{1 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4.91)$$

с постоянными α и β . Далее из (4.90) следует уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + u_1 = & b_1 e^{it} + b_2 e^{i3t} + b_3 e^{i\omega t} + b_4 e^{i3\omega t} + b_5 e^{i(\omega+2)t} + \\ & + b_6 e^{i(\omega-2)t} + b_7 e^{i(2\omega-1)t} + b_8 e^{i(2\omega+1)t} + (\text{к.с.}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

с определенными величинами b_α ($\alpha = 1, \dots, 8$), к.с. означает комплексное сопряжение слагаемых в правой части. Частное решение неоднородного уравнения (4.92) представляется суммой частных решений, соответствующих каждому слагаемому правой части этого уравнения. Поскольку частное решение выражения

$$\ddot{u} + u = e^{i\sigma t}$$

записывается в виде

$$u = \frac{1}{1 - \sigma^2} e^{i\sigma t},$$

то частное решение уравнения (4.92) содержит вековые слагаемые, пропорциональные t , и гармонические колебания с частото-

тами $\sigma = \omega \pm 2, 2\omega \pm 1, 3\omega$, которые называются *комбинационными*. Амплитуда комбинационных колебаний обратно пропорциональна $\sigma^2 - 1$. В последующих порядках теории возмущений появятся комбинационные колебания с частотами $m\omega + n$, где m и n – целые числа. Когда одна из комбинационных частот близка к частоте собственных колебаний

$$m\omega + n \approx \pm 1,$$

соответствующая гармоника из-за наличия малых знаменателей может оказать существенное влияние на амплитуду колебаний. Ясно, что такие резонансные явления возникают при частотах

$$\omega = \frac{p}{q},$$

где p и q – целые числа. Резонанс с $\omega \approx \pm 1$, который появляется в первом члене разложения (4.88), называют *первичным*. Резонансы при

$$\omega \approx 0, \omega \approx \pm 3, \omega \approx \pm \frac{1}{3}, \quad (4.93)$$

образующиеся во втором члене разложения (4.88), называют *вторичными*.

4.4.2. Вторичный резонанс $\omega \approx \pm 3$

На примере вторичного резонанса $\omega \approx \pm 3$ построим методом многих масштабов в первом порядке равномерное разложение для приближенного осциллирующего решения уравнения (4.87), не содержащее вековых членов и малых знаменателей. Введем параметр расстройки $\sigma \in O[1]$:

$$\omega = 3 + \sigma \varepsilon \quad (4.94)$$

и будем искать приближенное решение уравнения (4.87) в виде

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (4.95)$$

где введены переменные $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ и опущена в u_0 , u_1 зависимость от медленных переменных T_n ($n \geq 2$). После подстановки

(4.95) в (4.87) и приравнивания коэффициентов при одинаковых значениях ε получаем

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 - f \cos(T_0 \omega) = 0; \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - u_0^3 - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial T_0}. \quad (4.97)$$

Поскольку общее решение уравнения (4.96) представимо в виде

$$u_0 = A(T_1) \cos(t + \beta(T_1)) + B \cos \omega t, \quad B = \frac{f}{(1 - \omega^2)}, \quad (4.98)$$

то в правой части (4.97) появляются слагаемые той же структуры, что и в (4.92). Однако соотношение (4.94) преобразует функцию $e^{i\omega(-2)t}$, которая порождала малые знаменатели для u_1 уравнения (4.92), в функцию $e^{i(1-\sigma\varepsilon)t} = e^{i(T_0 - \sigma T_1)}$, порождающую вековые члены в уравнении (4.97). В итоге требование отсутствия в правой части выражения (4.97) слагаемых, которые пропорциональны $\cos t$, $\sin t$ и приводят к вековым членам для u_1 , дает систему двух уравнений для $A(T_1)$ и фазы $\Phi(T_1) = T_1 \sigma - 3\beta(T_1)$:

$$\dot{A}(T_1) = \frac{1}{8}(-8\mu A(T_1) - 3A(T_1)^2 B \sin[\Phi(T_1)]),$$

$$\dot{\Phi}(T_1) = -\frac{9B^2}{4} + \sigma - \frac{9A(T_1)^2}{8} - \frac{9}{8}BA(T_1) \cos[\Phi(T_1)].$$

Отметим, что в отличие от свободных колебаний ангармонического осциллятора эволюция амплитуды существенно зависит от поведения фазы $\Phi(T)$. Численным интегрированием можно показать, что решение этих уравнений стремится к стационарным значениям

$$A(T_1) \rightarrow A, \quad \Phi(T_1) \rightarrow \Phi_0,$$

которые удовлетворяют выражениям

$$-8\mu A - 3A^2 B \sin[\Phi_0] = 0, \quad (4.99)$$

$$-\frac{9B^2}{4} + \sigma - \frac{9A^2}{8} - \frac{9}{8}BA \cos[\Phi_0] = 0. \quad (4.100)$$

Исключение Φ_0 из этих формул приводит к тривиальному случаю $A = 0$, или биквадратному уравнению

$$A^4 + \left(3B^2 - \frac{16}{9}\sigma\right)A^2 + \frac{4}{81}\left[144\mu^2 + (9B^2 - 4\sigma)^2\right] = 0, \quad (4.101)$$

представляющему *амплитудно-частотную характеристику* $A(\sigma)$. Несложный анализ показывает, что действительные решения

$$A^2 = \frac{1}{18} \left(27B^2 - 16\sigma \pm 3\sqrt{-63B^4 + 32B^2\sigma - 256\mu^2}\right) \quad (4.102)$$

этого уравнения существуют при условии

$$-63B^4 + 32B^2\sigma - 256\mu^2 \geq 0, \quad (4.103)$$

$$\sigma > \frac{27}{16}B^2.$$

Следовательно, в интервале

$$\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 63\mu^2} \leq \frac{63}{16} \frac{f^2}{(1 - \omega^2)^2} \leq \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 63\mu^2} \quad (4.104)$$

для амплитуды f вынуждающей силы даже при наличии трения в системе существуют незатухающие колебания.

В итоге в первом приближении решение дается формулой

$$\begin{aligned} u &= A \cos(t + \beta(T_1)) + B \cos \omega t = \\ &= A \cos\left(t + \frac{\varepsilon T \sigma}{3} - \frac{\Phi_0}{3}\right) + B \cos \omega t = A \cos\left(\frac{\omega t}{3} - \frac{\Phi_0}{3}\right) + \frac{f}{1 - \omega^2} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.105)$$

На рис. 4.8 изображены результаты численного интегрирования уравнения (4.87) с параметрами $f = -8$, $\varepsilon = 0,02$, $\sigma = 3$, $\mu = 1/3$, удовлетворяющие условию (4.104) и начальным данным

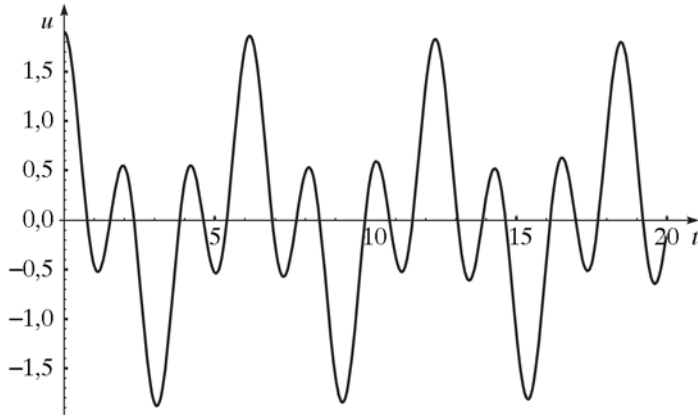


Рис. 4.8

$u(0) = 1,9$, $\dot{u}(0) = 0$. Ясно видно наличие незатухающих колебаний, которые есть суперпозиция двух гармонических колебаний с частотами ω и 3ω .

4.4.3. Первичный резонанс. Амплитудно-частотная характеристика

Найдем равномерное пригодное разложение в случае первичного резонанса для малой амплитуды ϵf внешней силы. После подстановки

$$u = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (4.106)$$

в уравнение

$$\ddot{u} + u + \epsilon u^3 + 2\epsilon \dot{u} - \epsilon f \cos \omega t = 0 \quad (4.107)$$

в первом порядке получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0; \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - u_0^3 - 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial T_0} + f \cos(T_0 \omega). \quad (4.109)$$

Решение в нулевом порядке

$$u_0 = a(T_1) \cos(t + \beta(T_1)) \quad (4.110)$$

дает в правой части (4.109) резонансные слагаемые, порождающие вековые члены в u_1 . Кроме того, слагаемое $f \cos(T_0 \omega) = f \cos(T_0 + T_1 \sigma) = f(\cos(T_0) \cos(T_1 \sigma) - \sin(T_0) \sin(T_1 \sigma))$ при частоте

$$\omega = 1 + \sigma \epsilon \quad (4.111)$$

дает дополнительные члены к резонансным слагаемым в правой части (4.109). В решении для $u_1(T_1)$ будут отсутствовать вековые слагаемые, пропорциональные t , если коэффициенты перед $\cos t$, $\sin t$ в правой части (4.109) приравнять нулю. Тогда мы получим замкнутую систему уравнений для определения $a(T_1)$ и $\gamma(T_1) = T_1 \sigma - \beta(T_1)$:

$$\dot{a}(T_1) = -\mu a(T_1) + f_2 \sin \gamma(T_1), \quad (4.112)$$

$$a(T_1) \dot{\gamma}(T_1) = \sigma a(T_1) - \frac{3}{8} a(T_1)^3 + \frac{1}{2} f \cos \gamma(T_1).$$

Численным интегрированием можно показать, что решение уравнений (4.112), как и в случае вторичных резонансов, стремится к стационарным значениям $a(T_1) \rightarrow a$, $\gamma(T_1) \rightarrow \gamma$, которые удовлетворяют уравнениям

$$-\mu a + \frac{f}{2} \sin \gamma = 0, \quad (4.113)$$

$$\sigma a - \frac{3}{8} a^3 + \frac{1}{2} f \sin \gamma = 0;$$

$$\gamma = T_1 \sigma - \beta(T_1). \quad (4.114)$$

Согласно (4.111), стационарным значениям a , γ соответствуют в главном приближении колебания

$$u = a \cos(t + \beta(T_1)) = a \cos(t + T_1 \sigma - \gamma) = a \cos(\omega t - \gamma). \quad (4.115)$$

Напомним, что $\omega = \frac{\delta}{\omega_0}$ и для перехода от безразмерного времени к реальному необходимо произвести замену $t \rightarrow \omega_0 t$. Поэтому в рассматриваемом нами приближении осциллятор совершает вынужденные колебания с частотой δ внешней силы и

постоянной амплитудой, зависящей от расстройки. Исследуем эту зависимость. Исключение γ из (4.113) приводит к кубическому уравнению относительно a^2

$$4\mu^2 a^2 + a^2(8\sigma - 3a^2)/16 = f^2, \quad (4.116)$$

которое определяет функцию $a(\sigma)$ – амплитудно-частотную характеристику системы.

Обсудим устойчивость стационарных состояний. Обозначим

$$P(a(T_1), \gamma(T_1)) = -\mu a(T_1) + \frac{f}{2} \sin \gamma(T_1), \quad (4.117)$$

$$Q(a(T_1), \gamma(T_1)) = \sigma - \frac{3}{9} a(T_1)^2 + \frac{f}{2a(T_1)} \cos \gamma(T_1)$$

и запишем систему (4.112) в компактном виде

$$\dot{a}(T_1) = P(a(T_1), \gamma(T_1)),$$

$$\dot{\gamma}(T_1) = Q(a(T_1), \gamma(T_1)).$$

Для определения устойчивости стационарных состояний рассмотрим эволюцию функций

$$a(T_1) = a + sA(T_1), \gamma(T_1) = \gamma + s\Gamma(T_1) \quad (s \ll 1), \quad (4.118)$$

мало отличающихся от равновесных (4.113). Тогда для функций $A(T_1)$, $\Gamma(T_1)$ мы получаем линейные дифференциальные уравнения

$$\dot{A}(T_1) = \frac{\partial}{\partial a} P(a, \gamma) A(T_1) + \frac{\partial}{\partial \gamma} P(a, \gamma) \Gamma(T_1) + O(s), \quad (4.119)$$

$$\dot{\Gamma}(T_1) = \frac{\partial}{\partial a} Q(a, \gamma) A(T_1) + \frac{\partial}{\partial \gamma} Q(a, \gamma) \Gamma(T_1) + O(s).$$

Их решения пропорциональны $e^{\lambda t}$, где параметр λ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - \lambda Tr + \Delta = 0, \quad (4.120)$$

где

$$Tr = \frac{\partial}{\partial a} P(a, \gamma) + \frac{\partial}{\partial \gamma} Q(a, \gamma), \quad (4.121)$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial a} P(a, \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} Q(a, \gamma) - \frac{\partial}{\partial a} Q(a, \gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma} P(a, \gamma).$$

Поскольку согласно (4.113), (4.117)

$$Tr = -2\mu; \quad (4.122)$$

$$\Delta = 27a^4 - 96a^2\sigma + 64(\mu^2 + \sigma^2), \quad (4.123)$$

то в области значений a , σ , когда $\Delta < 0$, один из характеристических показателей $\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(Tr + \sqrt{Tr^2 - 4\Delta} \right)$ положителен и состоя-

ния равновесия неустойчивы. При $\Delta > 0$ состояния равновесия устойчивы, корни уравнения комплексно сопряжены и их действительная часть отрицательна.

Уравнение (4.116) на плоскости (σ, a^2) определяет резонансную кривую. Поскольку оно имеет один или три корня, то функция $a(\sigma)$ в определенной области значений параметра расстройки σ является многозначной и резонансные кривые имеют более разнообразный, чем в линейном случае, характер. Рассмотрим поведение $a(\sigma)$ при фиксированном значении f . Дифференцируя уравнение (4.116), находим уравнение касательной

$$\frac{da}{d\sigma} = \frac{8a(-8\sigma + 3a^2)}{\Lambda} \quad (4.124)$$

к резонансной кривой. Построим в плоскости (σ, a^2) кривую $\Lambda = 0$ (рис. 4.9), которая не пересекает прямую

$$\sigma = \frac{3a^2}{8}. \quad (4.125)$$

Внутри заштрихованной области величина $\Lambda < 0$, вне ее $\Lambda > 0$. Если кривая $a(\sigma)$ не входит в область $\Lambda < 0$, то ее производная

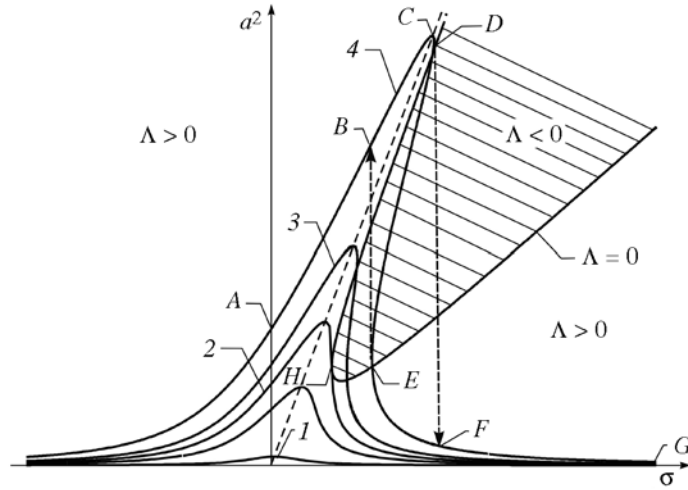


Рис. 4.9

положительна до прямой $\sigma = \frac{3a^2}{8}$ и отрицательна при дальнейшем увеличении σ (кривые 1, 2 на рис. 4.9). Как следует из (4.124), резонансная кривая пересекает кривую $\Lambda = 0$, имея вертикальную касательную ($\frac{da}{d\sigma} = \infty$), и наибольшая ордината точки H , при которой еще происходят соприкосновения этих кривых, равна $a^2 = \frac{8\mu}{3}$. Поскольку точка H лежит на кривой $\Lambda = 0$, то ее координаты равны

$$\sigma = \frac{3a^2}{8}, \quad a^2 = \frac{8\mu}{3}. \quad (4.126)$$

На амплитудно-частотной характеристике это соответствует критической амплитуде

$$f_k = \frac{8\mu^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}. \quad (4.127)$$

внешней силы. При малых значениях f , σ амплитуда a мала и можно пренебречь членом $3a^2$ в левой части (4.116). Тогда мы получаем зависимость

$$a^2 = \frac{f^2}{4(\sigma^2 + \mu^2)} \quad (4.128)$$

амплитуды от частоты колебаний с максимумом в точке $\sigma = 0$ (кривая 1 на рис. 4.9), характерную для линейных вынужденных колебаний (3.48). При $f < f_k$ уравнение (4.116) имеет один корень, и при увеличении f кривая $a(\sigma)$ деформируется в сторону больших значений σ . При $f > f_k$ выражение (4.116) имеет три корня и резко меняется характер вынужденных колебаний осциллятора.

При увеличении σ от $-\infty$ функция $\frac{da}{d\sigma}$ положительна вплоть до прямой $\sigma = \frac{3a^2}{8}$, на которой она равна нулю. Далее a^2 уменьшается до кривой $\Lambda = 0$, где резонансная кривая имеет вертикальную касательную. В области $\Lambda < 0$ функция $\frac{da}{d\sigma}$ снова имеет положительные значения до кривой $\Lambda = 0$. При дальнейшем увеличении σ амплитуда падает до нуля. Максимальное значение амплитуды $a_{\max}$ расположено в точке пересечения прямой (4.125) с резонансной кривой и равно

$$a_{\max} = \frac{f}{2\mu} \quad (4.129)$$

$$\text{при } \sigma = \frac{3f^2}{32\mu^2}.$$

На рис. 4.9 показано расположение резонансных кривых в плоскости (σ, a^2) для разных f . По мере увеличения f ($f > f_k$) нелинейность также вызывает изгиб пиков резонансных кривых вправо. Следствием этого является существование областей частот, где фиксированному значению σ соответствуют два или три значения амплитуды a (кривые 3, 4 на рис. 4.9). На ветви DE кривой 4 величина $\Lambda < 0$, и, согласно анализу, проведенному выше, колебания с соответствующими амплитудами неустойчивы. Это приводит к новому нелинейному явлению – скачку стационарной амплитуды при медленном прохождении нижней нависаю-

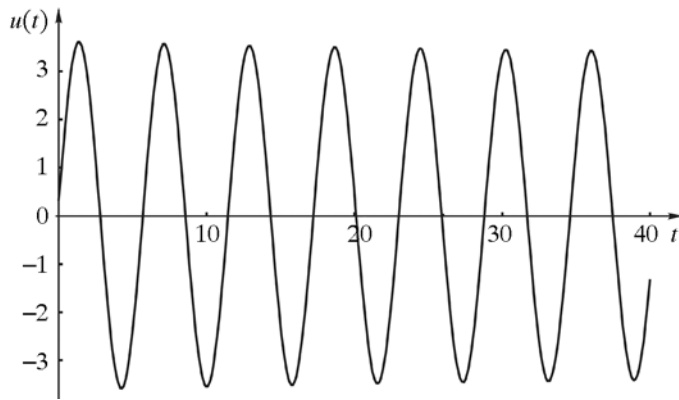


Рис. 4.10

щей части резонансной кривой. Если увеличивать частоту от нуля на резонансной кривой 4, то амплитуда стационарного колебания будет возрастать, следуя кривой AC . При дальнейшем увеличении частоты амплитуда уменьшается до точки D . Далее она скачком меняет значение от D до F , минуя нестабильную кривую DE . Подобное явление наблюдается также при уменьшении частоты, когда амплитуда увеличивается по кривой CE . Затем следует скачок из точки E в точку B на верхнюю ветвь резонансной кривой. Отметим, что скачки происходят только для стационарной амплитуды. Истинная амплитуда в реальных системах нестационарна во время перехода. При скачке возбуждаются и собственные колебания, после затухания которых устанавливается новая стационарная амплитуда. Явление срыва наблюдаются также при фиксированной частоте δ и медленно меняющейся амплитуде f .

Явление срыва амплитуды колебаний проиллюстрировано численными расчетами уравнения на рис. 4.10, 4.11. Максимальное значение амплитуды на кривой 4 (см. рис. 4.9) при $f = 7$ соответствует значению $\sigma = 4,593$. На рис. 4.10 видно, что при начальных данных $u(0) = 0,3$, $u'(0) = 3,83$ и значениях параметров $f = 7$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 0,02$, $\sigma = 4,593$ в системе устанавливаются вынужденные колебания с периодом вынуждающей силы.

Вычисленная по формуле (4.116) амплитуда a равна 3,5, что находится в хорошем согласии с численными данными.

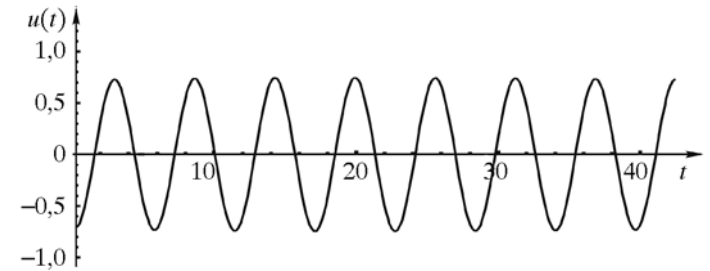


Рис. 4.11

Численные расчеты уравнений (4.107), (4.111) с немного измененными начальными данными $u(0) = -0,7$, $u'(0) = 0,2$ и $f = 7$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 0,02$, $\sigma = 4,65$ (см. рис. 4.11) указывают на срыв амплитуды колебаний при увеличении расстройки.

4.5. АВТОКОЛЕБАНИЯ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

Из всех услуг, которые могут быть оказаны науке, введение новых идей – самая важная.

Дж.Дж. Томсон

Рассмотрим движения системы под действием консервативной $F(x)$ и произвольной диссипативной силы $G(\dot{x})$:

$$\ddot{x} = F(x) + G(\dot{x}). \quad (4.130)$$

Умножим это уравнение на $\dot{x}$ и представим его в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) \right) = G(\dot{x})\dot{x}.$$

Так как направление диссипативных сил всегда противоположно скорости, то

$$G(\dot{x})\dot{x} < 0$$

и полная энергия системы $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x)$ всегда убывает. Если потенциальная энергия ограничена снизу $U(x) \neq -\infty$, то система

стремится к состоянию равновесия $\dot{x}(t \rightarrow \infty) = 0$, $F(x(t \rightarrow \infty)) = 0$ и в ней невозможны любые периодические движения. Фазовый портрет таких систем подобен рис. 3.6. Изображающая точка движется в направлении, указанном стрелкой к точке равновесия – устойчивому фокусу.

Пусть на систему дополнительно действует некоторая активная сила $H(\dot{x}, x)$, которая за каждый период колебаний вносит определенную порцию энергии ΔE , и пусть величина ΔE тем больше, чем меньше амплитуда. Тогда вблизи равновесия, где энергия диссипации меньше ΔE , амплитуда колебаний будет увеличиваться. Если в начальный момент амплитуда большая, то колебания затухают, поскольку величина ΔE меньше количества энергии, рассеиваемой системой. Поэтому в таких системах может установиться режим периодических колебаний с постоянной амплитудой, когда величина ΔE равна энергии диссипации за один период. «Системы, обладающие свойством генерировать такие колебания, **А.А. Андронов** полвека назад назвал *автоколебательными*, впервые придав им четкое математическое содержание, связав автоколебания с предельными циклами Пуанкаре» [18. С. 222].

В отличие от вынужденных колебаний они не обусловлены действием внешней периодической силы. Автоколебания возникают от непериодических источников энергии внутренних взаимодействий в системе, поступление и расход которых с помощью обратной связи регулируются самой системой. Про-



Александр Александрович Андронов (11 апреля 1901, Москва – 31 октября 1952, Горький) – выдающийся советский ученый-физик (электротехника, радиофизика и прикладная механика), академик АН СССР, основоположник теории нелинейных колебаний, математическое определение автоколебаний, разработал их теорию, связав ее с качественной теорией дифференциальных уравнений, топологией и общей теорией устойчивости движения. Заложил фундамент теории нелинейных колебаний, разработал метод точечных отображений

стейшим примером автоколебательной системы являются часы, где напряженная пружина (или батарея) – источник энергии, колеблющейся системой служит балансир, а обратная связь осуществляется спусковым регулятором. *Автоколебательному режиму* на фазовой плоскости отвечает изолированная замкнутая кривая – *предельный цикл*. Это понятие было впервые введено **А. Пуанкаре**.

Предельный цикл является замкнутой интегральной кривой (например окружность на рис. 4.12), которая разделяет всю фазовую плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. В каждой из областей все фазовые траектории с течением времени стремятся к предельному циклу и в его окрестности состоят из спиралей, наматывающихся на цикл (см. рис. 4.12). *Вследствие этого амплитуда и частота автоколебаний не зависят от начальных условий, а определяются только параметрами системы.*

Чтобы получить представление о типичных методах решения уравнений движения автоколебательных систем с малым параметром, рассмотрим в качестве примера уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} + (bx^2 - \epsilon)\dot{x} + x = 0, \quad \epsilon > 0, \quad b > 0.$$

После замены $x(t) \rightarrow cx(t)$, $b \rightarrow \epsilon/c^2$ оно записывается в виде

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (4.131)$$

Жюль Анри Пуанкаре (фр. Jules Henri Poincaré; 29 апреля 1854 – 17 июля 1912) – выдающийся французский математик, физик, философ и теоретик науки; глава Парижской академии наук (с 1906) и Французской академии (с 1908). Пуанкаре называют одним из величайших математиков всех времен, а также последним математиком-универсалом, человеком, способным охватить все математические результаты своего времени



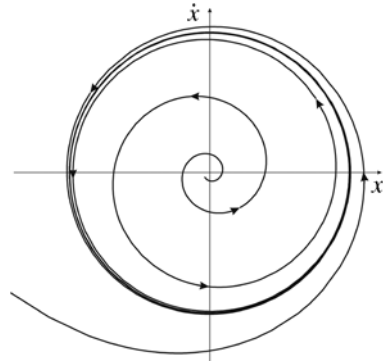


Рис. 4.12

Изменение полной энергии такой системы равно

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) = \varepsilon (1 - x^2) \dot{x}. \quad (4.132)$$

Нетрудно качественно проанализировать уравнение Ван дер Поля. Для малых колебаний $x^2 < 1$ коэффициент при $\dot{x}$ в уравнении (4.131), описывающий трение, отрицателен. Это порождает «накачку» энергии в систему при малых x и приводит к росту амплитуды колебаний. Если x^2 стано-

вится больше единицы, то трение становится положительным и уменьшает амплитуду колебаний. В результате двух противоположных влияний раскачка колебаний будет постепенно замедляться, а движение неограниченно приближаться к режиму колебаний с постоянными амплитудами. Такому режиму возникновения автоколебаний соответствует фазовый портрет на рис. 4.12. Он не требует начального толчка и называется *режимом мягкого возбуждения*. В системах с *жестким возбуждением* автоколебания самопроизвольно нарастают только с некоторой начальной амплитуды.

4.5.1. Аналитическое решение уравнения Ван дер Поля при малых значениях параметра нелинейности

Приближенное аналитическое решение этого уравнения возможно найти только при малых или больших значениях параметра ε . При $\varepsilon = 0$ колебания $x = a \cos(t + \beta)$ будут происходить с постоянной амплитудой a и фазой β . Мы ожидаем, что при $\varepsilon \ll 1$ нелинейное слагаемое приведет к зависимости амплитуды и фазы от времени, изменению частоты колебаний и появлению высших гармоник. Применим обобщенный метод усреднения (см. параграф 4.3.4) и будем искать общее решение в виде разложения:

$$x = a(t) \cos(t + \beta(t)) + \varepsilon x_1(a(t), t + \beta(t)) + \varepsilon^2 x_2(a(t), t + \beta(t)) + \dots, \quad (4.133)$$

где $a(t)$ и $\varphi = t + \beta(t)$ подчиняются системе уравнений

$$a' = \varepsilon h_1(a) + \varepsilon^2 h_2(a), \quad (4.134)$$

$$\varphi' = 1 + \varepsilon g_1(a) + \varepsilon^2 g_2(a).$$

Подставляя разложения (4.133), (4.134) в (4.132) и приравнивая коэффициенты при ε в первой степени, получаем

$$(-2a) \cos \varphi g_1 + \frac{1}{4} (4a - a^3 - 8h_1) \sin \varphi - \frac{1}{4} a^3 \sin 3\varphi + x_1 + x_{1,\varphi\varphi} = 0. \quad (4.135)$$

Из условий (4.81) сразу следует

$$g_1 = 0, \quad h_1 = \frac{1}{8} (4a - a^3),$$

следовательно, решение уравнения (4.135) записывается в виде

$$x_1 = -\frac{1}{32} a^3 \sin 3\varphi. \quad (4.136)$$

Аналогичным способом находим

$$h_2(a) = 0, \quad g_2(a) = \frac{1}{256} (-32 + 32a^2 - 7a^4).$$

Тогда во втором приближении a и φ изменяются согласно уравнениям

$$a' = \frac{\varepsilon}{8} (4a - a^3); \quad (4.137)$$

$$\varphi' = 1 + \frac{\varepsilon^2}{256} (-32 + 32a^2 - 7a^4). \quad (4.138)$$

Свойства решений уравнений типа (4.137) с полиномиальной правой частью удобно представить на фазовой прямой a , где точки обозначают корни полинома правой части уравнения (4.137), которые являются точками равновесия, а стрелка – направление изменения a , определяемое законом полинома.

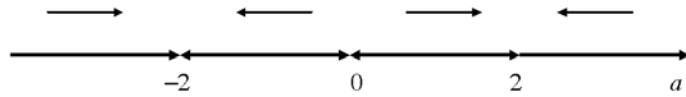


Рис. 4.13

На рис. 4.13 видно, что неподвижными точками (стационарными решениями), являются корни $a = 0$, $a = \pm 2$. Статический режим $a = 0$ неустойчив. Любые малые начальные возмущения возбуждают колебания с нарастающей амплитудой, стремящиеся к предельному устойчивому состоянию $a = \pm 2$. Начальные возмущения с $|a| > 2$ уменьшаются по амплитуде вплоть до стационарного значения $|a| = 2$. Умножая уравнение (4.137) на a , интегрируя методом разделения переменных, в рассмотренном нами приближении эволюцию амплитуды находим

$$a = \frac{2a_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{\sqrt{4 + a_0^2(-1 + e^{\varepsilon t})}}, \quad a_0 = a(t=0). \quad (4.139)$$

Видно, что если начальное значение амплитуды равно нулю, то оно остается таковым во все моменты. Однако статический режим неустойчив и любое малое случайное возмущение приведет к возникновению колебаний, амплитуда которых при $\varepsilon > 0$ стремится к значению $a = 2$ вне зависимости от начальных условий. На рис. 4.14, 4.15 представлены результаты числен-

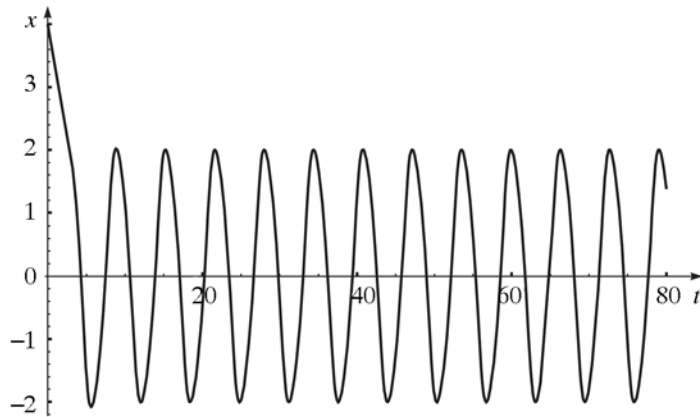


Рис. 4.14

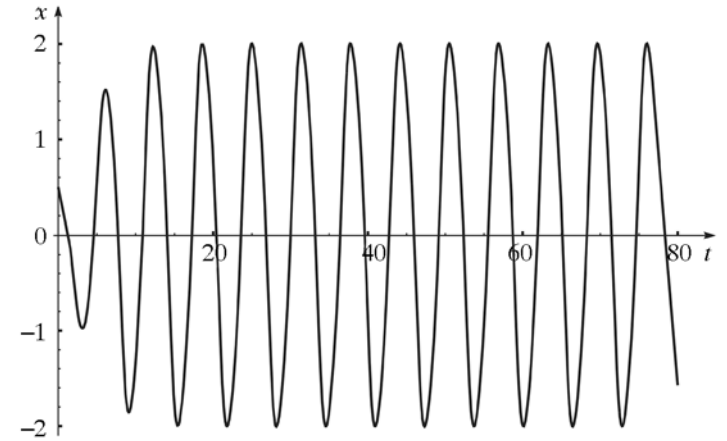


Рис. 4.15

ных расчетов уравнения (4.132) при $\varepsilon = 0,5$ с начальными данными $x(0) = 4$, $x'(0) = 0$ и $x(0) = 0,5$, $x'(0) = 0$ соответственно. Из рисунков видно хорошее согласие численных расчетов с приближенным решением

$$x = a \cos \left(t \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right) \right) + O(\varepsilon). \quad (4.140)$$

4.5.2. Приближенное решение уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра нелинейности

Обсудим поведение решений при больших значениях параметра ε . Уравнение Ван дер Поля, записанное в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} + \varepsilon \left(-x + \frac{x^3}{3} \right) \right) + x = 0, \quad (4.141)$$

эквивалентно системе двух уравнений первого порядка (уравнение Льенара):

$$\dot{x} + \varepsilon \left(-x + \frac{x^3}{3} \right) = \varepsilon y, \quad (4.142)$$

$$\varepsilon \dot{y} + x = 0 \quad (4.143)$$

для переменных y, x . Из уравнения для фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x}{\varepsilon^2(-3x + x^3 - 3y)} \quad (4.144)$$

при $\varepsilon \gg 1$ следует, что

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow \infty,$$

следовательно, $y = c$ везде, кроме окрестности кривой

$$y = -x + \frac{x^3}{3}. \quad (4.145)$$

Поэтому в первом приближении для больших значений параметра ε уравнение Ван дер Поля редуцируется в систему из двух уравнений, одно из которых (4.143). Вторым уравнением является $y = c$, везде, кроме окрестности кривой (4.145). Построим кривую (4.145) и обсудим качественное поведение изображающей точки в фазовой плоскости (y, x) (рис. 4.16).

Во всех точках, не лежащих в окрестности кривой, поле направлений фазовой траектории горизонтально. Согласно (4.144), $\frac{dy}{dx}$ – нечетная функция. Поэтому любая точка в фазовой плоскости, например точка P на рис. 4.16, стремится к кривой (4.145). На самой кривой динамика системы описывается уравнением первого порядка:

$$\dot{y} = -\frac{x}{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \left(-x + \frac{x^3}{3} \right)$$

или

$$(-1 + X^2) \frac{d}{dt_1} X + X = 0, \quad (4.146)$$

где $X(t_1) = x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. Если изображающая точка находится выше кривой (4.145), то, дойдя до нее, она начнет двигаться по кривой

до точки B , так как $\frac{d}{dt_1} X < 0$ ($X > 1$) согласно уравнению (4.146). Начало координат $X = 0$ является неподвижной неустойчивой точкой этого уравнения вблизи которой, как нетрудно убедиться, решение принимает вид $X = X_0 e^{t_1}$ ($X \ll 1$). Поэтому изображающая точка совершает далее «быстрые» движения по прямой BC , далее медленные движения по участку CD и «быстрые» движения по прямой DA . В дальнейшем изображающая точка движется по предельному циклу $ABCD$. Подобный несложный анализ показывает, что для любых начальных условий в системе происходят автоколебания с предельным циклом $ABCD$. В течение одного периода координата x дважды терпит разрыв в упрощенной нами модели. Амплитуда колебаний a (абсцисса точки A на рис. 4.16) определяется уравнением $-a + \frac{a^3}{3} = 2/3$ с решением

$$a = 2. \quad (4.147)$$

На рис. 4.17, 4.18 представлены результаты численных расчетов уравнения (4.132) с начальными данными $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$ при $\varepsilon = 10$, $\varepsilon = 100$ соответственно.

Видно, что амплитуда колебаний a хорошо согласуется с значением (4.147), а резкие спады и подъемы $x(t)$ в хорошем приближении являются разрывами. Аналитический вид медленных движений хорошо описывается решением (в неявном виде) уравнения (4.146)

$$\ln|x| - \frac{x^2}{2} = \frac{t - t_0}{\varepsilon}. \quad (4.148)$$

Период T разрывных колебаний в рассматриваемом приближении находим вычислением интеграла по предельному циклу, ко-

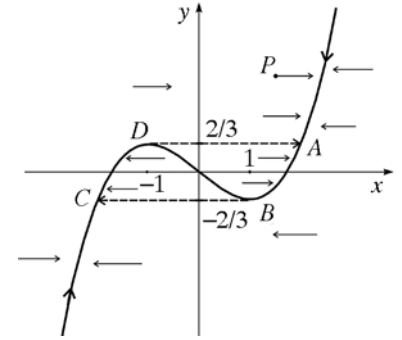


Рис. 4.16

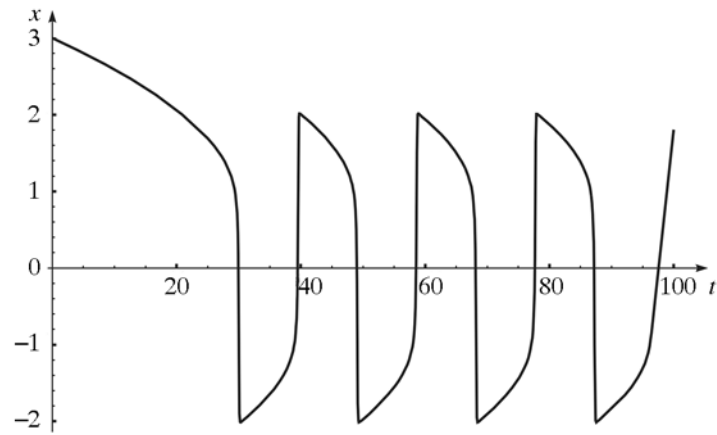


Рис. 4.17

торый приблизительно равен удвоенному времени прохождения участка AB . Тогда из (4.148) сразу следует

$$T = \oint dt = 2\varepsilon \left(\ln|x| - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 \approx 1,6\varepsilon. \quad (4.149)$$

Периоды колебаний на рис. 4.16, 4.18 равны 17,2 и 162,0 соответственно и хорошо согласуются с этой формулой.

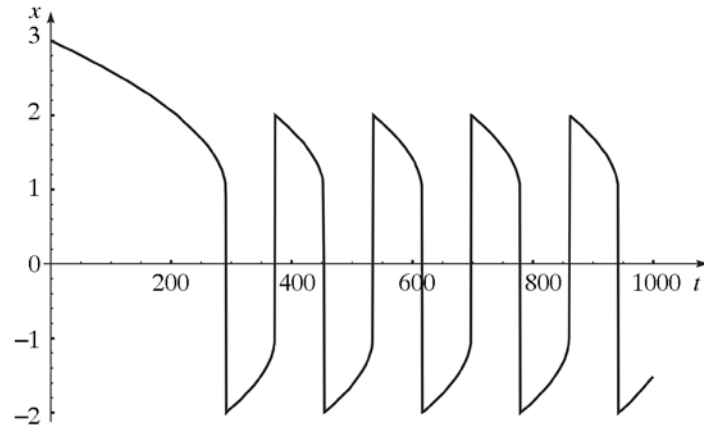


Рис. 4.18

4.5.3. Доказательство существования единственного устойчивого предельного цикла для уравнения Ван Дер Поля

Покажем, что уравнение Ван Дер Поля имеет единственный устойчивый предельный цикл. Как правило, существование предельных циклов изучается с помощью метода сечений Пуанкаре. Его идея состоит в исследовании *функции последования*. На фазовой плоскости проводится так называемый *отрезок без контакта*. Это отрезок прямой, проходящей не через особые точки уравнения, в каждой точке которого фазовые траектории пересекают его, нигде не касаясь.

Пусть в момент $t = 0$ изображающая точка M на фазовой кривой Γ имеет координаты S на отрезке без контакта (отрезок AB на рис. 4.19). Точка M имеет последующие точки, если при дальнейшем движении она будет вновь и вновь пересекать отрезок AB . Если $\bar{S}$ – координаты последующей точки, то существует функция последования

$$\bar{S} = f(S). \quad (4.150)$$

Если для некоторого значения S_1 выполняется соотношение

$$S_1 = f(S_1),$$

то траектория замкнута и по характеру поведения $f(S)$ вблизи S_1 можно сделать заключение о существовании предельного цикла.

Докажем существование единственного предельного цикла для системы (4.142), (4.143). Выберем в качестве отрезка без контакта луч $x = 0$, $y = 0$ (рис. 4.20). Пусть в начальный момент $\dot{x}(0) > 0$, $x(0) = 0$. Положим для простоты $\varepsilon = 1$ и исследуем смену знаков в фазовой плоскости правой части системы

$$\dot{y} = -x, \quad (4.151)$$

$$\dot{x} = y + x - \frac{x^3}{3}. \quad (4.152)$$

Тогда $\dot{y} < 0$ в полуплоскости $x > 0$ и изображающая точка M движется из точки R_1 по фазовой траектории Γ вниз и вправо, достигая в момент $t = t_P$ точки P на

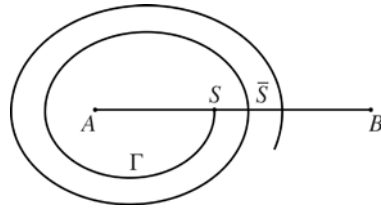


Рис. 4.19

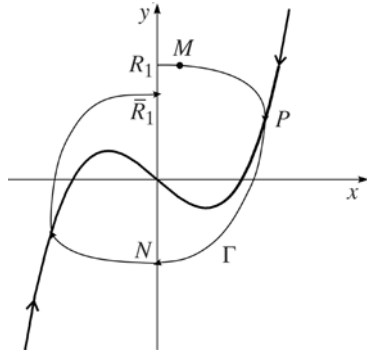


Рис. 4.20

кривой $y + x - \frac{x^3}{3} = 0$, где $\dot{x}(t_p) = 0$.

Фазовая траектория имеет вертикальную касательную в этой точке.

При $t > t_p$, поскольку $\dot{x} < 0$, $\dot{y} < 0$, изображающая точка движется вниз и влево, ее координаты x и y убывают. В полуплоскости $x > 0$,

ниже кривой $y = -x + \frac{x^3}{3}$, производная фазовой траектории

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-x}{y + x - \frac{x^3}{3}}$$

положительная, в этом интервале функция $y(x)$ возрастает. Поэтому фазовая точка пересекает луч $x = 0$, $y < 0$ в некоторой точке N . Аналогичными рассуждениями нетрудно показать, что при дальнейшем движении фазовая траектория пересекает под прямым углом луч $y > 0$ в точке R_1 . В итоге мы можем заключить, что интегральные траектории нашей системы, если они не замкнуты, представляют собой бесконечные спирали.

Обсудим далее условия, при которых фазовые траектории замкнуты. Для исследования их свойств введем полярные координаты в плоскости y, x . Тогда

$$\frac{d}{dt} r^2 = \frac{d}{dt} (x^2 + y^2) = 2 \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right)$$

и величина

$$r^2(P_2) - r^2(P_1) = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right) dt \quad (4.153)$$

определяет изменение квадрата радиального расстояния между точками P_1 с координатами $(x(t_1), y(t_1))$ и P_2 с координатами $(x(t_2), y(t_2))$ на траектории $(x(t), y(t))$. Ясно, что необходимым условием существования замкнутой траектории является равенство

$$r^2(R_1) = r^2(\bar{R}_1).$$

Кроме того, система уравнений (4.151), (4.152) не меняется при отражении около начала координат $(x(t), y(t)) \rightarrow (-x(t), -y(t))$. Поэтому для каждой фазовой траектории существует другая, симметричная первоначальной. Если для замкнутой траектории Γ_1 выполняется условие

$$r^2(R_1) \neq r^2(N),$$

то оно было бы справедливо и для траектории Γ_2 , полученной из Γ_1 отражением относительно начала координат. В этом случае фазовые траектории Γ_1 и Γ_2 пересекались бы, что невозможно в силу единственности решений дифференциальных уравнений. Поэтому замкнутая траектория всегда симметрична относительно начала координат и для нее выполняется условие

$$r^2(R_1) = r^2(N). \quad (4.154)$$

Если фазовая траектория пересекает в момент $\bar{t}$ ось абсцисс в точке $x_0 < \sqrt{3}$, разность

$$r^2(N) - r^2(R_1) = 2 \int_{t_1}^{\bar{t}} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right) dt$$

из-за положительности подынтегрального выражения всегда больше нуля и условие (4.154) не выполняется. Поэтому, если существует замкнутая траектория, то она всегда пересекает ось абсцисс в точке с координатой $x > \sqrt{3}$.

Рассмотрим траектории, выходящие из точек R и R_1 ($OR_1 > OR$), которые в последующем пересекают положительную полуось y в точках $\bar{R}$ и $\bar{R}_1$ соответственно (рис. 4.21).

Докажем, что

$$r^2(\bar{R}_1) - r^2(R_1) < r^2(\bar{R}) - r^2(R). \quad (4.155)$$

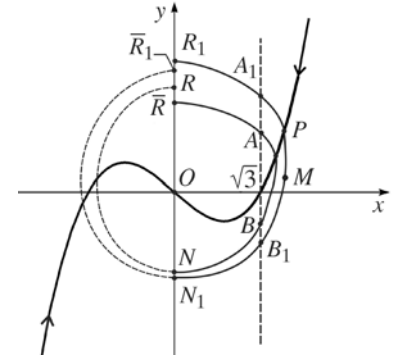


Рис. 4.21

На участке RA изменение Δr^2 записывается в форме

$$r^2(A) - r^2(R) = 2 \int_{t_1}^{t_2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right) dt.$$

Интеграл в правой части после замены

$$t \rightarrow t(x), \quad dt = \frac{dx}{\left(y(x) + x - \frac{x^3}{3} \right)}$$

записывается в виде

$$2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \left(x - \frac{x^3}{3} \right)}{y(x) + x - \frac{x^3}{3}} dx.$$

В интервале $x \in (0, \sqrt{3})$ величина $x - \frac{x^3}{3}$ положительна, а координата $y(x)$ на дуге R_1A_1 больше, чем на дуге RA . Поэтому выполняется неравенство

$$r^2(A_1) - r^2(R_1) < r^2(A) - r^2(R). \quad (4.156)$$

На участке AB координаты концов дуги равны $A = (a, \sqrt{3})$,

$B = (b, \sqrt{3})$ и в качестве независимой переменной удобно вы-

брать y . Тогда $dt = -\frac{dy}{x}$:

$$r^2(B) - r^2(A) = -2 \int_a^b \left(x(y) - \frac{x^3(y)}{3} \right) dy. \quad (4.157)$$

Для фиксированного значения y координаты $x(y)$ ($x(y) > \sqrt{3}$) на дуге A_1B_1 больше $x(y)$ на AB , следовательно:

$$\left(x(y) - \frac{x^3(y)}{3} \right)_{A_1B_1} > \left(x(y) - \frac{x^3}{3} \right)_{AB}.$$

Поэтому выполняется неравенство

$$r^2(B_1) - r^2(A_1) < r^2(B) - r^2(A). \quad (4.158)$$

Подобным образом можно показать, что

$$r^2(N_1) - r^2(B_1) < r^2(N) - r^2(B). \quad (4.159)$$

В итоге, складывая неравенства (4.156), (4.158), (4.159), получаем

$$r^2(N_1) - r^2(R_1) < r^2(N) - r^2(R).$$

Аналогичные вычисления и свойства симметрии формулы (4.153) показывают, что в области $x < 0$ приращение Δr^2 для внешних кривых также будет меньше, чем для внутренних, что и доказывает неравенство (4.155). Обозначим $S, S_1, \bar{S}, \bar{S}_1$ ординаты точек $R, R_1, \bar{R}, \bar{R}_1$ соответственно. Значение $\bar{S}$ зависит от S . Удобно вместо функции последования $\bar{S} = F(S)$ ввести связанную с ней функцию

$$f(S) = r^2(\bar{R}) - r^2(R)$$

и исследовать ее свойства. Из неравенства (4.155) следует, что $f(S_1) < f(S)$, если $0 < S < S_1$, значит, $f(S)$ – монотонно убывающая функция. Начало координат (малые значения S) для системы (4.151), (4.152) является неустойчивой особой точкой, вблизи которой фазовые траектории образуют спирали с увеличивающимся шагом с течением времени. Поэтому $f(S)$ – положительная функция при малых значениях S . Для больших значений S траектория RN перемещается вправо. Интервал интегрирования и подынтегральная функция в (4.157) строго возрастают с увеличением S , следовательно, $r^2(B) - r^2(A)$ и $r^2(\bar{R}) - r^2(R)$ стремятся к $-\infty$ при $S \rightarrow \infty$. Поскольку функция $f(S)$ непрерывна, то существует такое значение S_0 , при котором $f(S_0) = 0$ и $\bar{S} = S$. Это и доказывает существование единственной замкнутой траектории. Пока-

жем, что она является предельным циклом. Действительно, пусть замкнутая траектория Γ_0 пересекает положительную полуось y в точке P . Рассмотрим поведение фазовой траектории Γ при $S < S_0$. Тогда функция $f(S)$ отрицательная:

$$r^2(\bar{R}) - r^2(P) < r^2(R) - r^2(P),$$

с каждым оборотом Γ все ближе приближается к замкнутой траектории. Подобные аргументы при $S > S_0$ приводят к заключению, что замкнутая траектория есть предельный цикл.

Можно показать [19], что для уравнений Лъенара

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + h(x) = 0 \quad (4.160)$$

при выполнении следующих условий:

$$1) \quad G(x) = \int_0^x g(u) du - \text{четная функция, равная нулю при } x = 0$$

и $x = \pm\mu$;

$$2) \quad G(x) \rightarrow \infty \text{ при } x \rightarrow \infty \text{ монотонно возрастает при } x > \mu;$$

3) $h(x)$ – нечетная функция и $h(x) > 0$ при $x > 0$ существует один устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый фокус в начале координат.

4.6. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Маятник сыграл чрезвычайно большую роль в истории физики... Мы будем говорить о вещах, которые приобретают все большее значение. Можно сказать, пожалуй, что их «просмотрели». Отчасти на них навела практика. Что будет с колеблющейся системой, если ее параметры изменяются со временем, и притом периодически.

Л.И. Мандельштам

Рассмотрим колебания математического маятника, точка подвеса которого совершает колебательные движения вдоль оси y (рис. 4.22) по закону $A \cos(2\omega t)$.

Координаты материальной точки A массы m равны

$$x = l \sin \varphi, \quad y = l \cos \varphi + A \cos 2\omega t. \quad (4.161)$$

Тогда лагранжиан такой системы после исключения полной производной по времени, равный

$$L = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + ml \cos \varphi [g + 4A\omega^2 \cos 2\omega t],$$

приводит к уравнению движения

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} + \frac{4A\omega^2}{l} \cos 2\omega t \right) \sin \varphi = 0. \quad (4.162)$$

Для малых отклонений ($\sin \varphi \approx \varphi$) мы получаем линейное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение Маттье):

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 (1 + 2\varepsilon \cos 2\omega t) \varphi = 0, \quad (4.163)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \varepsilon = \frac{2A\omega^2}{l\omega_0^2}. \quad (4.164)$$

Уравнение Маттье является частным случаем уравнения Хилла:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad \omega(t+T) = \omega(t), \quad (4.165)$$

которое описывает колебания систем с одной степенью свободы, где внешнее воздействие сводится к периодическому изменению параметров системы.

4.6.1. Теория Флоке

Непозволительно пользоваться сомнительными суждениями, коль скоро мы решаем определенную задачу – будь то задача математики или физики, все равно, которая поставлена определенно с точки зрения математики. Она становится задачей чистого анализа и должна трактоваться как таковая.

А.М. Ляпунов

В этом параграфе изложены общие свойства уравнений Хилла, которые в математике были изучены Флоке, в физике твердого

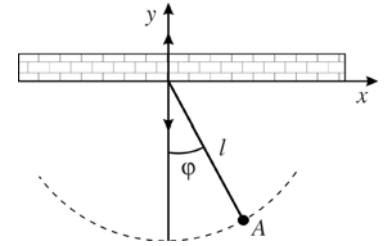


Рис. 4.22

тела – Блохом. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два линейно независимых решения уравнения (4.165), тогда функции $x_i(t+T)$ ($i = 1, 2$) будут также линейно независимыми решениями этого уравнения. Уравнение второго порядка должно иметь только два независимых решения. Отметим, что решение (4.165) не всегда является периодической функцией $x(t) = x(t+T)$. В общем случае $x_j(t+T)$ ($j = 1, 2$) являются линейными комбинациями $x_i(t)$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} x_1(t+T) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \\ x_2(t+T) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \end{aligned} \quad (4.166)$$

с постоянными коэффициентами a_{ij} ($i, j = 1, 2$). Если линейно независимые решения $x_i(t)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1, \dot{x}_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= 0, \dot{x}_2(0) = 1, \end{aligned} \quad (4.167)$$

то из (4.166) сразу получаем

$$a_{11} = x_1(T), a_{21} = x_2(T).$$

Соотношения и уравнения

$$a_{12} = \dot{x}_1(T), a_{22} = \dot{x}_2(T),$$

полученные дифференцированием (4.166), сразу определяют коэффициенты a_{ij} при известных функциях $x_1(t)$, $x_2(t)$.

В матричном виде уравнения (4.166) могут быть записаны в виде

$$X(t+T) = AX(t), \quad (4.168)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем (4.168) к простому виду. Положим $X(t) = BY(t)$, где B – постоянная невырожденная матрица, Y – вектор-столбец

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X(t+T) = BY(t+T) = AX(t) = ABY(t)$, следовательно:

$$Y(t+T) = B^{-1}ABY(t). \quad (4.169)$$

Матрицу B можно выбрать так, чтобы матрица $B^{-1}AB$ имела диагональный вид:

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (4.170)$$

Собственные значения λ_1, λ_2 определяются как корни уравнения

$$\begin{aligned} \det(B^{-1}AB - \lambda E) &= \det(A - \lambda E) = \\ &= \lambda^2 - 2(a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0, \end{aligned} \quad (4.171)$$

где E – единичная матрица. Учитывая, что

$$\det A = x_1(T)\dot{x}_2(T) - x_2(T)\dot{x}_1(T)$$

есть не зависящий от времени определитель Вронского, который при начальных условиях (4.167) равен единице, получаем решение уравнения (4.171) в форме

$$\lambda_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \beta = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}). \quad (4.172)$$

Введем характеристические показатели **Ляпунова**:

$$\gamma_i = \frac{1}{T} \ln \lambda_i \quad (i = 1, 2) \quad (4.173)$$

и перепишем уравнение (4.169) в виде

$$y_i(t+T) = e^{\gamma_i T} y_i(t). \quad (4.174)$$

Тогда после умножения его на $e^{-\gamma_i(t+T)}$

$$y_i(t+T)e^{-\gamma_i(t+T)} = e^{-\gamma_i t} y_i(t)$$

следует, что $e^{-\gamma_i t} y_i(t)$ является периодической функцией $P_i(t)$ с периодом T . В итоге общее решение уравнения Хилла при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ записывается в виде

$$x(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} P_1(t) + c_2 e^{-\gamma_1 t} P_2(t). \quad (4.175)$$

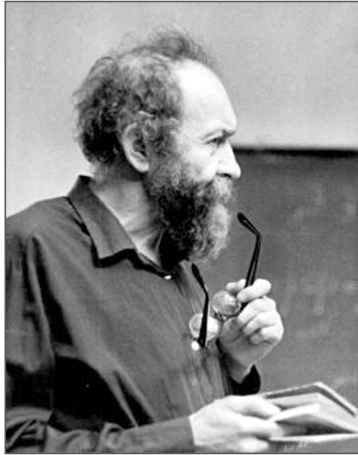
Здесь учтено соотношение $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, которое является следствием уравнения $\lambda_1 \lambda_2 = 0$.

Общий вид решений уравнения Хилла зависит от значений вещественного параметра β . При $|\beta| < 1$ оба корня λ_1, λ_2 комплексно сопряжены: $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ и $\gamma_1 = i\rho$ ($\rho \in R$). Поскольку $x(t)$ – вещественная функция, то постоянные c_1, c_2 и периодические Π_1, Π_2 функции в выражении (4.175) должны быть комплексно-сопряженными величинами. Положим

$$c_1 = \frac{c}{2} e^{\delta i}, \Pi_1 = a(t) e^{i\Psi(t)},$$

где a, Ψ – вещественные периодические функции с периодом T . Тогда решение уравнения Матье записывается в виде

$$\varphi(t) = ca(t) \cos \varphi \cos(\delta + \rho t + \Psi(t)) \quad (4.176)$$



Александр Михайлович Ляпунов (25 мая 1857, Ярославль – 3 ноября 1918, Одесса) – выдающийся русский математик и механик, (член-корреспондент Петербургской АН 1901 г.; академик с 1900 г.), представитель петербургской математической школы, созданной П.Л. Чебышевым. Член Петербургского, Харьковского и Казанского университетов, иностранный член Академии деи Линчеи, член-корреспондент Парижской академии наук, иностранный член математического кружка в Палермо, почетный член Харьковского математического общества и других научных обществ. Он является творцом теории устойчивости движения, которая принадлежит к категории труднейших задач естествознания, и автором фундаментальных исследований о фигурах равновесия вращающейся жидкости. В работе «Общая задача об устойчивости

движения» (1892) Ляпунов предложил новые общие строгие методы решения задач об устойчивости движения. Один из этих методов, основывающийся на понятии так называемой функции Ляпунова, позволил ему получить важные с точки зрения применения критерии устойчивости решения. Созданные Ляпуновым методы исследования успешно используют и в других разделах теории дифференциальных уравнений. Большой вклад его работы внесли и в математическую физику, в частности в теорию потенциала. Ляпунов дал простое и строгое доказательство центральной предельной теоремы в теории вероятностей, где разработал оригинальный и чрезвычайно плодотворный метод характеристических функций, который широко применяется в современной теории вероятностей

и является комбинацией функций с периодом $T_1 = T$ и $T_2 = \frac{2\pi}{\rho}$.

Оно описывает неперiodическое движение, если периоды T_1, T_2 несоизмеримы, и периодическое в противном случае.

В случае $|\beta| > 1$ величина γ – вещественное число. При $\gamma > 0$ второе слагаемое в (4.175) быстро затухает и амплитуда $x(t)$ быстро возрастает по времени:

$$x(t) \approx C_1 e^{\gamma t} \Pi_1(t). \quad (4.177)$$

Это явление называется *параметрическим резонансом*.

Для $|\beta| = 1$ собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ совпадают и, как следует из теоремы линейной алгебры о приведении матрицы к жордановой форме, матрица $B^{-1}AB$ имеет вид

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \pm 1. \quad (4.178)$$

Тогда соотношения (4.169) записываются в виде

$$y_1(t + T) = \lambda_1 y_1(t), \quad (4.179)$$

$$y_2(t + T) = \lambda_1 y_2(t) + y_1(t).$$

Из первого уравнения сразу следует, что

$$y_1(t) = e^{\gamma_1 t} \Pi_1(t), \quad \gamma_1 = \frac{1}{T} \ln \lambda_1, \quad \Pi_1(t + T) = \Pi_1(t), \quad (4.180)$$

а второе приводится к виду

$$e^{-\gamma_1(t+T)} y_2(t + T) = e^{-\gamma_1 t} y_2(t) + e^{-\gamma_1 t} \Pi_1(t)$$

с решением

$$y_2(t) = e^{\gamma_1 t} \left[\Pi_2(t) + \frac{t}{T \lambda_1} \Pi_1(t) \right], \quad \Pi_2(t) = \Pi_2(t + T). \quad (4.181)$$

Поэтому при $|\beta| = 1$ одно из решений уравнения Матье всегда описывает возрастающее по времени движение. Второе незави-

симое решение является периодическим с периодом $T(\gamma = 0)$, либо с $2T(\gamma = i\pi)$. Значения $|\beta| = 1$ отделяют область устойчивых решений от неустойчивых и называются *переходными*.

Отметим отличие резонанса в линейных системах при вынужденных колебаниях от параметрического. При вынужденных колебаниях резонанс происходит, когда частота возмущений совпадает с частотой собственных колебаний системы. Это усиление осуществляется за счет притока энергии, и резонанс происходит, даже если система в начальный момент была в положении равновесия. Амплитуда колебаний растет пропорционально t (арифметическая прогрессия). При параметрическом резонансе состояние равновесия неустойчиво. При любом малом возмущении колебания возрастают при многих частотах возбуждения. Амплитуда колебаний повышается по экспоненциальному закону (геометрическая прогрессия).

Решение уравнений Хилла детально исследовано только для некоторых частных видов функции $\omega(t)$. Условия возникновения параметрического резонанса исследованы детально для уравнения Маттье (4.163). Его характеристические показатели γ зависят только от значений ω , ε и не зависят от начальных данных. Для каждой пары значений ω , ε можно установить области устойчивости в плоскости ω , ε . Соответствующие графики приведены в специальных монографиях. Здесь мы выясним условие возникновения параметрического резонанса при $\varepsilon \ll 1$, когда можно найти приближенные решения.

4.6.2. Аналитическое решение уравнения Маттье при малых значениях параметра нелинейности

Построим вначале решение уравнения Маттье при малых ε прямым разложением. Подставляя ряд

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) \quad (4.182)$$

в (4.163) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0; \quad (4.183)$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 + 2\omega_0^2\cos 2\omega_0 t\varphi_0 = 0; \quad (4.184)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2\varphi_2 + 2\omega_0^2\cos 2\omega_0 t\varphi_1 = 0. \quad (4.185)$$

Общее решение уравнения (4.183)

$$\varphi_0 = a\cos(\omega_0 t + \beta)$$

после подстановки в (4.184) приводит к следующему выражению для φ_1 :

$$\varphi_1 = \frac{a\omega_0^2}{4\omega} \left\{ \frac{\cos[(-2\omega + \omega_0)t + \beta]}{\omega - \omega_0} + \frac{\cos[(\omega + \omega_0)t + \beta]}{\omega + \omega_0} \right\},$$

содержащему малые знаменатели при $\omega = \pm\omega_0$. При подстановке его в (4.185) возникают резонансные слагаемые, которые приводят к вековым слагаемым, пропорциональным t , в выражении для φ_2 . В итоге прямое разложение непригодно из-за присутствия в φ вековых членов и появления малых знаменателей. Если рассматривать в разложении (4.182) члены более высокого порядка, то малые знаменатели возникают при

$$\omega = 0, \quad \omega = \pm \frac{\omega_0}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Найдем приближенное выражение $\varphi(t)$ для при малых ε методом многих масштабов. Подставим разложение

$$\varphi(t) = \varphi_0(t, \varepsilon t) + \varepsilon\varphi_1(t, \varepsilon t) + O(\varepsilon^2)$$

в уравнение (4.163) и приравняем коэффициенты при ε^0 и ε^1 . Получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial T^2} \varphi_0(T_0, T_1) + \omega_0^2 \varphi_0(T_0, T_1) = 0; \quad (4.186)$$

$$2\omega_0^2 \cos(2T_0\omega) \varphi_0(T_0, T_1) + \omega_0^2 \varphi_1(T_0, T_1) + 2 \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_1} \varphi_1(T_0, T_1) + \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \varphi_0(T_0, T_1) = 0, \quad (4.187)$$

где, как и ранее, обозначили $t = T_0$; $\varepsilon t = T_1$. Общее решение уравнения (4.186)

$$\varphi_0(T_0, T_1) = a(T_1)\cos(\omega_0 T_0 + \beta(T_1)) \quad (4.188)$$

после подстановки в (4.187) редуцирует его к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} \varphi_1 + \omega_0^2 \varphi_1 + \omega_0^2 a(T_1) \cos((2\omega - \omega_0)T_0 - \beta(T_1)) + \\ & + \omega_0^2 a(T_1) \cos((2\omega + \omega_0)T_0 + \beta(T_1)) - 2\omega_0 a'(T_1) \sin(\omega_0 T_0 + \beta_1) - \\ & - 2\omega_0 \cos(\omega_0 T_0 + \beta_1(T_1)) \beta'(T_1) = 0. \end{aligned} \quad (4.189)$$

Рассмотрим область значений частот ω вблизи ω_0 с параметром расстройки σ :

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma. \quad (4.190)$$

Тогда в левой части уравнения (4.189) третье слагаемое

$$\omega_0^2 a(T_1) \cos((2\omega - \omega_0)T_0 - \beta(T_1)) = \omega_0^2 a(T_1) \cos(\omega_0 T_0 + 2\sigma T_1 - \beta(T_1)),$$

пятое и шестое слагаемые будут резонансными. Разложим сумму этих слагаемых по функциям $\cos \omega_0 T_0$ и $\sin \omega_0 T_0$. Для исключения векковых членов в решении для $\varphi_1(T_1)$ приравняем нулю коэффициенты перед этими функциями. В результате получаются уравнения

$$a'(T_1) = -\frac{1}{2} \omega_0 a(T_1) \sin \gamma(T_1); \quad (4.191)$$

$$\gamma'(T_1) = 2\sigma - \omega_0 \cos \gamma(T_1),$$

где

$$\gamma(T_1) = 2(T_1 \sigma - \beta(T_1)). \quad (4.192)$$

Отсюда в переменных

$$w_1(T_1) = a(T_1) \cos \frac{\gamma_1(T_1)}{2} \quad \text{и} \quad w_2(T_1) = a(T_1) \sin \frac{\gamma_1(T_1)}{2}$$

эти выражения записываются в виде системы линейных дифференциальных уравнений

$$w_1'(T_1) = -\left(\sigma + \frac{\omega_0}{2}\right) w_2(T_1), \quad (4.193)$$

$$w_2'(T_1) = \left(\sigma - \frac{\omega_0}{2}\right) w_1(T_1).$$

Решения этой системы ищем в виде $w_1(T_1) = v_1 e^{sT_1}$ и $w_2(T_1) = v_2 e^{sT_1}$, что оказывается возможным при выполнении условий

$$v_1 = -\frac{v_2(2\sigma + \omega_0)}{2s} \quad \text{и}$$

$$s^2 = -\sigma^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2. \quad (4.194)$$

Тогда после простых преобразований решение (4.188) приводится к виду

$$\varphi(t) = w_1 \cos \omega t + w_2 \sin \omega t + O(\varepsilon), \quad (4.195)$$

где

$$w_1 = \frac{\sigma + \frac{\omega_0}{2}}{s} (c_1 e^{\varepsilon s t} + c_2 e^{-\varepsilon s t}); \quad (4.196)$$

$$w_2 = c_1 e^{\varepsilon s t} + c_2 e^{-\varepsilon s t}.$$

Здесь ω выражается формулой (4.190), c_1 и c_2 есть функции $T_2, T_3, \dots$ и в нашем приближении являются постоянными.

Условием параметрического резонанса является вещественность s , что имеет место в узком интервале частот ω шириной $\varepsilon \omega_0$. Действительно, из условия (4.194) $-\frac{\omega_0}{2} < \sigma < +\frac{\omega_0}{2}$ и (4.190) получаем интервал частот

$$\omega_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \omega < \omega_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (4.197)$$

для возбуждения параметрического резонанса.

Если s – мнимая величина, то φ осциллирует с увеличением t . Поэтому границы, которые разделяют области устойчивости и неустойчивости, задаются в первом приближении равенствами

$$\omega = \omega_0 \left(1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (4.198)$$

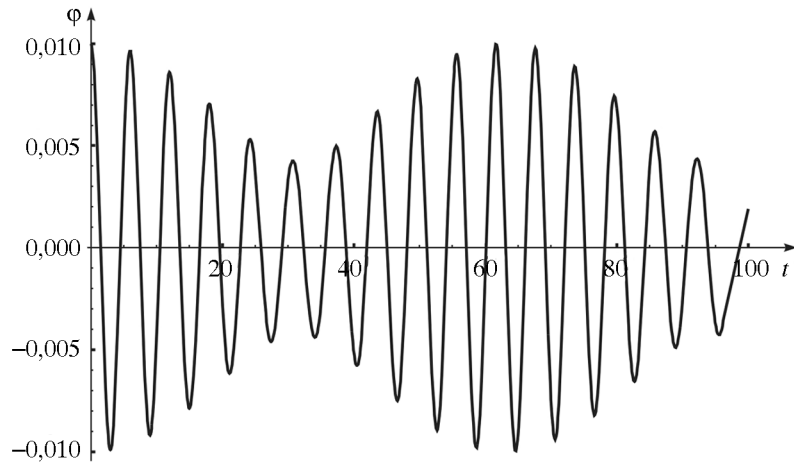


Рис. 4.23

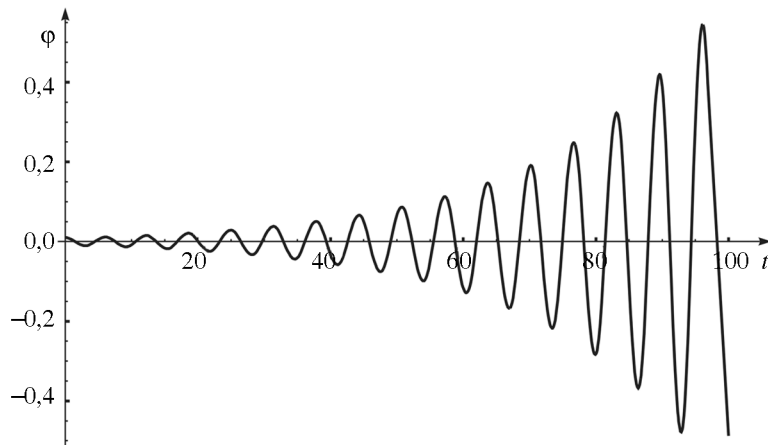


Рис. 4.24

Параметрический резонанс возникает также на частотах $\omega = \frac{2\omega_0}{n}$, где n – целое. Наличие малого затухания приводит к

сужению области неустойчивости. Добавка слагаемого $2\epsilon\mu\dot{\varphi}$ ($\mu > 0$) в уравнение (4.163) приводит к появлению в правой части формулы (4.195) множителя $e^{2\epsilon\mu t}$. Поэтому амплитуда возрастает при выполнении условия $-2\mu + s > 0$ ($s > 0$), где s определяется формулой (4.194). В этом случае для резонансной области мы получаем условие

$$\omega_0 - \epsilon \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - 4\mu^2} < \omega < \omega_0 + \epsilon \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - 4\mu^2}, \quad (4.199)$$

сужающее область параметрического резонанса. При этом ширина резонанса уменьшается как $\epsilon^n \omega_0$.

На рис. 4.23, 4.24 показаны результаты численного счета уравнения (4.163) с начальными условиями $\varphi(0), \varphi'(0) = 0,01$; параметрами $\omega_0 = 1, \epsilon = 0,01, \omega = 1,07$ и $\omega_0 = 1, \epsilon = 0,1, \omega = 0,97$ соответственно. Видно, что в первом случае вне зоны параметрического резонанса решения представляют собой колебания типа биений. Во втором случае условия (4.197) удовлетворяются и колебания экспоненциально возрастают со временем.

Глава 5. ДВИЖЕНИЕ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

Уже становилось ясным, что решение общей задачи движения трех тел вообще не может быть получено вполне точно. Можно составить уравнения, соответствующие этой проблеме, но затем встает задача их интегрирования. Она оказалась столь трудной, по крайней мере, при тогдашнем состоянии математики, что Клеро махнул на эти уравнения рукой, сказав: «Пусть интегрирует, кто сможет».

Б.А. Воронцов-Вельяминов. Лаплас

5.1. ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ

Рассмотрим динамику двух частиц с массами m_1 и m_2 , радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в некоторой произвольной инерциальной системе отсчета K и потенциальной энергией взаимодействия $U = (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Как было показано ранее, радиус-вектор центра масс:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.1)$$

движется равномерно и прямолинейно в любой инерциальной системе отсчета (см. (2.101)).

Обсудим движение системы в системе отсчета, связанной с центром масс. Пусть $\vec{r}'_1$ и $\vec{r}'_2$ – радиусы-векторы частиц в системе центра масс, тогда (рис. 5.1):

$$\vec{r}_1 = \vec{r}'_1 + \vec{R}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}'_2 + \vec{R}. \quad (5.2)$$

Прямые вычисления показывают, что векторы $\vec{r}'_1$ и $\vec{r}'_2$ пропорциональны вектору относительного расстояния $\vec{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$:

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}; \quad (5.3)$$

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (5.4)$$

а векторы $\vec{r}'_1$ и $\vec{r}'_2$ антипараллельны, что и показывает рис. 5.1.

Уравнение движения для вектора $\vec{r} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} = \\ &= \vec{F}_{21} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \vec{F}_{21} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(r), \quad (5.5)$$

где величина μ

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.6)$$

носит название приведенной массы. Выражение (5.6) совпадает с уравнением частицы с массой μ в поле центральных сил $\vec{F}_{21}(r)$. Таким образом, задача двух тел в инерциальной системе отсчета существенно упрощается разложением движения частиц относительно центра масс и его равномерного движения относительно инерциальной системы отсчета. По решению этой задачи $\vec{r} = r(t)$ можно найти траектории каждой из частиц по формулам (5.3), (5.4).

5.2. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

Цель физики как науки – констатировать и объяснять видимые явления, классифицировать и обобщать факты; открывать скрытое единство и постоянство природы среди кажущегося разнообразия и изменчивости; построить, по крайней мере отчасти, историю внешнего мира, приспособленную к пониманию человека; дать отчет о прошлых явлениях и предвидеть будущее, изучать язык и истолковывать пророчества Вселенной.

В.Р. Гамильтон

Рассмотрим движение частицы массы m в трехмерном пространстве под действием центральной силы, зависящей только

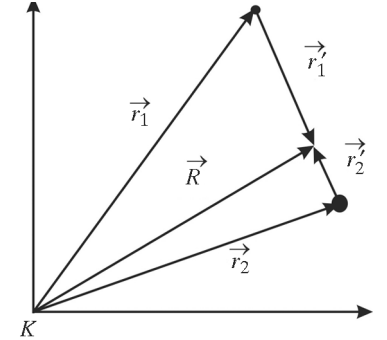


Рис. 5.1

от расстояния r между частицей и центром силы. Лагранжиан такой системы

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r) \quad (5.7)$$

и ее динамика определяются заданной потенциальной энергией $U(r)$. Сила, действующая на частицу:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\text{grad}U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$$

направлена в каждой точке вдоль радиуса-вектора и по абсолютной величине зависит только от r . В такой системе сохраняются энергия и момент импульса частицы

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] \quad (5.8)$$

относительно центра поля. Умножая (5.8) скалярно на $\vec{r}$, получаем соотношение

$$M_x x + M_y y + M_z z = 0. \quad (5.9)$$

Поскольку компоненты момента импульса частицы не зависят от времени, то это выражение представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{M}$. Координаты частицы должны в каждый момент удовлетворять этому уравнению, и, следовательно, траектория движения частицы является плоской кривой. Запишем момент импульса в виде

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}] = m \left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = 2m \frac{d\vec{S}}{dt}, \quad (5.10)$$

где $dS = \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}]$. Величина

$$\sigma = \frac{dS}{dt} \quad (5.11)$$

называется *секториальной скоростью*.

Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Рассмо-

трим точку, движущуюся по некоторой кривой. За время dt перемещение частицы равно $d\vec{r}$, и площадь треугольника $|d\vec{S}|$, замещаемого вектором $\vec{r}$ (рис. 5.2),

равна $\left| \frac{1}{2} [\vec{r}, d\vec{r}] \right|$. Поэтому сектор-

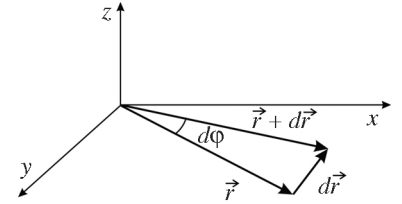


Рис. 5.2

риальная скорость – это площадь, очерчиваемая радиусом-вектором за единицу времени. Закон сохранения импульса означает постоянство секториальной скорости – *за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади*. Этот закон, называемый часто *законом площадей*, был открыт еще И. Кеплером при исследовании движения планет вокруг Солнца (см. главу 1).

Определим положение материальной точки в плоскости (5.9) полярными координатами r и ϕ . В этих координатах функция Лагранжа записывается в виде

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r) \quad (5.12)$$

и приводит к уравнениям движения

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{dU(r)}{dr}; \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0. \quad (5.14)$$

Последнее выражение (5.14) является следствием закона сохранения z -компоненты момента импульса

$$M_z = m(\dot{x}y - \dot{y}x) = mr^2\dot{\phi} = \text{const}. \quad (5.15)$$

После подстановки в (5.13) $\dot{\phi}$, выраженной через момент импульса:

$$\dot{\phi} = \frac{M_z}{mr^2} \quad (5.16)$$

получаем уравнение

$$m\ddot{r} = \frac{M_z^2}{mr^3} - \frac{dU(r)}{dr}. \quad (5.17)$$

Таким образом, закон сохранения момента импульса позволяет свести задачу о движении частицы в центральном поле к движению консервативной системы с одной степенью свободы. Энергия E такой системы равна

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r). \quad (5.18)$$

По общему виду она совпадает с выражением (4.7) для одномерного движения, только эквивалентная потенциальная

энергия $U_f = \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r)$ представляет собой сумму потенциальной и центробежной энергий $\frac{M_z^2}{2mr^2}$. Величина центробеж-

ной силы $F_c = \frac{M_z^2}{mr^3} = \frac{mv_c^2}{r}$, соответствующая последней, выра-

жается через компоненту скорости $v_c = r\dot{\phi}$, касательной к траектории.

Закон сохранения энергии дает возможность полностью исследовать движение частицы. Из (5.18) следует выражение для радиальной скорости

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M_z^2}{2mr^2} \right)}. \quad (5.19)$$

Произведем в этом уравнении разделение переменных r и t и выполним интегрирование, обозначая постоянную интегрирования как t_0 :

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M_z^2}{2mr^2} \right)}} + t_0. \quad (5.20)$$

Эта квадратура определяет расстояние r движущейся точки от центра как неявную функцию времени. После того как найдена

зависимость $r(t)$, можно получить функцию $\phi(t)$, интегрируя уравнение (5.16):

$$\phi = \int \frac{M_z}{mr^2} dt + \phi_0. \quad (5.21)$$

Рассмотрим движение в центральном поле, когда потенциальная энергия обратно пропорциональна r :

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}. \quad (5.22)$$

Если $\alpha = \gamma m M$, где m – масса точки, M – масса центрального тела, γ – универсальная постоянная тяготения, то (5.22) – потенциальная энергия ньютоновского поля тяготения. При взаимодействии двух точек с электрическими зарядами q_1, q_2 соответственно $\alpha = q_1 q_2$. Поле тяготения, как известно, имеет характер притяжения, кулоновское поле может быть как полем притяжения, так и отталкивания.

Для полей притяжения график эффективной потенциальной энергии

$$U_{\text{эф}} = \frac{M_z^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (5.23)$$

изображен на рис. 5.3. Минимум эффективной потенциальной энергии и соответственно радиальной компоненты силы получим из условия

$$\frac{d}{dr} U_f = \frac{d}{dr} \left(\frac{M_z^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \right) = -\frac{M_z^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left(\alpha - \frac{M_z^2}{mr} \right) = 0.$$

Если энергия равна минимуму эффективного потенциала

$$U_{f \min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M_z^2}, \quad (5.24)$$

то движение возможно только при одном значении

$$r_0 = \frac{M_z^2}{m\alpha}, \quad (5.25)$$

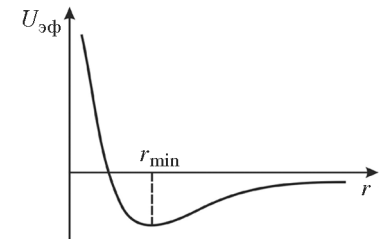


Рис. 5.3

по окружности с постоянной угловой скоростью. При $E = U_{fmin}$ движение отсутствует, а при $U_{fmin} < E < 0$ область изменения r меняется в интервале $r_{min} < r < r_{max}$, движение является финитным и траектория целиком лежит внутри кольца, ограниченного окружностями $r = r_{min}$ и $r = r_{max}$. Наконец, при $E = 0$ движение частицы инфинитно – ее траектория приходит из бесконечности и уходит в бесконечность.

Найдем дифференциальное уравнение траектории $r = r(\varphi)$. Заметим, что

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt},$$

следовательно, согласно (5.16), (5.19), зависимость $\varphi(r)$ определяется интегралом

$$\varphi = \int \frac{\frac{M_z}{r^2} dr}{\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M_z^2}{r^2}}} = - \int \frac{M_z d\xi}{\sqrt{-M_z^2 \xi^2 + 2\xi m\alpha + 2mE}}, \quad (5.26)$$

где $\xi = \frac{1}{r}$. Выделим в подкоренном выражении $-M_z^2 \xi^2 + 2\xi m\alpha + 2mE$ полный квадрат

$$-M_z^2 \xi^2 + 2\xi m\alpha + 2mE = -M_z^2 \left(\xi - \frac{m\alpha}{M_z^2} \right) + \frac{2mEM_z^2 + m^2 \alpha^2}{M_z^2}$$

и введем новые постоянные

$$p = \frac{M_z^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM_z^2}{m\alpha^2}}. \quad (5.27)$$

Тогда $-M_z^2 \xi^2 + 2\xi m\alpha + 2mE = -M_z^2 \left(\xi - \frac{1}{p} \right) + \frac{M_z^2 \varepsilon^2}{p^2}$ и после элементарного интегрирования выражения

$$\varphi = - \int \frac{d\xi}{\sqrt{-\left(\xi - \frac{1}{p}\right) + \frac{\varepsilon^2}{p^2}}}$$

находим уравнение орбиты в виде

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos \varphi. \quad (5.28)$$

Конкретный вид траектории зависит от значений параметров p, ε , которые определяются положением и скоростью частицы в начальный момент. Выражение (5.28) более привычно выглядит в декартовых координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Возводя в квадрат соотношение $r = p - \varepsilon x$, получаем уравнение кривой второго порядка

$$y^2 + (1 - \varepsilon^2) \left(x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}. \quad (5.29)$$

Как следует из (5.24), (5.27), для финитного движения, когда $U_{fmin} \leq E < 0$, параметр ε меняется в интервале $0 \leq \varepsilon < 1$. Тогда кривая (5.29) есть уравнение эллипса

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1 \quad (5.30)$$

с большой (a) и малой (b) полуосями:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{\alpha}{2E}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M_z}{\sqrt{-2mE}} \quad (5.31)$$

и центром в точке $\left(x_0 = -\frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, 0 \right)$ (рис. 5.4).

Из аналитической геометрии известно, что параметр p и эксцентриситет ε эллипса определяются через полуоси эллипса как

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a}, \quad (5.32)$$

где c – расстояние от центра эллипса до его фокусов в точках F_1 и F_2 . Поскольку $x_0 = -c$, то (5.28) – уравнение эллипса с фокусом в начале координат. Таким образом,

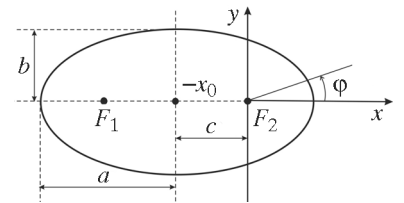


Рис. 5.4

материальная точка движется по эллиптической орбите, центром которой является фокус. Для поля тяготения центр эллиптической траектории – Солнце, что и составляет суть первого закона Кеплера.

В главе 2 мы анонсировали постоянство вектора

$$\vec{A} = \left[m\dot{\vec{r}}, \vec{M} \right] - \frac{\alpha \vec{r}}{r} m \quad (5.33)$$

при движении в центральном поле с потенциальной энергией (5.22). Докажем это утверждение. Из лагранжиана (5.7) с учетом (5.22) находим уравнения движения

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3} \vec{r} \quad (\vec{r} = (x, y, z), r = |\vec{r}|). \quad (5.34)$$

Тогда из формул

$$\frac{d}{dt} \left[m\dot{\vec{r}}, \vec{M} \right] = \left[m\ddot{\vec{r}}, \vec{M} \right] = -\frac{\alpha}{r^3} \left[\vec{r}, \vec{M} \right] = \frac{\alpha m}{r^3} \left(\vec{r} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} r^2 \right)$$

сразу следует закон сохранения для вектора $\vec{A}$:

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = 0.$$

Наличие дополнительно интеграла движения упрощает процедуру интегрирования уравнений движения и позволяет сравнительно просто получить уравнение орбиты. Из (5.33) следует, что вектор $\vec{A}$ перпендикулярен вектору момента импульса $\vec{A} \cdot \vec{M} = 0$ и, следовательно, расположен в плоскости орбиты. Умножая (5.33) скалярно на вектор $\vec{r}$, получаем

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = r \cdot \left[m\dot{\vec{r}}, \vec{M} \right] - \alpha m r = \vec{M} \cdot \vec{M} - \alpha m r = r|A| \cos \theta,$$

где θ – угол между векторами $\vec{A}$ и $\vec{r}$. Отсюда находим уравнение орбиты

$$\frac{M^2}{m\alpha r} = 1 + \frac{|A|}{m\alpha} \cos \theta. \quad (5.35)$$

Если плоскостью орбиты выбрать плоскость $z = 0$, то $\vec{r} = (x(t), y(t))$ и $M^2 = M_z^2$. Поэтому вектор $\vec{A}$ направлен вдоль большой оси эллипса и его длина пропорциональна эксцентриситету ϵ .

Третий закон Кеплера о постоянстве отношения квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит можно вывести, интегрируя уравнение (5.10) по периоду T движения $M_z T = 2mS$.

Поскольку площадь эллипса S равна πab , то период обращения можно записать в виде

$$T = \frac{2\pi abm}{M_z}. \quad (5.36)$$

Подставив сюда выражение для b (5.31) и $E = -\frac{\alpha}{2a}$, получим третий закон Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha}. \quad (5.37)$$

Этот закон тесно связан с преобразованиями подобия (масштабными преобразованиями). Рассмотрим применительно к задаче Кеплера преобразования подобия

$$m \rightarrow \mu' m, \quad t \rightarrow \tau t', \quad \vec{r} \rightarrow \lambda \vec{r}'.$$

После такого преобразования мы переходим к уравнениям движения для материальной точки массы m' в координатах $\vec{r}'$ и времени t' . При этом кинетическая T и потенциальная энергия $U = -\frac{\alpha}{r}$, где $\alpha \sim m$, в лагранжиане (5.12) преобразуются как

$$T \rightarrow \frac{\mu \lambda^2}{\tau^2} T', \quad U \rightarrow \frac{\mu}{\lambda} U'. \quad (5.38)$$

Для того чтобы движение системы (5.12) и преобразованной системы описывалось одинаковыми уравнениями, необходимо, чтобы функции Лагранжа L и L' различались только множителем. Такое требование приводит к условию $\lambda^3 = \tau^2$. Эта формула означает, что отношение периодов зависит только от отношения постоянных и не зависит от отношения масс.

Найдем закон движения частицы по орбите. Параметризуем уравнение эллипса (5.30) параметром $u(t)$:

$$x = a(\cos u - \epsilon), \quad y = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin u. \quad (5.39)$$

Параметр u в астрономии называют *эксцентрической аномалией*. После подстановки (5.39) в закон сохранения z -компоненты момента импульса (5.15) получим соотношение

$$a^2 m \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos u) \dot{u} = M_z,$$

интегрируя которое мы находим зависимость $u(t)$ в виде неявной функции

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (u - \varepsilon \sin u) + t_0. \quad (5.40)$$

С помощью (5.39) полярные координаты в плоскости орбиты можно выразить через параметр u :

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u), \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon}}{\sqrt{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \quad (5.41)$$

Таким образом, чтобы найти положение частицы на орбите в данный момент, необходимо решить трансцендентное относительно параметра u уравнение (5.40), называемое *уравнением*

Кеплера. Поскольку разность $u - \sqrt{\frac{\alpha}{ma^3}}(t - t_0)$ периодична с пе-

риодом 2π , то один из способов решения этой задачи есть разложение в ряд Фурье:

$$u = \xi + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\xi, \quad \xi = \sqrt{\frac{\alpha}{ma^3}}(t - t_0) \quad (5.42)$$

с зависящими от ε коэффициентами c_m . Анализ ряда привел к открытию функций Бесселя и развитию Коши теории функций комплексного переменного [27].

При $E = 0$ параметр $\varepsilon = 1$ и траекторией движения является парабола. При положительных значениях E параметр ε больше единицы и частица движется по одной из ветвей гиперболы. В обоих случаях движение инфинитно. Для движения по таким траекториям можно провести аналогичные вычисления.

Во всех формулах этого параграфа источник силы полагался неподвижным. При применениях их в теории тяготения можно

учесть движение Солнца заменой в формулах массы частицы m на приведенную массу μ (5.5).

В итоге задача двух тел (движение системы из двух материальных точек, взаимодействующих друг с другом с силой, зависящей от относительного расстояния) полностью решается. После редукции задачи к лагранжиану (5.12) наличие двух законов сохранения – энергии E и компоненты M_z момента импульса – позволяет получить решение задачи в квадратурах. Для задачи трех тел наличие классических интегралов движения недостаточно для полного интегрирования задачи. В течение двух столетий многие выдающиеся математики и физики мира искали недостающие интегралы движения для астрономической задачи трех тел. Пуанкаре доказал, что остающиеся интегралы движения являются трансцендентными функциями от координат и импульсов частиц. К настоящему времени известны только частные решения в задаче n тел, решение этой задачи возможно только численными методами.

Глава 6. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Гамильтон был, по-видимому, наделен каким-то удивительным даром проникать в самую суть – удивительнейшим даром, из тех, которым когда-либо обладал математик. Он нашел для уравнений механики такую форму записи, значение которой суждено было понять лишь спустя столетие.

П.А. Дирак

6.1. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

Уравнения Лагранжа второго рода – дифференциальные уравнения второго порядка, в которых независимыми переменными являются обобщенные координаты $q_i(t)$ и скорости $\dot{q}_i(t)$. Такое описание, однако, не единственно возможное. Хорошо известно, что систему из s дифференциальных уравнений второго порядка можно преобразовать в систему $2s$ уравнений первого порядка. Например, уравнение для одномерного движения $m\ddot{x} = F(x)$ в механике Ньютона после введения новой переменной $y = \dot{x}$ записывается в виде системы двух уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = F(x)/m. \end{cases}$$

Однако такая процедура замены скорости на новую переменную оказалась в механике малопродуктивной. Тем не менее идея понижения порядка уравнения за счет удвоения числа неизвестных лежит в основе метода Гамильтона. Переход от механики Лагранжа к механике Гамильтона сводится к выбору новых независимых переменных, а именно – обобщенных координат и соответствующих им обобщенных импульсов: $q_1, \dots, q_s; p_1, \dots, p_s$. При этом, как и в механике Лагранжа, состояние системы определяется одной функцией.

Рассмотрим механическую систему, описываемую функцией Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ от независимых переменных $q, \dot{q}$. Ее полный дифференциал функции координат, скоростей и времени равен

$$dL = \sum_{i=1}^s \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.1)$$

Учитывая, что по определению $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, запишем согласно

уравнениям Лагранжа $\frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i = \dot{p}_i$ дифференциал в виде

$$dL = \sum_{i=1}^s \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.2)$$

Далее перепишем второй член (6.2) в виде

$$\sum_{i=1}^s p_i d\dot{q}_i = \sum_{i=1}^s d(p_i \dot{q}_i) - \sum_{i=1}^s \dot{q}_i dp_i,$$

тогда

$$d\left(\sum_{i=1}^s p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^s (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.3)$$

Из формулы для обобщенного импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q, \dot{q}_i, t) \quad (6.4)$$

выразим обобщенные скорости через обобщенные импульсы, координаты и время. Из теорем о неявной функции известно, что при условии

$$\det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_k} \right\| \neq 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, s)$$

система (6.4) алгебраически разрешима относительно скоростей

$$\dot{q}_i = g_i(q, p, t) \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.5)$$

Рассмотрим далее выражение $\sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$ в левой части уравнения (6.3) и заменим в нем обобщенные скорости соотно-

шением (6.5). Полученное выражение носит название *функции Гамильтона* (или *гамильтониана*):

$$H(q, p, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)_{\dot{q}_i \rightarrow g_i(q, p, t)}. \quad (6.6)$$

Из сравнения дифференциала этой функции

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^s \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

с соотношением (6.3) с необходимостью следуют выражения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (6.7)$$

и уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.8)$$

Уравнения движения (6.7) для переменных p и q , называются *уравнениями Гамильтона*. Они составляют систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $p(t)$ и $q(t)$, заменяющих собой s уравнений метода Лагранжа. Как и лагранжиан в лагранжевой механике, гамильтониан определяет систему уравнений (6.7). Прделанное преобразование от функции с независимыми переменными $q, \dot{q}, t$ к функции с независимыми переменными q, p, t называется *преобразованием Лежандра*. Оно осуществляется только операциями дифференцирования и исключением переменных. Ввиду простоты и симметрии уравнения (6.7) называют также *каноническими*. Новая более абстрактная гамильтонова форма изложения механики оказалась исключительно продуктивной для построения новых теорий, поиска интегралов движения. Равноправность координат и импульсов в этих выражениях является важным свойством, активно использующимся в квантовой механике и статистической физике. Одно из преимуществ гамильтоновой механики состоит в том, что после расширения количества независимых переменных увеличиваются возможности выбора удобных обобщенных координат и импульсов, чтобы получить более простые

канонические уравнения. Уравнения Гамильтона оказываются инвариантными к обширному классу непрерывных преобразований (канонических преобразований), на теории которых мы остановимся позднее.

Функция Гамильтона имеет простой физический смысл. Энергия системы была нами определена через функцию Лагранжа как

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \quad (\text{см. (2.95)}).$$

Снова воспользовавшись определением $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, получаем $E = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$, или *энергию*

системы, выраженную через координаты и импульсы. Таким образом, если $H(q, p)$ явно не зависит от времени, то на решениях уравнений движения гамильтониан совпадает с полной энергией системы и является интегралом движения.

Пусть функция Гамильтона не зависит от одной из координат, например q_i :

$$H = H(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_s, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, q_s), \quad (6.9)$$

тогда, как и в лагранжевом формализме, координата q_i называется *циклической*. Поэтому

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

и обобщенный импульс p_i не зависит от времени и в выражении для функции Гамильтона (6.9) является постоянным. В итоге мы получаем важную теорему. Пусть q_i — *циклическая координата в динамической системе с s степенями свободы*. Тогда $p_i = c$ — *интеграл движения системы*. При этом изменение остальных координат со временем происходит также, как в системе с $s - 1$ координатами $q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, q_s$ и функцией Гамильтона $H(p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, c, p_{i+1}, \dots, p_s, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, q_s)$, зависящей от параметра c .

Следствие. Всякая консервативная система с двумя степенями свободы, имеющая циклическую координату, интегрируема в квадратурах, т. е. возможно получить точное решение в виде обращения некоторого интеграла.

Рассмотрим несколько примеров на составление функций Гамильтона.

Пример 1. Система из s частиц с массами m_i ($i = 1, 2, \dots, s$), потенциальной энергией $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_s)$ и функцией Лагранжа

$$L = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_s).$$

Составим функцию Гамильтона. С этой целью найдем импульсы

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

и выразим скорости частиц через них:

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\vec{p}_i}{m_i}. \quad (6.10)$$

Подстановка (6.10) в лагранжиан системы дает гамильтониан в виде

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i - L = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i - \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_s) = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} - \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_s) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_s) \end{aligned} \quad (6.11)$$

как сумма кинетической и потенциальной энергии. После дифференцирования по времени первой группы уравнения Гамильтона

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} = \frac{\vec{p}_i}{m_i}$$

и подстановки в них выражений $\dot{\vec{p}}_i$, взятых из второй группы

$$\dot{\vec{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i},$$

получаем уравнения Ньютона.

Пример 2. Сферический маятник. Для материальной точки в поле сил тяжести, находящейся на постоянном расстоянии l от точки подвеса, функция Лагранжа в сферических координатах (начало координат расположено в точке подвеса) имеет вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2 \Theta \dot{\Phi}^2) \Big|_{r=l=\text{const}} + mgl \cdot \cos \Theta = \\ &= \frac{ml^2}{2} (\dot{\Theta}^2 + \sin^2 \Theta \dot{\Phi}^2) + mgl \cdot \cos \Theta. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Находим вначале обобщенные импульсы

$$p_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} = ml^2 \dot{\Theta}; \quad p_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = ml^2 \sin^2 \Theta \dot{\Phi},$$

и выражаем обобщенные скорости через обобщенные импульсы

$$\dot{\Theta} = \frac{p_\Theta}{ml^2}; \quad \dot{\Phi} = \frac{p_\Phi}{ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

После подставляем обобщенные скорости в лагранжиан

$$\begin{aligned} L(\Theta, p_\Theta, \Phi, p_\Phi) &= \frac{ml^2}{2} \left(\left(\frac{p_\Theta}{ml^2} \right)^2 + \sin^2 \Theta \cdot \left(\frac{p_\Phi}{ml^2 \sin^2 \Theta} \right)^2 \right) + \\ &+ mgl \cdot \cos \Theta = \frac{1}{2ml^2} \left[p_\Theta^2 + \frac{p_\Phi^2}{\sin^2 \Theta} \right] + mgl \cdot \cos \Theta, \end{aligned}$$

находим функцию Гамильтона согласно общей формуле

$$\begin{aligned} H(q, p) &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L(q, p) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} \dot{\Theta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} \dot{\Phi} - L(\Theta, p_\Theta, \Phi, p_\Phi) = \\ &= \frac{1}{2ml^2} \left(p_\Theta^2 + \frac{p_\Phi^2}{\sin^2 \Theta} \right) - mgl \cdot \cos \Theta. \end{aligned}$$

В итоге уравнения Гамильтона записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= \frac{P_{\Theta}}{ml^2}; \quad \dot{\Phi} = \frac{P_{\Phi}}{ml^2 \sin^2 \Theta}, \\ \dot{P}_{\Theta} &= \frac{1}{ml^2} \left(\frac{p_{\Phi}^2 \cos \Theta}{\sin^3 \Theta} \right) - mgl \cdot \sin \Theta, \\ \dot{P}_{\Phi} &= \frac{P_{\Phi}}{ml^2 \sin^2 \Theta}, \\ \dot{P}_{\Phi} &= -\frac{\partial H}{\partial \Phi} = 0.\end{aligned}$$

Так как Φ – циклическая координата, то $p_{\Phi}(t)$ – постоянная величина. После интегрирования замкнутой системы первых двух уравнений координата Φ определяется прямым интегрированием уравнения

$$\dot{\Phi} = \frac{P_{\Phi}}{ml^2 \sin^2 \Theta}.$$

Как и уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона могут быть выведены из условия минимальности действия, если из уравнения (6.6) выразить лагранжиан L системы через H :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i dq_i - H(q, p) dt \quad (6.13)$$

и рассматривать координаты и импульсы как независимо варьируемые величины. При таком варьировании считаем, что зависимость импульсов от обобщенных координат, скоростей и времени определяется только уравнениями движения. При $t = t_1$ и $t = t_2$ положение системы полагается заданным и вариации обобщенных координат в эти моменты обращаются в нуль:

$$\delta q_j(t = t_1) = 0,$$

$$\delta q_j(t = t_2) = 0.$$

Запишем вариацию действия (6.13)

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(p_i \frac{dq_i}{dt} - H \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\delta p_i \frac{dq_i}{dt} + p_i \delta \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt.\end{aligned}$$

Проинтегрируем второе слагаемое в последней строке по частям

$$\sum_i \int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \frac{dq_i}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \frac{d}{dt} \delta q_i dt = \sum_i p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} p_i \delta q_i dt.$$

В силу равенства нулю вариации координаты на границе интегрирования $p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$, следовательно:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\delta p_i \frac{dq_i}{dt} - \frac{dp_i}{dt} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt = \\ &= \sum_i \int_{t_1}^{t_2} \delta p_i \left(\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_i \left(\frac{d}{dt} p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dt.\end{aligned} \quad (6.14)$$

Как и ранее, последнее выражение может быть равно нулю при произвольных вариациях δp_i и δq_i только в случае равенства нулю подынтегральных выражений в скобках. В итоге мы получаем канонические уравнения Гамильтона (6.7).

6.2. УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

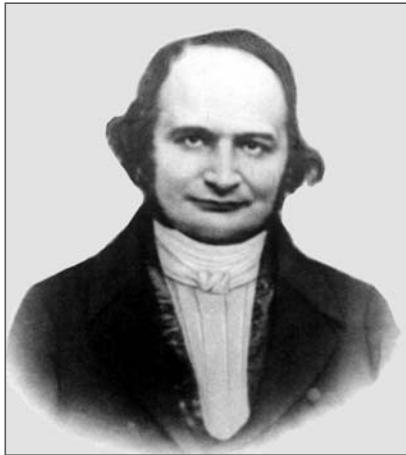
Теорема Якоби сводит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных. Может показаться удивительным, что такое сведение более простого к более сложному составляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем оказывается, что это – самый сильный из существующих методов точного интегрирования, и многие задачи, решенные Якоби, вообще не поддаются решению другими методами.

*В.И. Арнольд.
Математические методы
классической механики*

Рассмотрим механическую систему с голономными связями, которая описывается обобщенными координатами $q_1, \dots, q_s$. При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (6.15)$$

взятый между двумя заданными положениями $q(t_1)$ и $q(t_2)$, которые система занимает в заданные моменты t_1 и t_2 . При варьировании дей-



Карл Густав Яков Якоби (нем. Carl Gustav Jacob Jacobi; 10 декабря 1804, Потсдам – 18 февраля 1851, Берлин) – немецкий математик. Усовершенствовал метод Гамильтона интегрирования дифференциальных уравнений динамики

ствия сравнивались значения этого интеграла для близких траекторий с одними и теми же значениями $q(t_1)$ и $q(t_2)$. Условие минимальности интеграла действия приводило к уравнениям Лагранжа–Эйлера. Их общее решение зависит от $2s$ постоянных интегрирования

$$q_i = q_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{2s}), \quad (6.16)$$

которые однозначно определяются начальными значениями координат и скоростей при $t = t_1$. Подставим эти решения в выражение для действия (5.15) и проинтегрируем по времени. В результате получим действие

$$S = S(t_1, t_2, C_1, C_2, \dots, C_{2s}) \quad (6.17)$$

как однозначную функцию начальных значений обобщенных координат и скоростей, начального и конечного значений времени. Положим в решениях (6.16) время t равным t_0 и t_1 :

$$q_i(t_1) = q_i(t_1, C_1, C_2, \dots, C_{2s}), \quad (6.18)$$

$$q_i(t_2) = q_i(t_2, C_1, C_2, \dots, C_{2s}),$$

выразим отсюда постоянные $C_1, C_2, \dots, C_{2s}$ как функции t_2, t_1 значений обобщенных координат в эти моменты и подставим их в (6.17). Тогда действие можно рассматривать как функцию $2s + 2$ аргументов

$$S = S(t_2, t_1, q(t_1), q(t_2))$$

начального и конечного моментов, начальных и конечных значений обобщенных координат. Откажемся от условия, что конечный момент t_2 фиксирован, и будем считать его переменным (рис. 6.1). Заменим t_2 на t , $q(t_2)$ на $q(t)$. Тогда действие будет функцией времени, обобщенных координат $q_i(t)$ и некоторых постоянных интегрирования:

$$S = S(t, q(t), t_1, q(t_1)). \quad (6.19)$$

В такой форме действие называется *главной функцией Гамильтона* и играет фундаментальную роль в теории интегрирования уравнений механики.

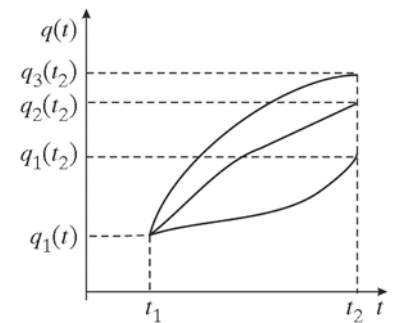


Рис. 6.1

Чтобы выяснить смысл производных главной функции Гамильтона, рассмотрим вариацию действия

$$S = \int_{t_1}^t L(q, \dot{q}, t) dt \quad (6.20)$$

в другом способе варьирования. Будем рассматривать S как величину, характеризующую движение по истинным траекториям, и сравним ее значения для траекторий, имеющих общее начало $q(t_1) = q_1$, но проходящих в момент t через разные положения. Иными словами, рассмотрим изменение действия, когда действительное движение по траектории $q_i(t)$ изменяется на действительное движение по траектории $q_i(t) + \delta q_i(t)$. Под действительными движениями понимаем движения, когда траектории $q_i(t)$

удовлетворяют уравнениям Лагранжа $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Повторяя вычисления параграфа 2.7.2, получаем

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^t L(q, \dot{q}, t) dt = \sum_i \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^t \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i dt + \int_{t_1}^t \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^t + \int_{t_1}^t \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Поскольку между начальными и конечными положениями система движется по действительной траектории, удовлетворяющей уравнениям Лагранжа, интеграл в последней строке обращается

в нуль. Заменяя $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ на $p_i(t)$ и учитывая, что в силу фиксированности начального положения $\delta q_i(t_1) = 0$, получим соотношение

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i, \quad (6.22)$$

которое называют *принципом переменного действия*.

Кроме того, вариация действия как главной функции Гамильтона в форме

$$S = S(t_1, t, q(t), q(t_1)) \quad (6.23)$$

по конечному положению системы равна

$$\delta S = \delta S(t_0, t, q(t), q(t_0)) = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t). \quad (6.24)$$

Из этих соотношений следует, что частные производные от главной функции Гамильтона по обобщенным координатам равны обобщенным импульсам

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (6.25)$$

Заметим, что по самому определению действия (6.15)

$$\frac{dS}{dt} = L. \quad (6.26)$$

Однако, если рассматривать действие в форме главной функции Гамильтона (6.19), то время содержится в S как явно, так и неявно через обобщенные координаты. Поэтому имеем

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}.$$

Заменяя здесь $\frac{dS}{dt}$ на L и учитывая (5.26), получаем

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i,$$

так что с помощью функции Гамильтона $H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$

это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t). \quad (6.27)$$

Из системы $s + 1$ уравнений (6.25), (6.27) можно исключить импульсы, подставив выражение (6.25) для импульсов в функцию Гамильтона. В результате получим выражение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(q_1, q_2, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0, \quad (6.28)$$

которому должна удовлетворять функция $S(q, t)$. Это нелинейное уравнение в частных производных первого порядка называется *уравнением Гамильтона–Якоби* для главной функции Гамильтона.

Приведем пример его использования при движении частицы в потенциальном поле $U(r)$. Функция Гамильтона, записанная в декартовых координатах, имеет в этом случае вид

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}).$$

Учитывая, что

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial S}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial S}{\partial z},$$

получаем

$$H = \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + U(\vec{r}).$$

В итоге для рассматриваемой системы уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка относительно функции $S(\vec{r}, t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{(\vec{\nabla} S)^2}{2m} + U(\vec{r}). \quad (6.29)$$

6.3. ТЕОРЕМА ЯКОБИ

Математика принадлежит к числу тех наук, которые ясны сами по себе.

Господа, для гауссовой строгости у нас нет времени.

К.Г.Я. Якоби

Известно, что общее решение дифференциального уравнения в частных производных первого порядка зависит от произвольной функции. Однако главная функция Гамильтона зависит от времени, $q_1, \dots, q_s$ и $s + 1$ независимых постоянных интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$. Такое решение уравнения (6.28) в частных производных первого порядка называется *полным интегралом*. Он охватывает лишь «часть» общего решения. Поскольку выражение (6.28) не содержит явно функцию S , то одна из постоянных интегрирования, например α_{s+1} , в полный интеграл входит аддитивно:

$$S = W(t, q_1, \dots, q_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s) + \alpha_{s+1}. \quad (6.30)$$

Как следует из теории дифференциальных уравнений, это выражение есть полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, если выполняются условия:

а) постоянные $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ в него входят так, что смешанный определитель

$$\det \left[\frac{\partial S}{\partial \alpha_i \partial q_j} \right] \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, s) \quad (6.31)$$

отличен от нуля;

б) формула (6.30) тождественно удовлетворяет уравнению (6.28) при любых значениях (q, t, α) .

Если нам известно решение канонических уравнений, то с помощью процедуры, описанной в начале предыдущего параграфа, мы можем найти в явном виде главную функцию Гамильтона, т. е. полный интеграл уравнения (6.28).

Допустим теперь, что нам удалось решить уравнение Гамильтона–Якоби. Возникает вопрос, как с помощью функции S (6.30) проинтегрировать уравнение механики. Решение этой обратной задачи дает *теорема Якоби*.

Пусть (6.30) есть полный интеграл (уравнение Гамильтона–Якоби), тогда система уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (6.32)$$

где β_i – новые произвольные постоянные, совместно с системой уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (6.33)$$

определяет функции

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad (6.34)$$

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t), \quad (6.35)$$

которые являются решениями канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (6.36)$$

Для доказательства теоремы заметим вначале, что соотношение (6.32) при условии (6.31) определяет функции $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$. Тогда вид функций $p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$ сразу следует из уравнения (6.33). Покажем, что установленные таким образом величины p, q удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Функция (6.30) удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби при произвольных значениях постоянной α . Подставим ее в это уравнение и продифференцируем полученное тождество по α_i ($i = 1, 2, \dots, s$), учитывая, что кроме S постоянная α_i входит еще в производ-

ные $\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i$:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial t} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_i \partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0. \quad (6.37)$$

Кроме того, уравнение (6.32) тождественно удовлетворяется, если вместо функций q_i подставить их значение $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$. После такой подстановки и взятия полной производной по времени получаем

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial \alpha_i} \dot{q}_j = 0. \quad (6.38)$$

Из перестановочности операторов дифференцирования и условия (6.31) следует одна группа уравнений Гамильтона

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right)}{\partial p_j}. \quad (6.39)$$

Чтобы получить другую группу, продифференцируем (6.33) по времени

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j. \quad (6.40)$$

Продифференцировав уравнение Гамильтона–Якоби по аргументу q_i , находим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} = 0. \quad (6.41)$$

Из сравнения уравнений (6.40), (6.41) с учетом (6.39) получаем вторую группу канонических уравнений. В итоге теорема Якоби устанавливает связь между интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.36) и уравнением в частных производных первого порядка (6.28).

Можно убедиться, что полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби совпадает с действием (2.87) по Гамильтону. Согласно (6.28), (6.33), полная производная по времени выражения (6.20) равна

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = -H + \sum_i p_i \dot{q}_i = L,$$

следовательно, величина

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

совпадает с (2.87).

В итоге задача интегрирования канонических уравнений Гамильтона заменяется эквивалентной задачей поиска полного интеграла уравнения Гамильтона–Якоби, что позволяет интегрировать многие задачи механики только этим методом. Для решения уравнения Гамильтона–Якоби существуют определенные методы: разделение переменных и т. д. [1, 2, 16, 45, 57, 72, 79]. Если гамильтониан системы не зависит явно от времени $H = H(p, q)$, то метод Гамильтона–Якоби может быть упрощен. Зависимость от времени в S сводится к слагаемому

$$S = -Et + S_0(q),$$

и уравнение для укороченного действия $S_0(q)$ принимает простой вид

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}, q\right) = E. \quad (6.42)$$

6.4. СКОБКИ ПУАССОНА

Я плохо помнил, что такое скобка Пуассона, и не знал для нее точной формулы. В моей голове были лишь смутные воспоминания. Но скобка Пуассона таила в себе замечательные возможности, и я подумал, что, может быть, мне удастся сделать великое открытие.

*П. Дирак.
Воспоминания о необычайной эпохе*

С помощью уравнений Гамильтона найдем полную производную по времени от произвольной функции $f(p, q, t)$ (например момента импульса) $\dot{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$. Прямыми вычислениями получаем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Подставив сюда вместо $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ их выражения из уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

имеем

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (6.43)$$

Для любой пары функций $f_1(p, q, t), f_2(p, q, t)$ определим операцию

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial f_1}{\partial p_i} \frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{\partial f_1}{\partial q_i} \frac{\partial f_2}{\partial p_i}, \quad (6.44)$$

которая двум функциям f_1, f_2 ставит в соответствие третью $f_3 = \{f_1, f_2\}$, зависящую от координат и импульсов. Она называется **скобкой Пуассона**. Тогда уравнение движения любой физической величины записывается в компактном виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \quad (6.45)$$

Симеон-Дени Пуассон (фр. Siméon-Denis Poisson; 21 июня 1781, Питивье, Франция – 25 апреля 1840, Париж) – французский физик и математик



В частности, уравнения Гамильтона записываются как

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\} \quad \dot{q}_i = \{H, q_i\}. \quad (6.46)$$

Именно обобщение уравнений Гамильтона в виде уравнения движения со скобкой Пуассона (4.46) с привлечением понятия об операторах динамических переменных выводит механику частиц в микромир (квантовую механику).

Запишем уравнения Гамильтона (6.7) в *симплектических* координатах. С этой целью для системы с s степенями свободы введем $2s$ -мерный вектор в фазовом пространстве с координатами (p, q) . Пусть независимая переменная $\xi = (p, q)$, называемая симплектической, объединяет все импульсы и обобщенные координаты: ξ_μ ($\mu = 1, 2, \dots, 2s$), $\xi_\mu = p_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, s$), $\xi_\mu = q_\mu$ ($\mu = s + 1, s + 2, \dots, 2s$).

Введем специальную матрицу J размерности $2s \times 2s$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ +E & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.47)$$

где E – единичная матрица s порядка. Введем важное правило суммирования Эйнштейна. При записи сумм типа (6.44) индексы, по которым ведется суммирование, повторяются дважды. Формулы будут иметь более компактный вид, если принять условие, что знак суммы $\sum$ подразумевается в одночленном выражении каждый раз, когда индекс *повторяется*. Обозначение повторяющихся индексов в выражении можно произвольно менять («немой» индекс), если новые индексы не будут совпадать с обозначением других индексов.

Согласно этому правилу, здесь и далее мы используем за-

пись $\sum_{i=1}^{2s} a_\mu b_\mu = a_\mu b_\mu = a_\nu b_\nu$, опуская знак суммы при суммировании по повторяющимся индексам.

Тогда уравнения Гамильтона записываются в виде

$$\dot{\xi}_\mu = J_{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial \xi_\nu} \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2s). \quad (6.48)$$

Действительно, при ($\mu = 1, 2, \dots, s$) мы получаем $\dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial q_\mu}$ и

при ($\mu = s + 1, s + 2, \dots, 2s$) уравнения $\dot{q}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial p_\mu}$. С помощью

матрицы J можно записать скобки Пуассона в виде

$$\{f_1, f_2\} = -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\nu}. \quad (6.49)$$

Скобки Пуассона обладают следующими свойствами.

1. Антикоммутативность

$$\{f_1, f_2\} = -\frac{\partial f_1}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\nu} J_{\nu\mu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\mu} = -\{f_2, f_1\} \quad (6.50)$$

вследствие антисимметричности матрицы J ($J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$).

2. Линейность, аддитивность или дистрибутивность

$$\{(\alpha f_1 + \beta f_2), g\} = \alpha \{f_1, g\} + \beta \{f_2, g\}, \quad (6.51)$$

которые очевидны в силу линейности операции дифференцирования.

3. Удовлетворяют правилу Лейбница

$$\begin{aligned} \{(f_2, f_1), g\} &= -\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \xi_\nu} = -f_1 \frac{\partial(f_2)}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \xi_\nu} - \\ &- f_2 \frac{\partial(f_1)}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial \xi_\nu} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

4. Имеют простой вид

$$\{\xi_\lambda, \xi_\gamma\} = -\delta_{\lambda\mu} J_{\mu\nu} \delta_{\gamma\nu} = -J_{\lambda\gamma} \quad (6.53)$$

для симплектических координат.

5. Подчиняются правилу дифференцирования

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{f_1, f_2\} &= -\frac{\partial^2 f_1}{\partial t \partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial^2 f_2}{\partial t \partial \xi_\nu} = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f_1, f_2 \right\} + \left\{ f_1, \frac{\partial}{\partial t} f_2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

6. Удовлетворяют тождеству Якоби

$$\{\{f_1, f_2\}, f_3\} + \{\{f_2, f_3\}, f_1\} + \{\{f_3, f_1\}, f_2\} = 0, \quad (6.55)$$

аналогичному тождеству

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

для векторного произведения трехмерных векторов. Наиболее просто оно доказывается непосредственным вычислением в симплектических координатах. Согласно определению скобок Пуассона, выражение (6.55) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \{f_1, f_2\} \right) J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_\beta} - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \{f_2, f_3\} \right) J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\beta} - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \{f_3, f_1\} \right) J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\alpha} J_{\mu\nu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\nu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_\beta} + \\ & + \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\nu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\alpha} J_{\mu\nu} \frac{\partial f_3}{\partial \xi_\nu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\beta} + \\ & + \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\nu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\alpha} J_{\mu\nu} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_\nu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\beta} + \\ & + \frac{\partial f_3}{\partial \xi_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\nu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\beta}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Первое слагаемое в правой части этого выражения после замены $\mu \leftrightarrow \nu$ и $\alpha \leftrightarrow \beta$ записывается в виде

$$\frac{\partial f_3}{\partial \xi_\mu} J_{\nu\beta} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\nu} J_{\alpha\mu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\beta}.$$

Следующая замена $\alpha \leftrightarrow \nu$ преобразует его в выражение

$$\frac{\partial f_3}{\partial \xi_\mu} J_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\nu} J_{\nu\mu} \frac{\partial f_2}{\partial \xi_\beta},$$

которое вследствие антисимметричности матрицы J сокращается с последним слагаемым в (6.56). Сокращение остальных слагаемых происходит подобным образом. В результате вся сумма оказывается равной нулю.

Найдем скобки Пуассона для компонент момента импульса $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ материальной точки. Из формулы (6.44) после прямых вычислений следует, что

$$\{M_x, M_y\} = -M_z, \quad \{M_y, M_z\} = -M_x, \quad \{M_z, M_x\} = -M_y. \quad (6.57)$$

Определение скобок Пуассона (пуассоновых структур) в форме (6.49) не является единственно возможным. С современным состоянием теории пуассоновых структур – одной из актуальных проблем современной теоретической физики, их приложениями к различным проблемам механики и связями с некоторыми областями современной математики читатель может познакомиться по монографиям [24] и цитированной там литературе.

6.5. ТЕОРЕМА ПУАССОНА

Это одна из замечательнейших теорем всего интегрального исчисления.

К.Г.Я. Якоби

В гамильтоновой механике, как и в лагранжевой, интегралами движения называются функции динамических переменных p и q , которые остаются постоянными при движении системы.

Если функция $f(p, q, t)$ является интегралом движения, то $\frac{df}{dt} = 0$.

Из (6.43) видим, что необходимое для этого условие записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0. \quad (6.58)$$

Если интеграл движения не зависит от времени явно, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, то необходимым и достаточным условием, чтобы величина $f(p, q)$ была интегралом движения, является условие

$$\{H, f\} = 0. \quad (6.59)$$

Говорят, что два интеграла движения $f_1(p, q, t)$ и $f_2(p, q, t)$ находятся в *инволюции*, если скобка Пуассона между ними тождественно равна нулю:

$$\{f_1, f_2\} = 0. \quad (6.60)$$

С помощью тождества Якоби нетрудно доказать теорему Пуассона. Если функции $f_1(p, q, t)$, $f_2(p, q, t)$ являются интегралами канонических уравнений, то их скобка Пуассона $\{f_1, f_2\}$ также будет интегралом движения.

Действительно, запишем уравнение движения для скобки Пуассона

$$\frac{d}{dt}\{f_1, f_2\} = \frac{\partial}{\partial t}\{f_1, f_2\} + \{H, \{f_1, f_2\}\}. \quad (6.61)$$

Воспользуемся формулой (6.54) для частной производной по времени от скобки Пуассона и тождеством Якоби в виде

$$\{f_1, \{f_2, H\}\} + \{f_2, \{H, f_1\}\} + \{H, \{f_1, f_2\}\} = 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f_1, f_2\} &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2 \right\} + \left\{ f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right\} - \\ &- \{f_1, \{f_2, H\}\} - \{f_2, \{H, f_1\}\}. \end{aligned}$$

Сгруппировав члены и воспользовавшись свойствами антикоммутативности и линейности, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f_1, f_2\} &= \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial t}, f_2 \right\} + \{\{H, f_1\}, f_2\} + \left\{ f_1, \frac{\partial f_2}{\partial t} \right\} + \\ &+ \{f_1, \{H, f_2\}\} = \left\{ \frac{df_1}{dt}, f_2 \right\} + \left\{ f_1, \frac{df_2}{dt} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что если $\frac{df_1}{dt} = 0$ и $\frac{df_2}{dt} = 0$, т. е. f_1, f_2 являются инте-

гралами движения, то и $\{f_1, f_2\}$ есть интеграл движения, что доказывает теорему Пуассона. Хотя, применяя ее, мы всегда будем получать интеграл движения, не следует забывать, что он может оказаться равным нулю или просто функцией исходных интегралов f_1 и f_2 . Только при специальном выборе независимых интегралов в особых динамических системах при помощи скобок Пуассона можно получить новый интеграл движения.

6.6. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Всякий раз, когда вам приходится иметь дело с некоторым объектом, наделенным структурой, попытайтесь определить преобразования, оставляющие без изменения все структурные соотношения. Вы можете рассчитывать на то, что на этом пути вам удастся проникнуть глубоко во внутреннее строение объекта.

Г. Вейль

В главе 3 мы показали, что уравнения Лагранжа ковариантны при точечных преобразованиях одних обобщенных координат q к другим независимым обобщенным координатам Q . Новые координаты являются произвольными функциями старых координат

$$Q_i = Q_i(q_1, q_2, \dots, q_s) \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (6.62)$$

Поскольку уравнения Гамильтона симметричны по координатам и импульсам, то одно из преимуществ гамильтоновой

механики – возможность расширить множество преобразований на $2s$ независимых переменных и рассмотреть преобразования $p \rightarrow P, q \rightarrow Q$, где

$$Q_i = Q_i(p, q, t), \quad P_i = P_i(p, q, t) \quad (6.63)$$

являются некоторыми функциями от старых координат и импульсов. Если мы подставим эти выражения в уравнения Гамильтона, то их форма может измениться. Найдем такие преобразования обобщенных координат и импульса, при которых форма уравнений Гамильтона не меняется. Они называются *каноническими* и играют фундаментальную роль в классической и квантовой механике. Иными словами, потребуем, чтобы при замене

$$p_i = p_i(P, Q, t), \quad q_i = q_i(P, Q, t) \quad (6.64)$$

уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q_i} \quad (6.65)$$

снова принимали вид

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad (6.66)$$

где $H' = H'(P, Q)$ – новая функция Гамильтона в новых координатах и импульсах. Важность таких преобразований состоит в возможности преобразования гамильтоновой системы в систему с более простым гамильтонианом. Существование канонических преобразований, связывающих новые координаты и импульсы со старыми, не отличает в гамильтоновом методе обобщенные координаты от обобщенных импульсов. Поэтому в гамильтоновом методе переменные p и q называются просто *канонически сопряженными величинами*. Отметим, что принцип минимальности функции действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum [p_i, \dot{q}_i - H(p, q)] dt \right)$$

приводит к уравнениям Гамильтона в старых переменных (6.65). Но из того же принципа для действия в новых переменных

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sum [P_i, \dot{Q}_i - H'(P, Q)] dt$$

должны следовать уравнения (6.66). Поэтому (6.65) и (6.66) могут быть одновременно справедливыми, если выполняется соотношение

$$\sum_i (p_i, \dot{q}_i - H) dt = c \left(\sum_i (P_i, \dot{Q}_i - H') dt \right) + dF_1, \quad (6.67)$$

где c – произвольная постоянная и dF_1 – полный дифференциал произвольной функции координат и времени. Поскольку

ку $\int_{t_1}^{t_2} dF_1 = F_1(q, Q, t) \Big|_{t_1}^{t_2}$ и значения обобщенных координат на

концах интервала не меняются, то при варьировании действия вариация $\delta F_1(q, Q, t) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$ и не вносит вклад в δS . Функция F_1

называется *производящей функцией канонического преобразования*. Для *универсальных* канонических преобразований постоянная $c = 1$, и далее мы будем рассматривать только такие преобразования. Тогда из соотношения

$$\sum p_i dq_i - H dt = \sum P_i dQ_i - H' dt + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt$$

получаем условия

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}; \quad (6.68)$$

$$P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}; \quad (6.69)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (6.70)$$

при которых преобразование (6.63) является каноническим. Функция $F_1(q, Q, t)$ определяет полностью вид канонических преобразований. При заданном ее виде с помощью (6.68) можно установить все Q как функции p, q, t , т. е. получить первое уравнение (6.63). Подставив эти значения Q в (6.69), найдем зависимость новых импульсов $P_i = P_i(p, q, t)$ от старых переменных. Тогда уравнение

$$H'(P, Q, t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t} = H\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}, q, t\right) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}$$

после подстановки в левую часть выражений старых координат и импульсов через новые определяет новую функцию Гамильтона, для которой справедливы формулы (6.66).

Производящая функция может зависеть не только от переменных (q, Q) . Так как старые и новые координаты связаны соотношениями (6.63), то производящие функции канонического преобразования в этих случаях могут зависеть только от наборов

$$(q, Q, t), (p, Q, t), (q, P, t), (p, Q, t). \quad (6.71)$$

Если независимыми переменными являются (p, Q, t) , то основное тождество (6.67), определяющее каноническое преобразование, приводится к виду

$$\begin{aligned} \sum_i p_i dq_i - H dt &= \sum_i P_i dQ_i - H' dt + dF_1 = \\ &= \sum_i -dP_i Q_i + d(F_1 + P_i Q_i) - H' dt = \sum_i -dP_i Q_i + dF_2 - H' dt, \end{aligned}$$

где $F_2(q, P) = F_1 + \sum P_i Q_i$ — другая производящая функция. С ее помощью можно задавать другое каноническое преобразование в виде

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}. \quad (6.72)$$

Преобразование от переменных (q, Q, t) к (p, Q, t) и связанное с ним преобразование производящих функций есть преобразование Лежандра. С его помощью можно ввести производящие

функции $F_3(q, P, t), F_4(p, Q, t)$. Для производящей функции $F_5(q, p, t)$ канонические преобразования приобретают усложненный вид, но позволяют найти новые фундаментальные свойства канонических преобразований. После подстановки

$$P_i = P_i(p, q, t), \quad Q_i = Q_i(p, q, t) \quad (6.73)$$

в основное соотношение

$$\sum_i (p_i dq_i) - H dt = \sum_i (P_i dQ_i) - H' dt + dF_5 \quad (6.74)$$

получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = p_j - \frac{\partial F_5}{\partial q_j}; \quad (6.75)$$

$$\sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = p_j - \frac{\partial F_5}{\partial p_j}; \quad (6.76)$$

$$H' = H + \frac{\partial F_5}{\partial t} + \sum_i P_i \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \quad (6.77)$$

При заданных функциях H, H' эту систему можно рассматривать как уравнения для определения функции $F_5(q, p, t)$. Для решения необходимы условия Фробениуса

$$\frac{\partial^2 F_5}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 F_5}{\partial p_i \partial p_j}, \quad \frac{\partial^2 F_5}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 F_5}{\partial q_i \partial q_j},$$

$$\frac{\partial^2 F_5}{\partial q_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 F_5}{\partial p_i \partial q_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s$$

и аналогичные равенства смешанных производных от функции $F_5(q, p, t)$ по времени и q , по t и p . Продифференцируем уравнение (6.75) по q_k :

$$\sum_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + \sum_i P_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k \partial q_j} = - \frac{\partial^2 F_5}{\partial q_k \partial q_j}$$

и заменим индексы $j \leftrightarrow k$. Тогда

$$\sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (6.78)$$

Остальные уравнения

$$\sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_i}{\partial p_j} - \frac{\partial P_i}{\partial p_j} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \right) = 0; \quad (6.79)$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial P_i}{\partial q_j} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \right) = \delta_{jk} \quad (6.80)$$

можно получить подобным образом. Эти условия для канонических преобразований удобно записать в матричном виде. Введем симплектические координаты

$$(P, Q) = \eta, \quad (p, q) = \xi$$

и якобиеву $2s \times 2s$ -матрицу Λ с элементами

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \xi_\nu}, \quad (6.81)$$

или

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \quad (6.82)$$

Здесь A, B, C, D – $s \times s$ -матрицы с элементами

$$A_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial p_k}, \quad B_{ik} = \frac{\partial P_i}{\partial q_k}, \quad C_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}, \quad D_{ik} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}.$$

Тогда прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что соотношения (6.78)–(6.80) представимы в виде

$$\begin{aligned} A^T C - C^T A &= 0, \\ A^T D - C^T B &= I, \\ B^T D - D^T B &= 0, \end{aligned} \quad (6.83)$$

где I – единичная $s \times s$ -матрица, A^T обозначает транспонированную матрицу A и т. д. С помощью матрицы J (6.80) условия (6.83) можно записать в компактной форме:

$$\Lambda^T J \Lambda = J. \quad (6.84)$$

Запишем их в несколько измененной форме. Умножим обе части этого равенства слева на $(\Lambda^T)^{-1}$ и справа на $(\Lambda)^{-1}$ и возьмем обратные матрицы от обеих частей равенства. В итоге получим необходимое условие канонических преобразований в виде

$$\Lambda J \Lambda^T = J, \quad (6.85)$$

или

$$(\Lambda)^{-1} J (\Lambda^T)^{-1} = J. \quad (6.86)$$

Для вполне канонических преобразований

$$Q_i = Q_i(p, q), \quad P_i = P_i(p, q),$$

не зависящих от времени, производящая функция также не зависит явно от времени и, как следует из (6.74), первоначальная и новая функция Гамильтона связаны соотношением

$$H(p, q) = H'(P, Q). \quad (6.87)$$

Покажем, что для таких преобразований условие (6.86) сразу следует из инвариантности уравнений Гамильтона. При преобразованиях $\xi \rightarrow \eta = \eta(\xi)$ дифференциалы преобразуются как контравариантный вектор

$$d\eta_\mu = \sum_\nu \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \xi_\nu} d\xi_\nu \quad (6.88)$$

посредством матрицы Якоби Λ (6.81), а частные производные скалярной функции – как ковариантный вектор

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} &= \sum_\nu \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} = \sum_\nu (\Lambda^T)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \eta_\nu}, \\ \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} &= \sum_\mu (\Lambda^T)^{-1}_{\nu\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu}. \end{aligned}$$

Уравнение Гамильтона, записанное в матричном виде в координатах

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H'}{\partial \eta},$$

после замены (6.87) преобразуется к виду

$$\dot{\eta} = \Lambda \cdot \dot{\xi} = J(\Lambda^T)^{-1} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi}.$$

Поэтому

$$\dot{\xi} = \Lambda^{-1} J(\Lambda^T)^{-1} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi}$$

и из уравнений Гамильтона в ξ координатах $\dot{\xi} = J \frac{\partial H}{\partial \xi}$ сразу следует (6.86).

Запишем скобку Пуассона (6.49) в матричном виде:

$$\{f_1, f_2\} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \eta} \right)^T \cdot J \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \eta}, \quad (6.89)$$

где $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ – вектор-столбец с компонентами $\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_i = \frac{\partial f}{\partial \eta_i}$ ($i = 1, 2,$

..., $2s$). При канонических преобразованиях она преобразуется к виду

$$\{f_1, f_2\}_{\eta=\eta(\xi)} = \left((\Lambda^T)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \right)^T J (\Lambda^T)^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \eta} \right)^T (\Lambda)^{-1} J (\Lambda^T)^{-1} \frac{\partial f_2}{\partial \eta}.$$

Поскольку соотношение $(\Lambda)^{-1} J (\Lambda^T)^{-1} = J$ является условием каноничности преобразований, то скобка Пуассона инвариантна при канонических преобразованиях:

$$\{f_1, f_2\}_\xi = \{f_1, f_2\}_\eta. \quad (6.90)$$

Отсюда следует, в частности, инвариантность скобок Пуассона для симплектических координат:

$$\{\eta_\mu, \eta_\nu\}_\eta = -J_{\mu\nu} = \{\eta_\mu, \eta_\nu\}_\xi.$$

Это свойство выделяет канонические преобразования среди всех возможных преобразований симплектического пространства.

Рассмотрим два последовательных канонических преобразования

$$\eta = \eta(\xi), \quad \xi = \xi(\gamma)$$

с матрицами Якоби

$$(\Lambda_1)_{\mu\nu} = \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \xi_\nu}, \quad (\Lambda_2)_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \gamma_\nu}$$

соответственно. Для каждой из них справедливо условие канонических преобразований

$$\Lambda_1 J \Lambda_1^T = J, \quad \Lambda_2 J \Lambda_2^T = J. \quad (6.91)$$

Умножая второе условие на Λ_1 слева и на Λ_1^T справа, получаем

$$\Lambda_1 \Lambda_2 J (\Lambda_1 \Lambda_2)^T = J.$$

Произведение матриц $\Lambda_1 \Lambda_2$ равно матрице Λ_3 :

$$(\Lambda_3)_{\mu\nu} = (\Lambda_1)_{\mu\gamma} (\Lambda_2)_{\gamma\nu} = \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \xi_\gamma} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial \gamma_\nu} = \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \gamma_\nu},$$

следовательно:

$$\Lambda_3 J \Lambda_3^T = J.$$

Поэтому результатом двух последовательных канонических преобразований $T_1: \eta = \eta(\xi)$ и $T_2: \xi = \xi(\gamma)$ является снова каноническое преобразование $T_3 = T_1 T_2: \eta = \eta(\xi(\gamma))$. Кроме того, для каждого такого преобразования существует обратное и выполняется условие ассоциативности

$$T_3(T_2 T_1) = (T_3 T_2) T_1. \quad (6.92)$$

Поэтому совокупность канонических преобразований представляет собой *симплектическую группу*.

Уравнение Гамильтона–Якоби можно получить с помощью канонических преобразований. Введем производящую функцию $S(q, Q, t)$, для которой новый гамильтониан

$$H' = 0 \quad (6.93)$$

с тривиальными уравнениями движения $\dot{Q}_i = 0$, $\dot{P}_i = 0$ и решениями

$$Q_i = \alpha_i, \quad P_i = \beta_i. \quad (6.94)$$

Для этого, согласно (6.71), необходимо и достаточно, чтобы производящая функция $S(q, Q, t)$ удовлетворяла уравнению

$$H(p, q, t) + \frac{\partial S(q, Q, t)}{\partial t} = 0.$$

Подставим в явное выражение для гамильтониана системы $H(p, q, t)$, зависящего от координат и импульсов, соотношение

$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, которое следует из (6.68) и $Q_i = \alpha_i$. В результате

получаем уравнение Гамильтона–Якоби (6.28), где производящая функция $S(q, Q, t) = S(q, \alpha, t)$ является полным интегралом.

6.7. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ДВИЖЕНИЕ КАК БЕСКОНЕЧНАЯ СОВОКУПНОСТЬ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Существует внутренняя связь между аналитической динамикой Гамильтона–Якоби и общей теорией преобразований. Однако только Софус Ли раскрыл эту связь и придал ей поразительно красивую и богатую многообразными следствиями форму.

Л.С. Полак.

Вариационные принципы механики

В терминах производящей функции $F_2 = F_2(q, P)$ каноническое преобразование, согласно (6.72), записывается в виде

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}.$$

Тождественному преобразованию $P_i = p_i$, $Q_i = q_i$ отвечает функция $F_2 = \sum_i q_i P_i$. Рассмотрим инфинитезимальные (бесконечно

малые) канонические преобразования в окрестности тождественного преобразования. Такой метод исследования преобразований восходит к С. Ли. Данные преобразования представляют собой производящую функцию

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon F(q, P),$$

где бесконечно малая величина $\varepsilon \ll 1$ не зависит от q, P . Тогда

$$p_i = P_i + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial P_i}.$$

Поскольку новые и старые импульсы отличаются на бесконечно малую величину ε , то с точностью до ε^2

$$P_i = p_i - \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad Q_i = q_i + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad (6.95)$$

где в рассматриваемом приближении производящая функция $F = F(p, q)$ зависит от p, q . Из уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

следует, что для бесконечно малых интервалов времени $\Delta t \ll 1$ с точностью до Δt^2

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i} \Delta t, \quad q_i(t + \Delta t) = q_i(t) + \frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta t. \quad (6.96)$$

Обозначим $P_i(t) = p_i(t + \Delta t)$, $Q_i(t) = q_i(t + \Delta t)$. Формулы (6.95) и (6.96) совпадают, если ε принимается равным бесконечно малому интервалу Δt , а производящая функция F – гамильтониану системы. Поэтому переход от координат и импульсов в момент t к координатам и импульсам в момент $t + \Delta t$ представляет собой каноническое преобразование с производящей функцией, равной

гамильтониану системы. Так как канонические преобразования образуют группу, то изменение состояния системы от начальных данных до любого момента можно получить с помощью последовательности инфинитезимальных канонических преобразований. Движение эквивалентно непрерывно совершающемуся каноническому преобразованию, производящей функцией которого является гамильтониан. Получение такого преобразования в явном виде за конечный интервал времени эквивалентно полному решению задачи.

Приведем другое независимое доказательство, что движение голономной системы является каноническим преобразованием обобщенных координат и импульсов в момент $t = t_0$ в обобщенные координаты и импульсы в момент t . Полное решение

$$q_i = q_i(\alpha, \beta, t), \quad (6.97)$$

$$p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$$

канонических уравнений Гамильтона выражается через значения обобщенных координат и импульсов в некоторый момент t_0 :

$$(q_i)_{t=t_0} = \alpha_i, \quad (p_i)_{t=t_0} = \beta_i.$$

Запишем решение уравнений (6.97) относительно α, β в виде

$$\alpha_i = \alpha_i(q, p, t),$$

$$\beta_i = \beta_i(q, p, t).$$

Рассмотрим скобку Пуассона

$$\{\alpha_i, \beta_k\} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \alpha_i}{\partial p_i} \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_i} \frac{\partial \beta_k}{\partial p_i}.$$

При $t = t_0$ получаем

$$\{\alpha_j, \beta_k\}(t = t_0) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \alpha_j}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \beta_k}{\partial \beta_i}(t = t_0) = -\delta_{ji} \delta_{ki} = -\delta_{ki}.$$

Аналогичным образом

$$\{\alpha_j, \alpha_k\}(t = t_0) = \{\beta_j, \beta_k\}(t = t_0) = 0.$$

Величины α, β – полная система из $2s$ интегралов движения канонических уравнений Гамильтона. Поэтому, согласно теореме Пуассона, любая из скобок Пуассона $\{\alpha_i, \alpha_k\}, \{\alpha_i, \beta_k\}, \{\beta_i, \beta_k\}$ является также интегралом движения, который представляет собой или функцию α, β или постоянную. В противном случае скобки Пуассона содержали бы новый независимый интеграл движения $2s + 1$, что невозможно. Поскольку рассматриваемые нами скобки Пуассона сохраняют постоянные значения, то в любой момент мы получаем

$$\{\alpha_j, \beta_k\} = -\delta_{ki}, \quad \{\alpha_j, \alpha_k\} = \{\beta_j, \beta_k\} = 0.$$

Поэтому преобразование $(q(t), p(t))$ в $(q(t_0), p(t_0)) = (\alpha, \beta)$ является каноническим. Обратное преобразование $(q(t_0), p(t_0))$ в $(q(t), p(t))$ также каноническое.

6.8. ИЗМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ПРИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ. СКРЫТЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Симметрия – в широком или узком смысле в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия – является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.

Г. Вейль. Симметрия

Найдем изменение произвольной функции $U(p, q)$ от координат и импульсов при бесконечно малых канонических преобразованиях (6.75):

$$U(P, Q) = U\left(p_i - \varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_i}, q_i + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_i}\right) =$$

$$= U(p_i, q_i) - \varepsilon \frac{\partial U(p, q)}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} + \varepsilon \frac{\partial U(p, q)}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} + O(\varepsilon^2).$$

Тогда с помощью скобок Пуассона с точностью до ε^2 изменение функции $U(p, q)$ при бесконечно малых канонических преобразованиях записывается в виде

$$\delta U = U(P, Q) - U(p, q) = -\varepsilon \{U, F\}. \quad (6.98)$$

Например, производящая функция $F = xp_y - yp_x$ определяет вращение координат радиуса-вектора $\vec{r} = \{x, y, z\}$ вокруг оси z :

$$\delta x = -\varepsilon y, \quad \delta y = \varepsilon x.$$

Пусть функция $U(p, q)$ совпадает с гамильтонианом H системы. Тогда

$$\delta H = -\varepsilon \{H, F\}, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (6.99)$$

Согласно (6.45), если функция $F = F(p, q)$ есть интеграл движения, то $\{H, F\} = 0$.

В итоге, все интегралы движения механической системы являются производящими функциями тех бесконечно малых канонических преобразований, которые не меняют гамильтониан системы. Это утверждение аналогично теореме Нётер в лагранжевой механике. Оно часто оказывается полезным для поиска явного вида интегралов движения при исследовании инвариантности гамильтониана при канонических преобразованиях.

6.9. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ПУАНКАРЕ. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ О СОХРАНЕНИИ ФАЗОВОГО ОБЪЕМА

Двухсотлетний промежуток от гениальных открытий Гюйгенса и Ньютона до геометризации математики Риманом и Пуанкаре кажется математической пустыней, заполненной одними лишь вычислениями.

В.И. Арнольд.

Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук

При канонических преобразованиях помимо формы уравнений Гамильтона сохраняются некоторые интегралы, названные А. Пуанкаре *интегральными инвариантами*.

На фазовой плоскости механической системы (например математического маятника) рассмотрим совокупность начальных данных (координат и импульсов), образующих некоторое непрерывное множество (фазовую каплю). Это множество и его граница $C(t)$ меняют форму с течением времени. На рис. 6.2 изображена полученная численными методами эволюция области внутри окружности $p(t=0) = 2 + 0,5\sin\alpha$, $q(t=0) = 0,5\cos\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)

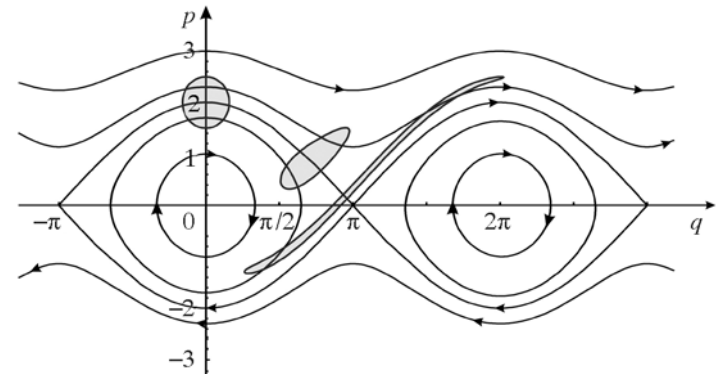


Рис. 6.2

для математического маятника $\ddot{\phi} = -\sin\phi$ в моменты $t = 1,5$ и $t = 3,2$. Площадь капли в начальный момент t_0 и произвольный момент t определяется соответственно криволинейными интегралами

$$J(t_0) = \oint_{c(t_0)} p dq \quad \text{и} \quad J(t) = \oint_{c(t)} p dq.$$

Оказывается, что в консервативных системах площадь капли сохраняется с течением времени. Такие величины, как J , которые являются интегралами в фазовом пространстве и не меняются с течением времени, были названы Пуанкаре интегральными инвариантами. Для доказательства теоремы о сохранении площади используем факт, что механическое движение представляется постепенным непрерывным каноническим преобразованием.

Рассмотрим вначале систему с одной степенью свободы. Если гамильтониан H не зависит явно от времени, то условие каноничности преобразования от начальных значений p_0, q_0 к значениям координат и импульсов в произвольный момент $p(p_0, q_0, t), q(p_0, q_0, t)$ записывается в виде

$$p dq = p_0 dq_0 + dF(q, q_0),$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad p_0 = -\frac{\partial F}{\partial q_0},$$

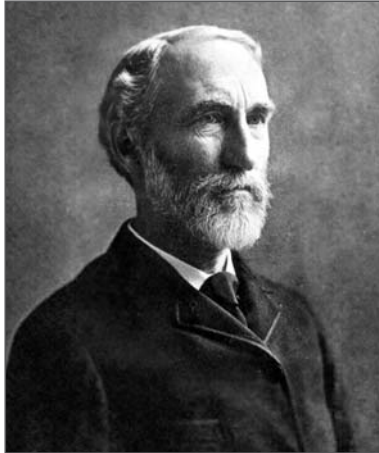
где $F(q, q_0)$ – производящая функция. На границах $C(t = 0)$ и $C(t)$ можно ввести некоторый параметр U : $p_0 = p_0(U)$, $q_0 = q_0(U)$ и $p = p(U)$, $q = q(U)$. Тогда

$$J(t) = \int \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dU} dU, \quad J(t_0) = - \int \frac{\partial F}{\partial q_0} \frac{dq_0}{dU} dU,$$

$$J(t) - J(t_0) = \int \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{dU} + \frac{\partial F}{\partial q_0} \frac{dq_0}{dU} dU = \int dF.$$

Таким образом, J является инвариантом при движении системы, если путь замкнут. Данные инварианты Пуанкаре назвал *относительными*. Они являются интегралами движения на замкнутых подмногообразиях фазового пространства. Другие инварианты, сохраняющиеся при любом выборе области интегрирования, включающие, в частности, и незамкнутые, получили название *абсолютных*.

Для системы с s степенями свободы в механике Гамильтона независимыми переменными являются s обобщенных координат и s импульсов данной системы. Для геометрической интерпретации механических явлений в такой системе удобно использовать пространство $2s$ измерений, где положение материальной точки помимо обобщенных координат определяется обобщенными импульсами. В этом пространстве, названном **Д. Гиббсом** *фазовым*, прямоугольными координатами будут q_i, p_i ($i = 1, 2, \dots, s$).



Джозайя Уиллард Гиббс (англ. Josiah Willard Gibbs; 11 февраля 1839, Нью-Хейвен, Коннектикут, США – 28 апреля 1903, Нью-Хейвен, Коннектикут, США) – американский физик-теоретик, один из основоположников термодинамики и статистической механики. Его имя присвоено многим величинам и понятиям статистической механики химической термодинамики: энергия Гиббса, парадокс Гиббса и т.д.

Каждая точка этого пространства, называемая *фазовой*, отвечает определенному состоянию системы. Поскольку задание обобщенных координат и импульсов в начальный момент однозначно определяет их значение в последующий момент, то с течением времени фазовая точка описывает в фазовом пространстве некоторую линию, называемую *фазовой траекторией*.

Для системы с s степенями свободы можно ввести $2s$ интегральных инвариантов Пуанкаре:

$$J_1 = \sum_{i=1}^N \oint p_i dq_i; \quad (6.100)$$

$$J_2 = \iint dp_i dq_i \dots \quad (6.101)$$

В нечетных относительных инвариантах J_{2n-1} интегрирование проводится по замкнутым $2n - 1$ подмногообразиям фазового пространства. Четные инварианты J_{2n} являются абсолютными, и интегрирование в них осуществляется по произвольной $2n$ -мерной области фазового пространства. При $n = s$ получаем интеграл

$$J_{2s} = \int_V dp_1 dq_1 dp_2 dq_2 \dots dp_s dq_s. \quad (6.102)$$

Его инвариантность означает сохранение объема любой части фазового пространства при движении системы. Этот результат, имеющий фундаментальное значение в статистической физике, известен как теорема **Лиувилля**.

Для доказательства этой теоремы запишем формулу для $2s$ -мерного объема в симплектических координатах $\xi = (p_1, q_1, p_2, q_2, \dots)$:

$$J_{2s}(t) = \int_{V(t)} \prod_{i=1}^{2s} d\xi_i,$$

где интегрирование проводится по всем точкам фазового пространства, взятых в момент t . Как уже упоминалось, движение системы от момента $t = t_0$ с заданными симплектическими координатами $\xi_0 = \xi(t_0)$ до момента t является каноническим.

ким преобразованием $\xi_i = \xi_i(\xi_0, t)$ и для него справедливо уравнение (6.85)

$$\Lambda J \Lambda^T = J,$$

где $\Lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_{0\nu}}$. Отсюда нетрудно получить важное соотношение

дет $\Lambda^2 = 1$. Тогда доказательство теоремы Лиувилля сразу следует из непрерывности преобразований и формулы замены переменных:

$$J_{2s}(t) = \int_{V(t_0)} \det \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_{j_0}} \right) \prod_{i=1}^{2n} d\xi_{i_0} = J_{2s}(t_0). \quad (6.103)$$

6.10. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Решение многих уравнений механики в аналитическом виде крайне затруднено, но дает по сравнению с численными расчетами большие преимущества. Только оно позволяет исследовать динамику системы во всей области изменения параметров и в произвольных начальных условиях. Система дифференциальных урав-



Жозеф Лиувилль (фр. Joseph Liouville; 24 марта 1809 – 8 сентября 1882) – французский математик. Построил теорию эллиптических функций, рассматриваемых им как двоякопериодические функции комплексного переменного, исследовал краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений второго порядка (так называемую задачу Штурма–Лиувилля), доказал существование и представил фактическое построение трансцендентных чисел и т. д. Установил фундаментальную теорему в механике о инвариантности фазового объема при движении системы, доказал теорему об интегрировании канонических уравнений динамики. Иностраннный член-корреспондент Петербургской АН (1840)

нений проинтегрирована в квадратурах, если ее решения найдены с помощью конечного числа алгебраических операций (включая обращение функций) и вычисления интегралов известных функций. Одним из способов точного интегрирования является понижение порядка системы с помощью интегралов движения. При этом фундаментальное значение имеет *теорема Лиувилля*.

Пусть для системы уравнений Гамильтона с N степенями свободы известны N интегралов движения $F_i(p, q, t)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), независимых друг от друга, находящихся в инволюции и разрешимых относительно обобщенных импульсов $p_1, p_2, \dots, p_N$. Тогда интегрирование системы сводится к квадратурам.

Для доказательства используется метод интегрирования Гамильтона–Якоби, согласно которому решения уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

могут быть получены из полного интеграла $S(q, \alpha, t)$ уравнения с частными производными

$$\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$

Так как по условию теоремы N интегралов движения

$$F_i(p, q, t) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6.104)$$

разрешимы относительно обобщенных импульсов, следовательно:

$$\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right\| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (6.105)$$

Решим уравнения (6.104) относительно p и запишем результат в виде

$$p_i = \Psi_i(q, \alpha, t) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (6.106)$$

Функции $\Psi_i(F, \alpha, t)$ удовлетворяют тождеству

$$F_i(\Psi_i(q, \alpha, t), q, t) \equiv \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (6.107)$$

Дифференцируя его по q_j , получаем

$$\frac{\partial F_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F_i}{\partial \Psi_k} \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_j} = 0. \quad (6.108)$$

Умножим это уравнение на $\frac{\partial F_m}{\partial p_j}$ и просуммируем по индексу j :

$$\frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial q_j} + \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial \Psi_k} \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_j} = 0. \quad (6.109)$$

Произведем здесь замену индексов $i \leftrightarrow m$ и вычтем полученное соотношение из (6.87):

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial q_j} - \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial F_m}{\partial p_j} \frac{\partial F_i}{\partial \Psi_k} \left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial q_k} \right) = 0. \quad (6.110)$$

Первое слагаемое в данном выражении равно нулю, так как совпадает со скобкой Пуассона $\{F_m, F_j\}$. Из-за невырожденности матрицы $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right\|$ следует существование обратной матрицы $\left\| \frac{\partial p_i}{\partial F_j} \right\|$, с

помощью которой уравнения (6.110) принимают вид

$$\left(\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial q_k} \right) = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, N). \quad (6.111)$$

Заменим в гамильтониане $H(p, q, t)$ обобщенные импульсы на $p_i = \Psi_i(q, \alpha, t)$ и обозначим полученную функцию как $H^*(q, \alpha, t) = H(\Psi(q, \alpha, t), q, t)$. Тогда из (6.106) и уравнений Гамильтона следует, что

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d\Psi_i}{dt} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}. \quad (6.112)$$

Уравнения (6.111), (6.112) выражают необходимые и достаточные условия существования функции $S(q, \alpha, t)$, такой что

$$\frac{\partial S}{\partial q_j} = \Psi_j, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H^*. \quad (6.113)$$

Функция $S(q, \alpha, t)$ зависит от N произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ и представляет собой полный интеграл, так как не только выполнено неравенство

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial q_i} \right\| = \det \left\| \frac{\partial \Psi_i}{\partial \alpha_j} \right\| \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$

что является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений (6.106) относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, но и сами данные уравнения, согласно (6.104), уже разрешены относительно этих постоянных. Вычисление такой функции, которая удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби, при известных выражениях для Ψ_j, H^* требует только квадратур. Тогда по теореме Якоби находим решение канонических уравнений системы. Системы с N степенями свободы, для которых известно N интегралов движения, называются *интегрируемыми*. Различные подходы к интегрируемости гамильтоновых систем, включая причины принципиального характера, препятствующие интегрируемости, изложены в монографии [27] и приведенной в ней литературе.

Глава 7. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Словно маленький серый кузничек,
У доски стрекотал человек.
Это он приглашал прогуляться
По мирам, что не каждому снятся.

В.Е. Захаров.
Из стихотворения «Теоретик»

7.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В механике твердым телом называется система материальных точек с голономной связью, представленной уравнениями вида

$$r_{ij} = c_{ij}, \quad (7.1)$$

где r_{ij} – расстояние между i -й и j -й точками, c_{ij} – постоянные. При описании движения твердого тела производится мысленное разбиение его на малые частицы, каждая из них является материальной точкой, к которой приложимы законы механики точки. Тогда абсолютно твердое тело рассматривается как совокупность жестко связанных материальных точек. Внутренние силы взаимодействия между частицами считаются значительно превышающими внешние силы, приложенные к телу. При непрерывном описании твердое тело считается заполненным сплошной средой из элементарных объемов dV , заполненных средой плотностью σ и массой $dm = \sigma dV$. Хотя число материальных точек, из которых состоит твердое тело, бесконечно, его положение в пространстве может быть определено шестью координатами и оно имеет в механике шесть степеней свободы. Действительно, после закрепления одной точки O тело способно только вращаться вокруг этой точки. После закрепления второй точки A оно может вращаться около оси OA , проходящей через эти точки. Наконец, после закрепления третьей точки B , не лежащей на прямой, проходящей через ось OA , мы делаем неподвижным все бесконечное количество материальных точек твердого тела. Неизменность расстояний OB , AB , OB накладывает три голономные связи на $3 \cdot 3 = 9$ координат точек A , B , O и оставляет

свободными только шесть координат – шесть степеней свободы твердого тела.

Эти шесть степеней удобно ввести следующим образом. Радиус-вектор $\vec{\rho}(t)$ произвольной точки M относительно неподвижной системы координат выразим через радиус-вектор $\vec{R}(t)$ произвольной точки O в твердом теле и радиус-вектор $\vec{r}(t) = \vec{OM}$ (рис. 7.1):

$$\vec{\rho}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}(t). \quad (7.2)$$

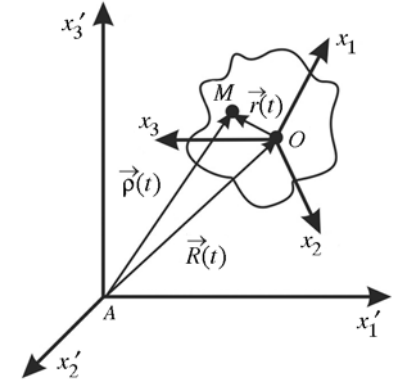


Рис. 7.1

После закрепления тела в точке O мы фиксируем три степени свободы – координаты этой точки, и для определения движения твердого тела, закрепленного в одной точке, достаточно трех степеней свободы. Тогда любая точка тела может двигаться только по поверхности сферы, радиус которой равен расстоянию от этой точки до точки закрепления O . В точке O построим «неподвижную» систему координат k с базисными ортами $\vec{e}_k'$ ($k = 1, 2, 3$):

$$\vec{e}_k' \cdot \vec{e}_i' = \delta_{ik}, \quad (7.3)$$

направление которых совпадает с направлением осей неподвижной системы (см. рис. 7.1), расположенной в точке A .

Для описания вращения твердого тела около точки O удобно ввести «подвижную» систему координат K в этой точке с ортонормированным базисом $\vec{e}_k(t)$ ($k = 1, 2, 3$):

$$\vec{e}_k(t) \cdot \vec{e}_i(t) = \delta_{ik}, \quad (7.4)$$

жестко связанную с твердым телом и вращающейся вместе с ним около точки O .

Вектор $\vec{r}(t)$ может быть представлен в этих двух системах координат следующим образом:

1) в подвижной системе координат K радиус-вектор $\vec{r}(t)$ имеет независимые от времени координаты

$$\vec{r}(t) = x_i \vec{e}_i(t); \quad (7.5)$$

2) в неподвижной системе координат k координаты $x'_1(t) = x'(t)$, $x'_2(t) = y'(t)$, $x'_3(t) = z'(t)$ радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ зависят от времени:

$$\vec{r}(t) = x'_i(t)\vec{e}'_i. \quad (7.6)$$

Здесь и далее базисные орты и координаты векторов в неподвижной системе координат k мы будем обозначать надстрочным штрихом. В итоге задание координат вектора $\vec{r}(t)$ в неподвижной или подвижной системе координат в точке O и координат вектора $R(t)$ в неподвижной системе координат в точке A полностью определяет положение и динамику любой точки твердого тела.

Ориентация базиса $e_i(t)$ относительно базисных орт e'_i неподвижной системы координат определяется зависящими от времени величинами $D_{ik}(t)$ ($i, k = 1, 2, 3$):

$$\vec{e}_i(t) = D_{ik}(t)\vec{e}'_k. \quad (7.7)$$

Подставляя эти соотношения в (7.4) мы получаем ограничение

$$D_{ik}(t)D_{ip}(t) = \delta_{kp} \quad (k, p = 1, 2, 3) \quad (7.8)$$

на матрицу D . Поэтому преобразованием, обратным к (7.7), является

$$\vec{e}'_k(t) = D_{ik}(t)\vec{e}_i. \quad (7.9)$$

Девять величин $\{D_{ik}\}$, задающих ориентацию подвижных осей относительно неподвижных, связаны шестью связями (7.8), и эта ориентация определяется тремя независимыми параметрами. Уравнения (7.7), (7.8) можно записать в виде матричных уравнений

$$\vec{e} = D(t)\vec{e}'; \quad (7.10)$$

$$D(t)D^T(t) = E, \quad (7.11)$$

где $\vec{e}(t)$, $\vec{e}'$ – столбец из векторов $\vec{e}_i(t)$ и $\vec{e}'_k$ соответственно, $D(t)$ – матрица с элементами $\{D_{ik}(t)\}$, $D^T(t)$ – транспонированная матрица и E – единичная матрица.

Линейное преобразование типа (7.9), удовлетворяющее (7.11), называется ортогональным, а матрицы D – ортогональными. Рассмотрим их свойства. Из (7.11) следует, что $\det DD^T = (\det D)^2 = 1$, в дальнейшем мы будем рассматривать только пре-

образования с определителем, равным единице. Это условие предполагает соотношения

$$\epsilon_{ijk}D_{is}D_{jp}D_{kq} = \epsilon_{spq}; \quad (7.12)$$

$$\epsilon_{spq}D_{is}D_{jp}D_{kq} = \epsilon_{ijk} \quad (7.13)$$

и нетрудно выводимые из них с помощью (7.8) следствия

$$\epsilon_{ija}D_{is}D_{jp} = \epsilon_{spq}D_{aq}; \quad (7.14)$$

$$\epsilon_{spa}D_{is}D_{jp} = \epsilon_{ijk}D_{ka}. \quad (7.15)$$

Здесь введены абсолютно антисимметричные величины ϵ_{ijk} ($i, j, k = 1, 2, 3$), которые имеют три разных значения:

а) нуль, если любые два индекса совпадают;

б) $+1$, если ijk являются четной перестановкой чисел 1, 2, 3, $\epsilon_{123} = 1$;

в) -1 , если ijk являются нечетной перестановкой чисел 1, 2, 3.

При конкретных расчетах оказываются полезными тождества

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{ksp} &= \delta_{is}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{js}, \\ \epsilon_{ijk}\epsilon_{jkp} &= 2\delta_{ip}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

7.1.1. Углы Эйлера

В качестве независимых параметров, определяющих вращательные степени свободы твердого тела, удобно выбрать углы Эйлера. Для их определения рассмотрим повороты в точке O неподвижной системы с осями Ox' , Oy' , Oz' (рис. 7.2).

Линия пересечения плоскости $Ox'y'$ с плоскостью Oxy (заштрихованной на рис. 7.2) называется *линией узлов* (ось $O\xi$ на рис. 7.2). Углами Эйлера называются следующие:

1) угол *собственного вращения* $\varphi = \angle x'O\xi$, отсчитываемый от оси Ox' ;

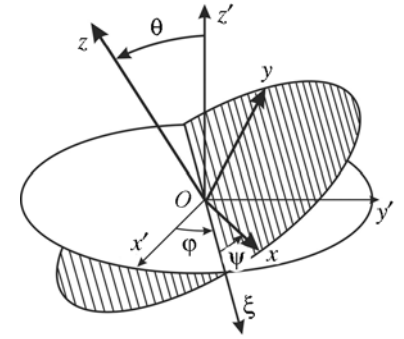


Рис. 7.2

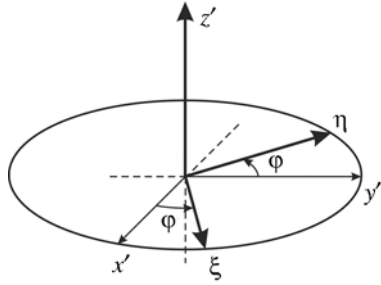


Рис. 7.3

2) угол нутации $\theta = \angle z'Oz$, который откладывается от оси Oz' ;

3) угол прецессии $\psi = \angle xO\xi$, который откладывается от линии узлов.

В итоге переход от неподвижной системы координат к подвижной может быть осуществлен последовательностью трех поворотов, выполняемых в порядке, показанном на рис. 7.3–7.5. Вначале

поворот вокруг оси Oz' на угол φ (рис. 7.3). Далее поворот вокруг оси $O\xi$, направленной по линии узлов, на угол θ (рис. 7.4). Затем поворот вокруг оси Oz на угол ψ (рис. 7.5). Все три угла Эйлера меняются независимо, области их изменения составляют $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$.

Первое из рассмотренных преобразований – поворот на угол φ преобразует базисные орты $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ в $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ следующим образом:

$$\vec{e}_1 = \cos\varphi \vec{e}'_1 + \sin\varphi \vec{e}'_2,$$

$$\vec{e}_2 = -\sin\varphi \vec{e}'_1 + \cos\varphi \vec{e}'_2, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}'_3,$$

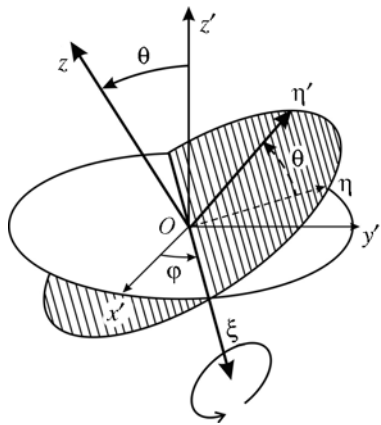


Рис. 7.4

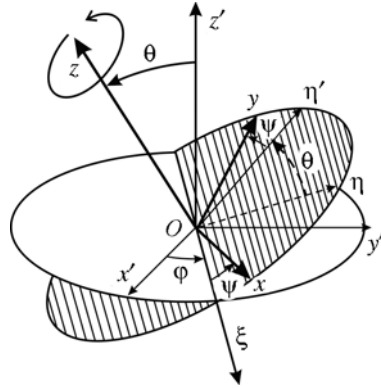


Рис. 7.5

или

$$\vec{e}_i = (D_1)_{ik} \vec{e}'_k,$$

где матрица D_1 имеет вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второе преобразование представляет собой поворот вокруг оси Ox , и его матрица D_2 равна

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Наконец последнее преобразование является вращением около оси Oz и имеет вид

$$D_3 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В итоге матрицу D в (7.7) можно получить перемножением матриц D_1, D_2, D_3 : $D = D_1 D_2 D_3$, и записать в виде

$$D(t) = \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi \sin\psi & \cos\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi \sin\psi & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\psi \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi \cos\psi & -\sin\psi \sin\varphi + \cos\theta \cos\varphi \cos\psi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\varphi & -\sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Запись вектора $\vec{r}(t)$ в подвижной и неподвижной системах координат

$$\vec{r}(t) = x'_i(t) \vec{e}'_i = x_i \vec{e}_i(t) = x_i D_{ik}(t) \vec{e}'_k$$

предполагает соотношения между координатами вектора $\vec{r}$ в этих системах

$$x_i(t) = D_{ik}(t)x'_k; \quad (7.18)$$

$$x'_k = D_{ik}(t)x_i(t). \quad (7.19)$$

Следовательно, матрица $D(t)$ определяет вращательное движение точки твердого тела с координатами x'_k в неподвижной системе координат. Обсудим свойства матрицы $D(t)$ при поворотах систем координат. Обозначим $D(\alpha) = D(\theta_1, \phi_1, \psi_1)$ – матрицу вращения с независимыми от времени углами Эйлера. Тогда при вращении неподвижной системы координат k базис $\vec{e}'_i$ преобразуется в базис $\vec{e}_i$ неподвижной системы координат k как

$$\vec{e}'_i = D_{ik}(\alpha)\vec{e}_k, \quad (7.20)$$

или в матричном виде

$$\vec{e}' = D(\alpha)\vec{e}. \quad (7.21)$$

Поскольку при таком вращении базис $e_i(t)$ не изменяется, то из соотношений $\vec{e} = D(t)\vec{e}' = \tilde{D}(t)\vec{e}' = \tilde{D}(t)D(\alpha)\vec{e}'$ сразу следует закон преобразования матрицы $D(t)$:

$$\tilde{D}(t) = D(t)D^T(\alpha). \quad (7.22)$$

Произведение матриц $D(t)D^T(\alpha)$ снова является матрицей вращения с другими углами Эйлера ($\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$). Поэтому уравнение (7.22) определяет нелинейный закон преобразования углов Эйлера при вращении неподвижной системы координат.

При ортогональном преобразовании подвижной системы координат

$$\vec{e}_i = D_{ik}(\alpha)\vec{e}'_k; \quad (7.23)$$

$$\tilde{x}_i = D_{ik}(\alpha)x_k \quad (7.24)$$

посредством матрицы $D(\alpha)$ из уравнений

$$\vec{e} = D(\alpha)\vec{e}' = D(\alpha)D(t)\vec{e}' = \tilde{D}(t)\vec{e}'$$

мы получаем закон преобразования матрицы $D(t)$ виде

$$\tilde{D}(t) = D(\alpha)D(t), \quad (7.25)$$

который отличается от формулы (7.22).

7.1.2. Кинематические уравнения Эйлера

Скорости материальных точек твердого тела при вращении вокруг неподвижной точки вычисляются дифференцированием по времени уравнения (7.5). Принимая во внимание, что координаты x_i не зависят от времени, а зависимость от времени базиса $\vec{e}_i(t)$ определяется эволюцией углов Эйлера (7.7), имеем

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = x_i \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} = x_i \dot{D}_{ij}(t)\vec{e}'_j = \quad (7.26)$$

$$= x_i \dot{D}_{ij}(t)D_{kj}(t)\vec{e}_k(t) = x_i(\dot{D}(t)D^T(t))_{ik}\vec{e}_k(t).$$

Из дифференцирования формулы (7.11) по времени

$$\dot{D}(t)D^T(t) + D(t)\dot{D}^T(t) = \dot{D}(t)D^T(t) + (\dot{D}(t)D^T(t))^T = 0$$

следует, что матрица $\dot{D}(t)D^T(t)$ антисимметрична. Ее матричные элементы с помощью абсолютно антисимметричного единичного тензора ϵ_{spq} можно записать в виде

$$\dot{D}_{ij}(t)D_{kj}(t) = \epsilon_{ikn}\omega_n(t). \quad (7.27)$$

Согласно (7.22), величина $\omega_n(t)$ инвариантна относительно поворотов неподвижной системы координат и характеризует именно вращательное движение твердого тела. С помощью соотношения

$$\epsilon_{ikn}\vec{e}_k(t) = \vec{e}_n(t) \times \vec{e}_i(t) \quad (7.28)$$

формулу (7.26) можно переписать как

$$\vec{v}(t) = x_i(\dot{D}(t)D^T(t))_{ik}e_k(t) = x_i\epsilon_{ikn}\omega_n(t)e_k(t) = x_i\omega_n(t)\vec{e}_n(t) \times \vec{e}_i(t). \quad (7.29)$$

Векторная величина

$$\vec{\omega}(t) = \omega_n(t)\vec{e}_n(t) \quad (7.30)$$

называется вектором *мгновенной угловой скорости тела*, и полученное соотношение

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r} \quad (7.31)$$

носит название формулы Эйлера. Направление вектора $\vec{\omega}(t)$ дает в каждый момент положение мгновенной оси вращения.

Уравнение ее можно найти из условия равенства нулю скоростей точек твердого тела, лежащих на мгновенной оси вращения. Если векторы $\vec{\omega}(t)$ и $\vec{r}$ параллельны:

$$\vec{r} = \lambda \vec{\omega}(t),$$

то выражение $\vec{\omega}(t) \times \vec{r}$ равно нулю и мгновенная ось вращения представляет собой прямую, проходящую через неподвижную точку O . Подставляя (7.17) в (7.27), получаем формулы для проекций вектора угловой скорости на оси подвижной системы координат в следующем виде:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\quad (7.32)$$

Пользуясь этими уравнениями легко найти также проекции $\omega'_i(t) = \omega_i(t) D(t)_{in}$ вектора $\vec{\omega}$ на оси неподвижной системы координат:

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega'_2 &= -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \\ \omega'_3 &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}.\end{aligned}\quad (7.33)$$

Уравнения (7.32), (7.33) называются *кинематическими уравнениями Эйлера* для твердого тела.

7.1.3. Моменты инерции твердого тела

Скорость произвольной материальной точки M (см. рис. 7.1) твердого тела равна производной по времени ее радиуса $\vec{r}(t)$ (7.2). Дифференцируя соотношение (7.2) с учетом (7.31), найдем

$$\dot{\vec{r}} = \vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \quad (7.34)$$

Вектор $\vec{V}$ есть скорость точки O (центра подвижной системы координат) относительно осей неподвижной системы в точке A .

Представим твердое тело как дискретную систему материальных точек. Обозначим $\vec{r}_\alpha$ и $\vec{r}_\alpha$ — радиусы-векторы произволь-

ной частицы с номером $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и массой m_α . Как и в формуле (7.2), эти векторы связаны соотношением

$$\vec{\rho}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}_\alpha. \quad (7.35)$$

Тогда скорость $\dot{\vec{\rho}}_\alpha$ частицы m_α согласно уравнению (7.34) равна

$$\dot{\vec{\rho}}_\alpha = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha. \quad (7.36)$$

Импульсом системы, состоящей из N материальных точек массы m_i , как известно, называется произведение масс частиц на их скорости:

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha).$$

Согласно определению центра масс (2.100), импульс выражается через массу тела M и радиус-вектор центра масс R_c :

$$\vec{P} = M(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{R}_c).$$

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной точки A определяется выражением (2.103)

$$\vec{M}_A = \sum_{\alpha=1}^N \vec{\rho}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha,$$

которое после подстановки формул (7.35), (7.36) принимает вид

$$\begin{aligned}\vec{M}_A &= \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R} + \vec{r}_\alpha) \times m_\alpha \dot{\vec{\rho}}_\alpha = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \\ &= \vec{R} \times \vec{P} + M \vec{R}_c \times \vec{V} + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha).\end{aligned}$$

Отметим, что если начало координат системы K (точку O) поместить в центр инерции твердого тела ($\vec{R}_c = 0$), то наблюдаемые в неподвижной системе координат импульс и момент импульса равны

$$\vec{P} = M \vec{V}_c; \quad (7.37)$$

$$\vec{M}_A = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha). \quad (7.38)$$

Здесь $\vec{V}_c$ – скорость движения центра масс, ее называют также скоростью поступательного движения твердого тела. Первое слагаемое в правой части (7.38) есть момент полного импульса центра масс, в котором сосредоточена вся масса системы, второе слагаемое

$$\vec{M} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) \quad (7.39)$$

можно назвать *собственным моментом импульса* твердого тела, обусловленного только вращением. Преобразуем это выражение по формуле двойного векторного произведения:

$$\vec{M} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} (\vec{\omega} (\vec{r}_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}) - \vec{r}_{\alpha} (\vec{\omega} \vec{r}_{\alpha}))$$

и вычислим его компоненты в подвижной системе координат K , где координаты $x_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, 3$) вектора $\vec{r}_{\alpha}$ не зависят от времени. Мы имеем

$$M_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \sum_{k=1}^3 \omega_k x_{\alpha i}^2 - x_{\alpha i} x_{\alpha k} \omega_k \right\}. \quad (7.40)$$

Величины

$$I_{ik} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\delta_{ik} \left(\sum_{l=1}^3 x_{l\alpha}^2 \right) - x_{i\alpha} x_{k\alpha} \right] \quad (7.41)$$

зависят от распределения массы твердого тела и его формы и называются *моментами инерции*. Видно, что вектор момента импульса вращающегося тела получается из угловой скорости линейным преобразованием матрицы $I = \{I_{ik}\}$:

$$M_i = I_{ik} \omega_k. \quad (7.42)$$

Моменты инерции зависят также от выбора системы K . Напомним, что при ортогональных преобразованиях системы координат набор трех величин $\{a_1, a_2, a_3\}$, преобразующихся как

$$\tilde{a}_i = D_{ik}(\alpha) a_k$$

называется вектором, или *тензором первого ранга*. Девять моментов инерции I_{ik} преобразуются следующим образом:

$$\tilde{I}_{ij} = D_{ik}(\alpha) D_{jn}(\alpha) I_{kn} \quad (7.43)$$

и носят название тензора второго ранга. Из курса линейной алгебры известно, что любую вещественную симметричную матрицу B можно представить в виде

$$B = DCD^T,$$

где D – ортогональная матрица и C – вещественная ортогональная матрица. Поэтому тензор $I = \{I_{ik}\}$, вычисленный в произвольно выбранном подвижном базисе, можно ортогональным преобразованием $e \rightarrow De$ подвижного базиса привести к диагональному виду

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (7.44)$$

Оси в твердом теле, совпадающие с новыми координатными осями, называются *главными осями инерции* тела. Значения диагональных компонент тензора I_1, I_2, I_3 называются *главными моментами инерции* тела.

Кинетическая энергия твердого тела

$$T = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2}$$

после подстановки выражения (7.36) для скорости частицы с номером α равна

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \left(\vec{V} + [\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}] \right)^2}{2} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} V^2 + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{V} [\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}] + \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} [\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}]^2. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части выражается через вектор центра масс R_c

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{V} [\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}] = M \vec{V} [\vec{\omega} \times \vec{R}_c]$$

и равно нулю, если точка O выбрана в центре инерции твердого тела. Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения и с помощью формул (7.16) преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \sum \frac{m_{\alpha}}{2} [\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}]^2 &= \sum \frac{m_{\alpha}}{2} \varepsilon_{skj} \omega_k x_j \varepsilon_{sip} \omega_i x_p = \\ &= \sum \frac{m_{\alpha}}{2} (\delta_{ik} \delta_{jn} - \delta_{nk} \delta_{ji}) \omega_k x_j \varepsilon_{sip} \omega_i x_p = \\ &= \sum \frac{m_{\alpha}}{2} \omega_i (\delta_{ik} x_j x_j - x_k x_i) \omega_k = \frac{\omega_i I_{ik} \omega_k}{2}. \end{aligned}$$

В итоге, если начало подвижной системы координат выбрано в центре инерции, а направление ее осей совпадает с главными осями инерции, находим простое выражение для кинетической энергии

$$T = \frac{M V_c^2}{2} + \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (7.45)$$

и связи моментов с угловой скоростью

$$M_1 = I_1 \omega_1, \quad M_2 = I_2 \omega_2, \quad M_3 = I_3 \omega_3. \quad (7.46)$$

Первый член в (7.45) есть кинетическая энергия поступательного движения тела со скоростью центра масс V_c , она имеет такой же вид, как если бы вся масса тела была сосредоточена в его центре инерции. Второй член – кинетическая энергия вращательного движения $T_{вр}$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси, проходящей через центр инерции. Тело, у которого все главные моменты инерции различны, называют *асимметричным волчком*. Если плотность твердого тела постоянна и его форма обладает симметрией, то ту же симметрию имеют главные оси инерции и

тензор инерции. Два главных момента инерции совпадают для эллипсоида вращения, и такое тело называется *симметричным волчком*. Любое тело, у которого $I_1 = I_2 = I_3 = I$, именуется *шаровым волчком*.

7.1.4. Динамические уравнения Эйлера

Уравнения движения твердого тела выводятся из функции Лагранжа L , содержащей потенциальную и кинетическую энергию, в которой учтены динамические уравнения Эйлера. Они распадаются на три уравнения поступательного движения центра масс и три уравнения вращательного движения вокруг него. Для изучения уравнений движения твердого тела, *закрепленного* в некоторой точке O , *не совпадающей с центром масс*, – важной для многих технических приложений задаче, применяют другую форму уравнений движения. Для их вывода необходимо использовать общую теорему механики (2.105), где утверждается, что скорость изменения момента импульса незамкнутой системы равна моменту внешних сил:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{внешн}}] = \vec{N}. \quad (7.47)$$

В неподвижной инерциальной системе отсчета анализировать эти выражения не всегда удобно. Даже в отсутствие внешних сил, когда момент в системе k сохраняется:

$$M'_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3),$$

зависимость тензора моментов инерции от времени, отсутствие простой связи между компонентами момента и угловой скоростью в этой системе усложняют вид уравнений. Более простую связь (7.46) последние имеют в подвижной системе координат. Для вывода уравнений в этой системе используем соотношение

$$M_i = D_{ik}(t) M'_k \quad (7.48)$$

между проекциями вектора момента в системах координат K и k и формулу

$$\dot{D}_{ik} = \varepsilon_{isn} \omega_n D_{sk}, \quad (7.49)$$

которая есть следствие определения (7.27). Тогда, дифференцируя (7.48) и используя (7.47), находим

$$\begin{aligned}\dot{M}_i &= \dot{D}_{ik}(t)M'_k + D_{ik}(t)\dot{M}'_k = \\ &= \varepsilon_{isn}\omega_n D_{sk}M'_k + D_{ik}(t)N'_k = \varepsilon_{isn}\omega_n M_s + D_{ik}(t)N'_k.\end{aligned}\quad (7.50)$$

Величины M_s выражаются через компоненты угловой скорости и $D_{ik}(t)N'_k$ – компоненты момента внешней силы в подвижной системе координат. Тогда с учетом (7.46) получаем замкнутую систему уравнений для $\dot{\omega}$:

$$\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= N_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= N_3.\end{aligned}\quad (7.51)$$

Эти выражения называются *динамическими уравнениями Эйлера*. К ним нужно еще прибавить три *кинематических уравнения Эйлера* (7.32).

Система шести уравнений (7.51), (7.32) первого порядка для $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi, \theta, \psi$ достаточна для описания динамики твердого тела с неподвижной точкой.

Пусть твердое тело находится под действием силы тяжести $\vec{F} = Mg\vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, направленного вертикально. В неподвижной системе координат компоненты силы и момента импульса имеют вид

$$F'_i = -Mg\delta_{i3}, \quad N'_i = -\varepsilon_{ik3}Mgx'_{ck},$$

где x'_{ck} – координаты центра масс в системе k . В подвижной системе координат компоненты момента импульса выражаются через x_{ck} – координаты центра масс в этой системе и матрицу вращений:

$$N_i = D_{ik}N'_k = -MgD_{ik}\varepsilon_{kj3}D_{sj}x_{cs}. \quad (7.52)$$

Это выражение с помощью соотношений (7.15) записывается в виде

$$N_i = -Mg\varepsilon_{isn}D_{n3}x_{cs}. \quad (7.53)$$

Из-за специфики задачи удобно использовать величины D_{n3} как новые динамические переменные. Обозначим

$$D_{n3} = \gamma_n, \quad x_{c1} = x_0, \quad x_{c2} = y_0, \quad x_{c3} = z_0 \quad (7.54)$$

и подставим (7.53) в уравнения (7.51). В итоге получим уравнения Эйлера для движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки с координатами (x_0, y_0, z_0) в системе центра масс:

$$\begin{aligned}I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= -Mg(y_0\gamma_3 - z_0\gamma_2), \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= -Mg(z_0\gamma_1 - x_0\gamma_3), \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= -Mg(x_0\gamma_2 - y_0\gamma_1);\end{aligned}\quad (7.55)$$

$$\dot{\gamma}_i = \varepsilon_{isn}\omega_n\gamma_s. \quad (7.56)$$

Они представляют собой систему первого порядка для шести переменных ω_i, γ_i ($i = 1, 2, 3$), связанных условием

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (7.57)$$

После ее решения углы $\psi(t), \theta(t)$ находятся из определения

$$\gamma_1 = \sin\psi \sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\psi \sin\theta,$$

а для нахождения третьего угла Эйлера $\varphi(t)$ используется одно из кинематических уравнений Эйлера.

7.1.5. Алгоритм С.В. Ковалевской для интегрирования уравнений движения твердого тела с закрепленной точкой

Совершенство – воображаемое состояние или качество, отличающиеся от действительности наличием такого элемента, как безупречность, и свойственное прежде всего критике.

А. Бирс. Словарь Сатаны

Хотя точное решение уравнений механики в аналитическом виде возможно в редких случаях, по сравнению с численными расчетами оно дает большие преимущества. Такие решения позволяют исследовать динамику системы во всей области изменения параметров и в произвольных начальных условиях. Они являются основой различных приближенных методов теории воз-

мущений. Получение точных решений уравнений движения в квадратурах тесно связано, согласно теореме Лиувилля, с наличием у системы достаточно большого количества интегралов движения. Интегрируемые системы с N степенями свободы – это особый класс динамических систем, и основная проблема их обнаружения – нахождение N интегралов движения.

Задача интегрирования уравнений Эйлера (7.55), (7.56) в поле сил тяжести является одной из самых замечательных задач теоретической механики. Ее решение к настоящему времени еще далеко от полного завершения. Однако впечатляющие результаты, полученные в частных случаях Эйлером, Лагранжем, Пуассоном, Ковалевской, Пуанкаре и многими современными исследователями, обогатили механику и нелинейную динамику новыми идеями и методами. Положим $Mg = C$ и перепишем систему (7.55)–(7.56) в виде

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= -C(y_0 \gamma_3 - z_0 \gamma_2), \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= -C(z_0 \gamma_1 - x_0 \gamma_3), \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= -C(x_0 \gamma_2 - y_0 \gamma_1); \\ \dot{\gamma}_1 &= (\omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3), \\ \dot{\gamma}_2 &= (\omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1), \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3 &= (\omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2); \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (7.60)$$

В итоге мы получили систему шести уравнений первого порядка (7.58), (7.59) для шести переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Она имеет три интеграла движения, один из которых (7.60). Закон сохранения полной энергии E и закон сохранения проекции момента импульса M'_3 в неподвижной системе координат на вектор силы тяжести – два других интеграла движения. С учетом (7.45), (7.46), (7.48), (7.52) их можно записать в виде

$$E = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) - gM(x_0 \gamma_1 + y_0 \gamma_2 + z_0 \gamma_3); \quad (7.61)$$

$$M'_3 = (I_1 \omega_1 \gamma_1 + I_2 \omega_2 \gamma_2 + I_3 \omega_3 \gamma_3). \quad (7.62)$$

Поскольку в терминах углов Эйлера система (7.58), (7.59) – гамильтонова, то для ее интегрирования, согласно теореме Лиувилля,

необходимо помимо (7.60), (7.61) найти еще один интеграл движения.

В отсутствие внешних сил

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad (7.63)$$

когда сохраняются все проекции $\vec{M}'$, решение системы (7.58), (7.59) было найдено Якоби при помощи созданной им теории эллиптических функций. Лагранж указал интегрируемый частный случай, изученный позже Пуассоном, для эллипсоида вращения, когда центр тяжести находится на оси вращения:

$$I_1 = I_2, \quad x_0 = y_0 = 0 \quad (7.64)$$

и система имеет дополнительный интеграл движения

$$\omega_3 = \text{const.} \quad (7.65)$$

После этих работ в теории интегрирования системы (7.58), (7.59) не было получено существенных результатов. Учитывая важность этой проблемы, Парижская академия наук в 1888 г. объявила конкурс на соискание премии Бордена (3000 франков) за лучшую работу на тему о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Ранее, в течение 50 лет, эта премия выдавалась полностью только 3 раза. В числе 15 представленных работ на конкурс была работа **С. Ковалевской** «Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки» под девизом «Говори,



Софья Васильевна Ковалевская (3(15) января 1850 – 29(11) января 1891) – выдающийся русский математик, писатель и публицист. Первая в мире женщина – профессор математики и первая женщина – член-корреспондент Петербургской академии наук (1889)

что знаешь; делай, что обязан; будь, чему быть». Комиссией эта работа была признана «замечательным трудом, который содержит открытие нового случая», автору была присуждена полная премия, увеличенная до 5000 франков.

София Ковалевская родилась в Москве 15 января 1850 г. Она была дочерью генерал-лейтенанта артиллерии В.В. Корвин-Круковского и Е.Ф. Шуберт. Ее дед и прадед по материнской линии были видными учеными. Детство ее, до 18 лет, прошло в имении Палибино, недалеко от Великих Лук. Она получила домашнее образование. «В дом взяли двух новых лиц: гувернера-поляка и гувернантку-англичанку. Гувернер оказался тихим и знающим человеком, давал превосходные уроки, но собственно на воспитание мое имел мало влияния. Зато гувернантка внесла в нашу семью совсем новый элемент, хотя она воспитывалась в России и хорошо говорила по-русски, но она вполне сохранила все типические особенности англосаксонской расы: прямолинейность, выдержку, умение всякое дело довести до конца. Эти качества давали ей громадное преимущество над остальными домашними, которые все отличались совсем противоположными свойствами, и ими объясняется то влияние, которое она приобрела в нашем доме. После поступления к нам все ее старания стали клониться к тому, чтобы устроить из нашей детской род английской *nursery* (няня (англ.)), в которой она могла бы воспитать примерных английских мисс. А бог ведает, как трудно было завести рассадник английских мисс в русском помещичьем доме, где веками и поколениями привились привычки барства, неряшливости и “спустя рукава”. Однако благодаря ее замечательной настойчивости она все же до известной степени добилась своего» [29. С. 36].

Петр Васильевич Корвин-Круковский – дядя Софии – зародил увлечение математикой у племянницы. «Я считалась его любимицей, и мы, бывало, часами просиживали вместе, толкуя о всякой всячине. Когда он, бывало, был занят какой-нибудь идеей, он только о ней одной мог и думать, и говорить... Хотя он математике никогда не обучался, но питал к этой науке глубочайшее уважение. Из разных книг набрался он кое-каких математических сведений и любил пофилософствовать по их поводу, причем ему часто случалось размышлять вслух в моем присутствии. От него услышала я, например, в первый раз о квадратуре круга, об асимптотах, к которым кривая постоянно приближается, никогда их не достигая, о многих других вещах подобного же ро-

да, – смысла которых я, разумеется, понять еще не могла, но которые действовали на мою фантазию, внушая мне благоговение к математике как к науке высшей и таинственной, открывающей перед посвященными в нее новый чудесный мир, недоступный простым смертным» [29. С. 36].

По счастливой случайности одну из комнат в имении отца оклеили листами литографированных лекций Остроградского о дифференциальном и интегральном исчислении. «Листы эти, испещренные странными, непонятными формулами, скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаюсь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны бы следовать друг за другом. От долгого ежедневного созерцания внешний вид многих формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным... Когда, много лет спустя, уже 15-летней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге, Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я охватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной, “точно я наперед их знала”. Я помню, он именно так и выразился. И дело, действительно, было в том, что в ту минуту, когда он объяснял мне эти понятия, мне вдруг живо припомнилось, что все это стояло на памятных мне листах Остроградского, и самое понятие о пределе показалось мне давно знакомым» [29. С. 62].

Интерес к литературе возник у С. Ковалевской под влиянием старшей сестры Анны, литературные дарования которой были высоко оценены Ф.М. Достоевским. В 1886 г. в Петербурге Ковалевская занималась физикой и брала уроки высшей математики у замечательного педагога А.Н. Страннолюбского. Сестры выросли в атмосфере просветительских идей «нигилизма» Г. Чернышевского, Н.А. Добролюбова, Д.И. Писарева, проповедовавших просвещение и равноправие женщин. Сестры Корвин-Круковские мечтали получить высшее образование, которое для российских женщин возможно было только за границей. Для этого практиковалось заключение фиктивных браков. Кандидатом на брак с Соней стал Владимир Онуфриевич Ковалевский. Познакомившись с невестой, В. Ковалевский писал своему брату: «Несмотря на свои 18 лет, воробышек [так называли Со-

ню в семье за малый рост] образована великолепно, знает все языки как свой собственный и занимается до сих пор главным образом математикой, причем проходит уже сферическую тригонометрию и интегралы – работает, как муравей, с утра до ночи и при всем этом жива, мила и очень хороша собой. Вообще это такое счастье свалилось на меня, что трудно себе и представить... Я со всею своею опытностью в жизни, с начитанностью и напористостью не могу и вполнину так быстро схватывать и разбирать разные политические и экономические вопросы, как она; и будь уверен, что это не увлечение, а холодный разбор. Я думаю, что эта встреча сделает из меня порядочного человека, что я брошу издательство и стану заниматься, хотя не могу скрывать от себя, что эта натура в тысячу раз лучше, умнее и талантливее меня. О прилежании я уже не говорю, как говорят, сидит в деревне по 12 часов, не разгибая спины, и, насколько я видел здесь, способна работать так, как я и понятия не имею. Вообще, это маленький феномен, и за что он мне попался, я не могу сообразить» [87. С. 59]. В 18 лет Софья вступает в фиктивный брак, который с течением времени перестал быть формальным. После свадьбы Ковалевские стали посещать в Петербурге лекции по естествознанию И.М. Сеченова, познакомились с математиком П.Л. Чебышевым. В.О. Ковалевский увлекся палеонтологией и стал известным ученым в этой области.

Весной 1869 г. Ковалевские и сестра Анна уехали за границу, где пробыли пять лет. После всевозможных преград комиссия Гейдельбергского университета допустила Софью к занятиям в университете. Она слушала лекции по физике и математике фон Гельмгольца, Кирхгофа, Кенигсбергера и Дю Боа-Реймонд, которых поражала быстрым усвоением материала. Наиболее интересны ей были лекции выдающегося математика Карла Вейерштрасса, который в то время занимался исследованием свойств эллиптических и более общих функций с помощью степенных рядов при действительных и комплексных значениях аргумента. К нему и обратилась Софья с просьбой давать частные уроки математики. Для проверки ее способностей Вейерштрасс дал ей несколько трудных задач. После того как задачи успешно были решены, он дал согласие заниматься с ней дома, так как занятия в Берлинском университете женщинам были запрещены. Занятия продолжались с 1871 по 1874 г. Сохранилось 88 писем Вейерштрасса к Софье Ковалевской. В одном из них он писал: «Говоря серьезно, милая, дорогая Соня, будь уверена, я никогда

не забуду, что именно я обязан моей ученице тем, что обладаю не только моим лучшим, но и единственным настоящим другом... Ты можешь быть твердо уверена: я всегда буду преданно поддерживать тебя в твоих научных стремлениях» [110. С. 42]. В 1874 г. Совет Геттингенского университета без защиты удостоил ее степени доктора философии по математике и магистра изящных искусств за три присланные ею работы «К теории уравнений в частных производных», «О приведении одного класса абелевых интегралов третьего рода к эллиптическим интегралам», «Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна». В первой доказана теорема о существовании аналитических решений дифференциальных уравнений с частными производными. Эта работа – одна из наиболее замечательных. Позже установили, что аналогичную теорему доказал О. Коши. Ее стали называть «теоремой Коши–Ковалевской», и она вошла во все основные курсы теории дифференциальных уравнений.

Сестра Софьи Анна вышла замуж за Виктор Жаклара, деятельного члена I Интернационала, legionера Национальной гвардии, и была участницей Парижской коммуны. Она участвовала в работе комиссий по образованию и женскому вопросу, занималась организацией госпиталей. В. Жаклар руководил вооруженными силами коммунаров в районе Монмартра. Софья и Владимир Ковалевские были полностью на стороне парижских коммунаров. Они приезжали в осажденный Париж в апреле 1871 г., где С. Ковалевская оказывала помощь по уходу за ранеными. Осенью 1874 г. Ковалевские вернулись в Россию. В повести «Нигилистка» С. Ковалевская от лица главной героини писала: «Месяца три перед тем я окончила курс в одном из иностранных университетов и с докторским дипломом в кармане вернулась в Россию. После пятилетней уединенной, почти затворнической жизни в маленьком университетском городке петербургская жизнь сразу охватила и как будто опьянила меня. Забыв на время те соображения об аналитических функциях, о пространстве, о четырех измерениях, которые еще так недавно наполняли весь мой внутренний мир, я теперь всей душой уходила в новые интересы, знакомилась направо и налево, старалась проникнуть в самые разнообразные кружки и с жадным любопытством присматривалась ко всем проявлениям этой сложной, столь пустой по существу и столь завлекательной на первый взгляд сутолоки, которая называется петербургской жизнью.

Все меня теперь интересовало и радовало. Забавляли меня и театры, и благотворительные вечера, и литературные кружки с их бесконечными, ни к чему не ведущими спорами о всевозможных абстрактных темах. Обычным посетителям этих кружков споры эти уже успели приестся, но для меня они имели еще всю прелесть новизны. Я отдавалась им со всем увлечением, на которое способен болтливый по природе русский человек, проживший пять лет в неметчине, в исключительном обществе двух-трех специалистов, занятых каждый своим узким, поглощающим его делом и не понимающих, как можно тратить драгоценное время на праздное чесание языка. То удовольствие, которое я сама испытывала от общения с другими людьми, распространялось и на окружающих. Увлекаясь сама, я вносила новое оживление и жизнь в тот кружок, где вращалась. Репутация ученой женщины окружала меня известным ореолом; знакомые все чего-то от меня ждали, обо мне успели уже прокричать два-три журнала; и эта еще совсем новая для меня роль знаменитой женщины хотя и смущала меня немного, но все же очень тешила на первых порах. Ну, словом, я находилась в самом благодушном настроении духа, так сказать, переживала свою *lune de miel* (медовый месяц (фр.) известности и в эту эпоху своей жизни, пожалуй, готова была бы воскликнуть: “Все устроено наилучшим образом в наилучшем из миров”» [29. С. 188]. Однако подходящей работы для Ковалевских с их политическими взглядами и образованием в Петербурге не нашлось. Она имела право преподавать только арифметику в младших классах женской гимназии. Рассказывают, что после очередного отказа чиновника ей в работе и его слов «У нас всегда этим занимались мужчины, слава богу, хорошо, и поэтому не надо нам никаких нововведений» она смело заявила: «Когда Пифагор открыл свою знаменитую теорему, он принес в жертву богам 100 быков. С тех пор все скоты боятся нового». Подходящей работы в Петербурге и Москве для нее не было. В это время Ковалевская отходит от занятий математикой. Она становится публицистом, журналистом, работает некоторое время в газете «Новое время». В периодической печати появляются ее популярные статьи и критические заметки. Доход от обзоров в журналах и полученное наследство дали период относительного материального благополучия. В 1878 г. у Ковалевских родилась дочь, названная в честь матери Софьей. В это же время, как вспоминала Софья Васильевна, некоторая часть общества была охвачена «духом наживы

и разных коммерческих предприятий. Это течение захватило и моего мужа и отчасти, должна покаяться в своих грехах, и меня самое» [109. С. 167].

Весной 1881 г. Софья Васильевна уехала в Берлин, где возобновила контакты с европейскими учеными и стала работать под руководством К. Вейерштрасса. В 1883 г. она получила приглашение от шведского математика Г. Миттаг-Лефлёра занять должность приват-доцента в Стокгольмском университете. Летом 1884 г. С. Ковалевская была назначена профессором этого учебного заведения. Чтение лекций должно было происходить первый год по-немецки, а со второго – по-шведски. Она быстро освоила шведский язык и печатала на нем свои математические работы. За семь лет она прочитала 12 математических курсов. В те же годы проявился ее яркий литературный талант. Она написала роман «Нигилистка» (1884), героиня которого считала социализм единственным средством решения всех вопросов; семейную хронику «Воспоминания детства» (1890) и др. По-шведски написаны воспоминания о польском восстании и роман «Семья Воронцовых», сюжет которого относится к эпохе брожения в среде русской молодежи конца 60-х гг. XIX в. Особый интерес представляет произведение «Борьба за счастье» (1887). В этой драме, написанной Ковалевской в сотрудничестве со шведской писательницей Леффлёр-Эдгрен, но большей частью по идее Ковалевской, она желала изобразить судьбу и жизнь одних и тех же людей с двух точек зрения, «как оно было» и «как оно могло быть». В основу драмы Ковалевская положила научную идею о том, что все поступки людей заранее предопределены. В то же время она признавала, что в жизни могут быть такие моменты, когда представляются возможности для тех или иных действий, и в дальнейшем личность развивается в зависимости от выбранного пути. Свою гипотезу Ковалевская основывала на работе А. Пуанкаре о дифференциальных уравнениях, решения которых с геометрической точки зрения являются непрерывными кривыми линиями, разветвляющимися только в некоторых изолированных точках. Теория предсказывает поведение системы до точек раздвоения (бифуркации), где все делается неопределенным и бесконечно малое возмущение может определить движение системы только по одному из разветвлений. По словам Леффлёр, в главном из женских персонажей этой драмы, Алисе, Ковалевская обрисовала саму себя. Софья Ковалевская по убеждениям была близка к идеям социализма революционеров-на-

родников. В Париже она встречалась с вождем народников Петром Лавровичем Лавровым, с которым она и ее родители были знакомы еще в России. Она участвовала в социалистических конгрессах, была знакома со многими политическими эмигрантами, мечтала о прекрасном будущем для всех и пыталась приблизить его.

Ее двоюродная сестра С. Аделунг вспоминала, что Софья была постоянно готова пройти сквозь огонь, умереть мученической смертью за свои высокие идеалы, за человечество. Она умела и других захватывать своим воодушевлением, которое светилось в ее глазах и звучало в словах. С. Ковалевская активно участвовала в борьбе за равноправие женщин. По ее словам, она была рада, что родилась женщиной, так как это дает ей возможность одновременно служить истине – науке – и справедливости – прокладывая новый путь женщинам. Ковалевская с увлеченностью относилась ко всему, что окружало ее, при тонкой наблюдательности и вдумчивости обладала большой способностью к художественному воспроизведению виденного и пережитого. Литературное дарование поздно пробудилось в ней, а преждевременная смерть не дала в достаточной степени определиться этой новой стороне замечательной, глубоко и разносторонне образованной женщины.

Можно только поражаться тому, как много она в себе совмещала: ученый, редактор научного журнала, писательница, общественный деятель, мать, светская дама. После получения премии Бордена в 1888 г. Ковалевская поселилась близ Парижа. В следующем году она получила от Шведской академии наук конкурсную премию короля Оскара II в 1500 крон за новую работу о вращении твердых тел. Русские математики безуспешно пытались привлечь С.В. Ковалевскую к научной и педагогической работе на родине и найти ей подходящее место работы. В прошение по этому делу на имя президента Академии, поданном генералом А.И. Косичем, приводились знаменательные слова Наполеона о том, что «всякое государство должно дорожить возвращением выдающихся людей более, чем завоеванием крупного города». Наконец в ноябре 1889 г. был решен вопрос о «допущении лиц женского пола к избранию в член-корреспонденты». Ковалевскую избрали членом-корреспондентом на физико-математическом отделении Российской академии наук 7 ноября 1889 г. К ней пришли мировая известность и признание ее заслуг на родине, но все ее дальнейшие научные замыслы оборвала

преждевременная смерть. Возвращаясь в Швецию из Италии, она простудилась по дороге. В угнетенном настроении, простуженная и больная, она продолжала читать лекции. Это привело к резкому усилению болезни, и 10 февраля 1891 г. Софья Васильевна умерла от тяжелого воспаления легких. Похоронена Софья Ковалевская в Стокгольме на кладбище “Norra begravningsplatsen”.

На ее похоронах от имени всех математиков Г. Миттаг-Леффлёр, бывший в то время редактором стокгольмской Высшей школы, благодарил покойную за глубину и ясность, с которыми она направляла умственную жизнь юношества, и за сокровища дружбы, которыми Софья Ковалевская оделяла всех близких и далеких учеников и друзей. На торжественном заседании 13 января 1950 г., посвященном 100-летию со дня рождения С.В. Ковалевской президент Академии наук СССР С.И. Вавилов сказал: «Вклад, внесенный в науку Ковалевской за ее недолгую жизнь, необычайно полноценен и многозначителен. Ее фундаментальное исследование по вращению твердого тела послужило основой для дальнейшего развития важнейших вопросов механики в нашей стране и во всем мире. Ее тонкие исследования по теории дифференциальных уравнений и по некоторым вопросам математической физики и теоретической астрономии сохраняют свое значение и сегодня. В истории человечества до Ковалевской не было женщин, равной ей по силе и своеобразию математического таланта... Ковалевская была не только математиком. Она проявила себя как писательница... и как публицист. Она не замыкалась в узкую математическую специальность и глубоко понимала свой начный долг перед страной, перед народом...» [109. С. 170].

Оригинальная идея, положенная С. Ковалевской в основу решения задачи, носит чисто математический характер и не имеет отношения к механике. После записи уравнений механики в XVIII в. в форме дифференциальных уравнений задача их интегрирования стала важнейшей в математическом анализе. К концу XVIII в. некоторые из известных сегодня методов интегрирования дифференциальных уравнений были установлены. Общие решения их выражались через известные в то время элементарные функции. Кроме того, начиная с работ И. Ньютона при решении линейных и нелинейных дифференциальных уравнений типа

$$F(\dot{x}, \ddot{x}, x, t) = 0 \quad (7.66)$$

применялись мощные методы локального анализа – определение решения в виде рядов

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

по степеням независимой переменной t . Коэффициенты a_n вычислялись после подстановки такого ряда в уравнение (7.66). Если линейные дифференциальные уравнения с решениями в форме рядов были важны для разных физических приложений, то им присваивалось особое название. Таким способом уже в начале XIX в. при исследовании линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy(x)}{dx} + q(x) = 0 \quad (7.67)$$

были введены новые функции – функции Бесселя, Лежандра, гипергеометрическая функция и т. д. Начиная с работ О. Коши при изучении таких уравнений оказалось чрезвычайно плодотворным использовать теорию функций комплексного переменного. Дифференциальные уравнения для вещественной функции $y(x)$ рассматриваются в комплексной области, независимая переменная x и зависимая y полагаются комплексными переменными z и $y(z)$ соответственно. Для комплексных функций вводится понятие производной $y'(z)$ в точке z комплексной области D как предела:

$$y'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(z+h) - y(z)}{h},$$

причем комплексное число h стремится к нулю *произвольным образом*. Функции, имеющие производные в каждой точке области D , называются *аналитическими* в этой области и разлагаются в сходящийся ряд

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (z - z_0)^n \quad (7.68)$$

с коэффициентами w_n вблизи любой точки $z_0 \in D$. Точки в комплексной области переменного z , в которых однозначная функ-

ция $y(z)$ не является аналитической, носят название *особых точек*. Если z_0 – изолированная особая точка, в окрестности которой разложение функции имеет вид

$$y(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} w_n (z - z_0)^n,$$

то точка z_0 – *полюс* порядка N . Говорят, что функция $y(z)$ *мероморфна* в комплексной области, если она *аналитическая* в ней, кроме особых точек, которые являются полюсами. Доказано, что если коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ выражения (7.67) не имеют особенностей в комплексной области, то общее решение аналитично в этой области. Вблизи особых точек функций $p(z)$, $q(z)$ существенно меняется вид решений и разложение типа (7.68) не имеет места.

Во всех исследованиях по механике до работы С. Ковалевской время рассматривалось как независимая переменная, принимающая только действительные значения. Она заметила, что в рассмотренных ранее случаях (7.63), (7.64) решение системы (7.58), (7.59) выражалось через эллиптические функции, которые являются *мероморфными функциями* в комплексной плоскости переменного t . В своей работе она *впервые стала считать время t независимой комплексной переменной и поставила цель определить все случаи, когда решения системы (7.58), (7.59) представляют однозначные мероморфные функции во всей комплексной области переменной t* . В этом случае дифференциальные уравнения можно формально проинтегрировать с помощью рядов

$$\omega_i = \frac{1}{t^{n_i}} \sum_{a=0}^{\infty} \omega_{ia} t^a \quad (i=1, 2, 3), \quad (7.69)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{t^{m_i}} \sum_{a=0}^{\infty} \gamma_{ia} t^a \quad (i=1, 2, 3),$$

где n_i, m_i – целые числа. До указанной выше работы С. Ковалевской локальный анализ решений нелинейных дифференциальных уравнений с комплексными значениями времени для поиска интегралов движения не применялся.

Система (7.58), (7.59) состоит из шести уравнений для шести переменных с одним условием связи, поэтому ряды (7.69)

представляют общее решение, если содержат *пять произвольных постоянных*. После подстановки (7.69) в (7.58)–(7.60) находим, что

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1,$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = 2$$

и комплексные коэффициенты ω_{i0}, γ_{i0} удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} -I_1\omega_{10} + (I_3 - I_2)\omega_{20}\omega_{30} &= -C(y_0\gamma_{30} - z_0\gamma_{20}), \\ -I_2\omega_{20} + (I_1 - I_3)\omega_{30}\omega_{10} &= -C(z_0\gamma_{10} - x_0\gamma_{30}), \\ -I_3\omega_{30} + (I_2 - I_1)\omega_{20}\omega_{10} &= -C(x_0\gamma_{20} - y_0\gamma_{10}); \\ -2\gamma_{10} &= (\omega_{30}\gamma_{20} - \omega_{20}\gamma_{30}), \\ -2\gamma_{20} &= (\omega_{10}\gamma_{30} - \omega_{30}\gamma_{10}), \\ -2\gamma_{30} &= (\omega_{20}\gamma_{10} - \omega_{10}\gamma_{20}). \end{aligned} \quad (7.70)$$

Коэффициенты ω_{im}, γ_{im} ($m > 0$) определяются системой линейных уравнений

$$\begin{aligned} (m-1)I_1\omega_{1m} + (I_3 - I_2)(\omega_{2m}\omega_{30} + \omega_{20}\omega_{3m}) + C(y_0\gamma_{3m} - z_0\gamma_{2m}) &= P_m, \\ (m-1)I_2\omega_{2m} + (I_1 - I_3)(\omega_{3m}\omega_{10} + \omega_{30}\omega_{1m}) + C(z_0\gamma_{1m} - x_0\gamma_{3m}) &= Q_m, \\ (m-1)I_3\omega_{3m} + (I_2 - I_1)(\omega_{2m}\omega_{10} + \omega_{20}\omega_{1m}) + C(x_0\gamma_{2m} - y_0\gamma_{1m}) &= R_m, \\ (m-2)\gamma_{i0} - \varepsilon_{ism}(\omega_{n0}\gamma_{s0} + \omega_{n0}\gamma_{s0}) &= T_{im}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Правые части этих уравнений являются полиномами от величин ω_{in}, γ_{in} с индексом $n < m$. Система (7.70), (7.71) полностью определяет все коэффициенты разложения, кроме интересующих нас случаев, когда определитель левой части уравнений (7.71), линейный относительно ω_{im}, γ_{im} , обращается в нуль при пяти целых положительных значениях m . Если еще при этих значениях m правые части уравнений (7.71) также обратятся в нуль, то пять коэффициентов в разложении (7.69) будут произвольными и такое разложение будет представлять общее решение.

Рассмотрим вначале случай, когда $I_1 = I_2$. Оси координат всегда можно выбрать так, что $y_0 = 0$. Тогда из (7.70) после алгебраических выкладок следует уравнение

$$\omega_{30}\gamma_{30} = 0.$$

Простой анализ показывает, что (7.70) имеет две системы решений

$$1) \quad \gamma_{10} = -\frac{2I_3}{Cx_0}, \quad \gamma_{20} = -\frac{2I_3i\varepsilon}{Cx_0}, \quad \gamma_{30} = 0, \quad (7.72)$$

$$\omega_{10} = i\omega_{20}, \quad \omega_{20} = -\frac{2I_3z_0}{(I_1 - 2I_3)x_0}, \quad \omega_{30} = -2i\varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1;$$

$$2) \quad \gamma_{10} = -\frac{2iI_3}{C(ix_0 + z_0)}, \quad \gamma_{20} = 0, \quad \gamma_{30} = -\frac{2I_3\varepsilon}{C(ix_0 + z_0)}, \quad (7.73)$$

$$\omega_{10} = 0, \quad \omega_{20} = 2i\varepsilon, \quad \omega_{30} = 0, \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Для решений (7.72) определитель D левой части уравнений (7.71) равен

$$D = I_3I_1^2(m-2)(m+1)(m-3)(m-4) \left(m - \frac{2I_3 - I_1}{I_1} \right) \left(m - \frac{2(I_2 - I_3)}{I_1} \right) \quad (7.74)$$

и имеет пять корней с $m \geq 0$ при условии, что величины $\frac{2I_3 - I_1}{I_1} \geq 0$

и $\frac{2(I_1 - I_3)}{I_1} \geq 0$ – положительные целые числа. Это возможно

только в случае $I_1 = 2I_3$. Для того чтобы ω_{10} и ω_{20} в (7.72) не обращались в бесконечность, необходимо положить $z_0 = 0$. Тогда величина ω_{20} будет произвольной, а ω_{10} станет равной $i\omega_{20}$. Прямые вычисления показывают, что при

$$\gamma_{10} = -\frac{2I_3}{Cx_0}, \quad \gamma_{20} = \frac{2I_3i\varepsilon}{Cx_0}, \quad \gamma_{30} = 0, \quad \omega_{10} = i\omega_{20}, \quad (7.75)$$

$$\omega_{20} = -\frac{2I_3z_0}{(I_1 - 2I_3)x_0}, \quad \omega_{30} = -2i\varepsilon$$

определитель D равен нулю при $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Можно проверить, что при этих значениях m равны нулю и правые части уравнений (7.71). Поэтому при указанных значениях m коэффициенты ω_{im}, γ_{im} содержат пять произвольных постоянных. Подобный анализ можно провести для системы решений (7.74) и неравных друг другу моментов инерции. В итоге мы приходим к следующей теореме.

Теорема С. Ковалевской. Уравнения (7.57)–(7.60) в общем случае не имеют однозначных решений, допускающих пять произвольных постоянных и не имеющих на всей плоскости переменного t других особых точек, кроме полюсов. Исключение составляют случаи

- 1) $I_1 = I_2 = I_3$,
- 2) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$,
- 3) $I_1 = I_2, \quad x_0 = y_0 = 0$,
- 4) $I_1 = I_2 = 2I_3, \quad z_0 = 0$.

Для четвертого случая, который был неизвестен ранее, уравнения движения принимают вид

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\omega_2 \omega_3}{2}, \quad \dot{\omega}_2 = -\frac{\omega_3 \omega_1 + C_1 \gamma_3}{2}, \quad \dot{\omega}_3 = C_1 \gamma_2;$$

$$\dot{\gamma}_i = \varepsilon_{isn} \omega_n \gamma_s, \quad C_1 = \frac{2Cx_0}{I_1}.$$

Для него С. Ковалевская нашла интеграл движения. Поскольку

$$\frac{d}{dt}(\omega_1 + i\omega_2)^2 = -i(\omega_1 + i\omega_2)^2 \omega_3 - iC_1(\omega_1 + i\omega_2)\gamma_3; \quad (7.76)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma_1 + i\gamma_2) = -i(\gamma_1 + i\gamma_2)\omega_3 + i(\omega_1 + i\omega_2)\gamma_3, \quad (7.77)$$

то после умножения второго уравнения на C_1 и сложения с первым находим, что величина

$$\Omega = (\omega_1 + i\omega_2)^2 + C_1(\gamma_1 + i\gamma_2)$$

удовлетворяет простому уравнению

$$\dot{\Omega} = -i\omega_3 \Omega. \quad (7.78)$$

Отсюда следует, что произведение Ω на комплексно-сопряженную величину Ω^* является интегралом движения I :

$$I = \Omega \Omega^* = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + C_1 \gamma_1)^2 + (2\omega_1 \omega_2 + C_1 \gamma_2)^2. \quad (7.79)$$

С помощью этого интеграла движения, как было показано С. Ковалевской, интегрирование системы (7.76), (7.77) в четвертом случае сводится к обращению гиперэллиптических интегралов, что и дает полное решение задачи в терминах тэта-функций от двух переменных [30–32].

7.2. СВОЙСТВО ПЕНЛЕВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

7.2.1. Краткий обзор аналитической теории дифференциальных уравнений

В начале этого раздела мы дадим беглый обзор аналитической теории дифференциальных уравнений [31–35]. При их исследовании в комплексной области значений переменной t необходима классификация особых точек решений дифференциальных уравнений. Классификация особых точек прежде всего основана на числе значений функции при обходе вокруг точки. Особая точка $t = t_0$ функции, при обходе вокруг которой значение функции изменяется, называется *критической особой точкой*. В противном случае она называется *некритической*. Далее выделяются особые точки, которые могут иметь *алгебраические функции*. Например, линейное уравнение

$$(t - b)\dot{x} = ax \quad (7.80)$$

имеет решение

$$x = C(t - b)^a. \quad (7.81)$$

Положим $t = b + re^{i\varphi}$. При обходе в комплексной области вокруг точки b угол φ меняется на 2π и значение функции $\bar{x}$ после обхода будет $\bar{x} = x e^{2i\pi a}$ (рис. 7.6). Тогда функция $x(t)$ в точке b

1) есть аналитическая функция при целых положительных значениях a ;

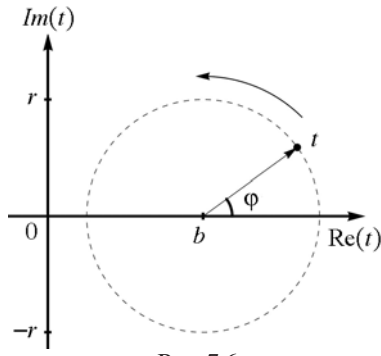


Рис. 7.6

2) имеет *полюс* порядка a при целых отрицательных значениях a ;

3) имеет *критическую алгебраическую особую точку* при положительных рациональных зна-

чениях $a = \frac{n_1}{n_2}$, где n_1, n_2 – целые

числа; при обходе вокруг особой точки n_2 раз функция принимает прежнее значение;

4) имеет *критический полюс*

при отрицательных рациональных значениях a .

Особые точки в пунктах 2–4 исчерпывают все *алгебраически особые точки*. Для классификации неалгебраических особых точек вводится понятие *области неопределенности*. Определим окружность радиуса r с центром в особой точке t_0 и обозначим Δ_r множество значений, которое принимает функция $x(t)$ внутри окружности радиуса r . При неограниченном уменьшении r множество Δ_r стремится к некоторому предельному множеству, называемому областью неопределенности. Если она состоит из одной точки, то особая точка называется *трансцендентной особой точкой*.

Функция $x = \ln(t - a)$ является решением уравнения

$$\dot{x} = e^{-x},$$

и точка $x = a$ – трансцендентная особая точка (логарифмическая точка ветвления). После подстановки $z = a + re^{i\varphi}$ это решение принимает вид $x = i\varphi + \ln r$. В окрестности $r = 0$ оно имеет неограниченное число значений, которые все стремятся к бесконечности при $r \rightarrow 0$. Особая точка называется *существенно особой точкой*, если область неопределенности состоит не из одной точки. Примером существенно особой точки является

точка $t = 0$ решения $x(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\right)$ уравнения

$$\dot{x} = -x \ln^2 x. \quad (7.82)$$

Значение $x(t)$ зависит от направлений в комплексной области, по которым t стремится к нулю. Например, если t стремится к нулю,

принимая положительные действительные значения, то $x(t)$ стремится к бесконечности; если t имеет только отрицательные действительные значения, то $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Полюса и существенно особые точки являются примерами не критических особых точек.

Фуксу принадлежит важное разделение особых точек решений дифференциальных уравнений на два класса: *подвижные и неподвижные*. Особые точки решений дифференциальных уравнений в комплексной области, положение которых не зависит от начальных условий, называются *неподвижными*. Особые точки решений дифференциальных уравнений на комплексной области, зависящие от начальных данных, называются *подвижными*. Дифференциальное уравнение

$$2tx\dot{x} = 1 \quad (7.83)$$

имеет решение

$$x = \sqrt{\ln\left(\frac{t}{C}\right)}, \quad (7.84)$$

для которого точки $t = 0$ и $t = \infty$ являются трансцендентными неподвижными особыми точками. Из разложения вблизи $t = C$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{t}{C}\right) &= \ln\left(\frac{t-C}{C} + 1\right) = \frac{t-C}{C} + \frac{1}{2}\left(\frac{t-C}{C}\right)^2 + \dots, \\ \sqrt{\ln\left(\frac{t}{C}\right)} &= \sqrt{\frac{t-C}{C} + \frac{1}{2}\left(\frac{t-C}{C}\right)^2 + \dots} = \\ &= \sqrt{\frac{t-C}{C}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t-C}{C}\right) + \dots} = \sqrt{t-C} \left(\frac{1}{\sqrt{C}} + \dots\right) \end{aligned} \quad (7.85)$$

видно, что точка $t = C$ – критическая подвижная особая точка.

После С. Ковалевской, впервые применившей аналитическую теорию дифференциальных уравнений в задаче механики, наибольшая активность математиков в конце XIX в. проявилась в классификации обыкновенных дифференциальных уравнений по типу сингулярностей, которые имеют их решения. Ре-

шения линейных дифференциальных уравнений имеют только неподвижные особые точки, определяемые особенностями коэффициентов уравнений. В нелинейных дифференциальных уравнениях положение подвижных особых точек не всегда может быть определено по виду уравнения и в общем случае их нахождение представляет большие трудности. П. Пенлеве и его школа на основе нового метода исследовали класс уравнений второго порядка

$$\ddot{x} = F(\dot{x}, x, t), \quad (7.86)$$

где F – рациональная функция по $x, \dot{x}$ и аналитическая по t . Они нашли 50 уравнений, *решения которых имеют только критические неподвижные точки*. Из них 44 уравнения могут быть проинтегрированы через известные в то время функции. Решения шести уравнений определяли новые специальные функции, которые теперь называются *трансцендентами Пенлеве*. Первое и второе уравнения Пенлеве имеют простой вид

$$\ddot{x} = 6x^2 + t, \quad (7.87)$$

$$\ddot{x} = 2x^3 + tx + \alpha,$$

где α – произвольный параметр. Решения этих уравнений характеризуются только подвижными полюсами.

Дадим еще несколько определений. Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение *имеет свойство Пенлеве*, если его общее решение не имеет критических подвижных точек. Дифференциальное уравнение со свойством Пенлеве называют *уравнениями типа Пенлеве*. Решения таких уравнений имеют только подвижные полюса.

Около 40 лет назад в связи с открытием интегрируемых уравнений в частных производных возникла острая необходимость найти простой аналитический критерий выявления интегрируемых систем в теории поля и нелинейной динамике. Произошло «замечательное возрождение интереса к работам Ковалевской, Пенлеве и других, и их идеи стали играть центральную роль в определении и понимании интегрируемости динамических систем» [32. С. 238]. Для поиска интегралов движения необходимо определить особые точки решения дифференциальных уравнений в комплексной области переменной t . Такой анализ

зависит от свойств дифференциальных уравнений и не требует явного вида решений. «Эта идея совсем старая и имеет своим началом классическую работу великого русского математика Софьи Ковалевской» [36. С. 324].

7.2.2. Современный алгоритм анализа интегрируемых систем

Предположение, что интегрируемое нелинейное уравнение должно иметь свойство Пенлеве, оказалось чрезвычайно плодотворным и эффективным. Современный алгоритм проверки интегрируемости нелинейных уравнений основан на работах С. Ковалевской, М. Абловица, А. Рамани, Х. Сигура (далее алгоритм КАРС) [35–37]. Согласно ему процедура исследования интегрируемости дифференциального уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, t\right), \quad (7.88)$$

где F – аналитическая функция по переменной t и рациональная функция по остальным переменным, состоит в следующем.

Предполагается, что решение этого уравнения имеет только простые полюсы при $t = t_0$ и вблизи t_0 его можно разложить в ряд Лорана

$$x = \frac{1}{(t - t_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} x_n (t - t_0)^n \quad (7.89)$$

с постоянными коэффициентами x_n .

Первый шаг алгоритма состоит в определении наименьшей степени m . С этой целью в уравнение (7.89) подставляется выражение

$$x = \frac{x_0}{\tau^m}, \quad \tau = t - t_0 \quad (7.90)$$

и анализируются слагаемые уравнения с наименьшими значениями m . Например, после подстановки (7.90) в уравнение ангармонического осциллятора без затухания

$$\ddot{x} = Ax - Cx^3 \quad (7.91)$$

или с затуханием

$$\ddot{x} = Ax - Cx^3 - B\dot{x} \quad (7.92)$$

мы получаем

$$(1 + m)mx_0\tau^{-2-m} + Cx_0^3\tau^{-3m} - Ax_0\tau^{-m} = 0 \quad (7.93)$$

или

$$(1 + m)mx_0\tau^{-2-m} + Cx_0^3\tau^{-3m} - Ax_0\tau^{-m} - Bmx_0\tau^{-1-m} = 0 \quad (7.94)$$

соответственно. Наиболее сингулярные члены, которые часто называют *ведущими членами* уравнения ($\ddot{x}$ и x^2), должны обратиться в нуль при $\tau \rightarrow 0$. Приравнявая их показатели степени переменной τ , находим из уравнения $-3m = -m - 2$, что $m = 1$. Тогда $2x_0 + Cx_0^3 = 0$ и

$$x_0 = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{C}}\varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (7.95)$$

Определяемое на этом шаге значение (или несколько значений) m должно быть целым и положительным числом. Для дробных значений m уравнение (7.88) имеет критические подвижные особые точки и не имеет свойство Пенлеве. В ряде случаев при отсутствии этого свойства значение m может подсказать замену функции $x(t)$, с помощью которой исходное выражение может быть преобразовано в уравнение типа Пенлеве. Так, для уравнения

$$\dot{x} + Ax + Cx^3 = 0$$

величина m равна $\frac{1}{2}$. Однако после замены $x(t) = \sqrt{y(t)}$ оно преобразуется в уравнение

$$\dot{y} + 2Ay + 2Cy^2 = 0,$$

обладающее свойством Пенлеве.

На **втором шаге** процедуры для каждой пары значений (m, x_0) определяются степени разложения n в (7.89), коэффициенты при которых *произвольные*. Они называются *индексами Фукса или резонансами*, а иногда *показателями Ковалевской*. Например,

подставляя разложение (7.89) при $m = 1$ в (7.91), мы последовательно определяем коэффициенты x_n ($n > 0$):

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{-iA}{3\sqrt{2C}}, \quad x_3 = 0. \quad (7.96)$$

Для коэффициента x_4 получаем выражение

$$3(2 + Cx_0^2)x_4 = x_2(A - 3Cx_0x_2) - 6Cx_0x_1x_3 - 3Cx_1^2x_2. \quad (7.97)$$

Так как левая и правая части этого уравнения, согласно (7.95), (7.96) равны нулю, то коэффициент x_4 произвольный. В итоге однозначное разложение (7.89) имеет две произвольные постоянные t_0 и x_4 и является *общим решением* уравнения (7.91). В общем случае, если m принимает несколько значений, то решение имеет несколько ветвей, каждая из которых исследуется отдельно. Тогда формула (7.91) имеет свойство Пенлеве, если каждая ветвь решений имеет это свойство.

Простой анализ резонансов можно провести без вычисления всех коэффициентов разложения подстановкой выражения

$$x = \frac{x_0}{(t - t_0)^m} \left(1 + \gamma_r (t - t_0)^r \right) \quad (r > 0) \quad (7.98)$$

в ведущие члены уравнения (7.88). Приравнявая нулю в полученном соотношении слагаемые, линейные по x_r , получаем уравнение

$$Q(r)\gamma_r = 0, \quad (7.99)$$

где $Q(r)$ – полином порядка n по r . Тогда решение уравнения

$$Q(r) = 0 \quad (7.100)$$

определяет индексы Фукса. Проиллюстрируем этот шаг снова на примере уравнения (7.91). Подстановка (7.98) в его ведущие члены и отбор линейных слагаемых приводят к выражению

$$(r - 2)(r - 1) + 3Cx_0^2 = (r - 2)(r - 1) - 6 = 0$$

с показателями Ковалевской $r = -1$ и $r = 4$.

Заметим, что один из индексов Фукса всегда равен -1 . Это значение соответствует произвольности выбора t_0 . Действительно, при замене t_0 на $t_0 + \varepsilon$ в выражении (7.89) и разложении в ряд

по ε видно, что слагаемое, линейное по ε , имеет зависимость $(t - t_0)^{-m-1}$. Корни уравнения (7.100) с $\text{Re} r < 0$, кроме $r = -1$, указывают на невозможность представления решений в виде (7.89) и необходимость дополнительного расследования с помощью алгоритма Конта–Форди–Пикеринга [35]. Любые индексы Фукса с $\text{Re} r > 0$, но не целым значением r , указывают, что при t , равном t_0 , уравнение имеет движущуюся критическую точку и не обладает свойством Пенлеве. Однако рациональное значение r может подсказать, как и на первом шаге, замену $x(t)$ новой функцией. Общее решение уравнения (7.88) должно иметь n произвольных постоянных и, если уравнение (7.100) имеет $n - 1$ положительных целых корней, то решение в виде (7.89) не имеет подвижных алгебраических особых точек, но возможны подвижные особые точки логарифмического типа. Они определяются **на третьем шаге** алгоритма. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$ ($r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{n-1}$) – индексы Фукса для каждой пары значений (m, x_0) . Подставляя усеченное разложение

$$x = \frac{1}{(t - t_0)^m} \sum_{i=0}^{r_s} x_i (t - t_0)^i \quad (s = 1, 2, \dots, n-1) \quad (7.101)$$

в уравнение (7.88) и приравнявая нулю члены с одинаковыми степенями $(t - t_0)$, получаем уравнения

$$Q(j)x_j = R_j(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, r_s)$$

для определения оставшихся коэффициентов. Однако при $j = r_1$ полином $Q(r)$ равен нулю и коэффициент x_{r_1} будет произвольным, если справедливо ограничение

$$R_{r_1}(x_0, x_1, \dots, x_{r_1-1}) = 0. \quad (7.102)$$

В качестве примера подставим разложение (7.101) в уравнение (7.92) и найдем, что

$$x_1 = \frac{B}{3Cx_0}, \quad x_2 = \frac{A - 3Cx_1^2}{3Cx_0}, \quad x_3 = \frac{-iB(9A + 2B^2)}{54\varepsilon\sqrt{2C}},$$

а уравнение для x_4 принимает вид

$$\frac{-i\sqrt{2}B^2}{27\varepsilon\sqrt{C}}(9A + 2B^2) + \varepsilon(6 + 3Cx_0^2)x_4 = 0. \quad (7.103)$$

С учетом (7.95) при $A \neq -2B^2/9$ ограничение (7.102) не выполняется и гипотеза о разложении решения в виде (7.89) неверна. В этом случае необходимо искать решение в виде

$$x = \frac{1}{(t - t_0)} \sum_{i=0}^4 x_i (t - t_0)^i + b(t - t_0)^3 \ln(t - t_0).$$

Тогда все коэффициенты x_0, x_1, x_2, x_3 сохраняют свои значения, а к левой части уравнения (7.103) прибавляется $5b$. Коэффициент будет произвольным, если x_4 принимает вид

$$b = \frac{-i\sqrt{2}B^2(9A + 2B^2)}{135\sqrt{C}\varepsilon}.$$

Однако, продолжая вычислять дальнейшие коэффициенты, мы должны вводить все новые логарифмические члены, в итоге уравнение (7.92) имеет логарифмические точки ветвления и не обладает свойством Пенлеве. Это свойство оно имеет только при условии

$$A = -2B^2/9. \quad (7.104)$$

При нем интеграл движения уравнения (7.92) можно найти в явном виде. После подстановки $\dot{x}(t) = F(x(t))$ (7.92) принимает вид

$$F(x) \frac{d}{dx} F(x) = -2B^2/9x + Cx^3 + BF(x)$$

и его решение выражается через гипергеометрическую функцию с произвольной постоянной E :

$$E = -X \frac{F_{2,1}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-4X^2}{9C}\right)}{3\sqrt{C}} + \frac{\sqrt{3C}\left(9 + \frac{4X^2}{9C}\right)^{\frac{1}{4}}}{2B} x, \quad (7.105)$$

$$X = \frac{Bx + 3\dot{x}}{x^2},$$

где $F_{2,1}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{-4X^2}{9C}\right)$ – гипергеометрическая функция. Та-

кой интеграл движения не является алгебраическим, поскольку гипергеометрическая функция $F_{1,2}(a, b, c, x)$ определяется рядом

$$F_{2,1}(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{1}{2!} \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} + \dots$$

в области $|x| \leq 1$ и значениях c , не равных нулю или целому отрицательному числу.

Если коэффициент x_{r_1} произволен, необходимо продолжить дальнейший анализ и вычислить коэффициенты x_i ($r_1 < i < r_2$). В итоге, если все коэффициенты x_{r_i} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) произвольны, то дифференциальное уравнение не имеет подвижных критических алгебраических и логарифмических подвижных особых точек и обладает свойством Пенлеве. Как предложено в работе С. Ковалевской, это свойство является критерием интегрируемости. Поэтому такая простая трехэтапная процедура сразу дает заключение, хотя и неполное, об интегрируемости системы.

Для исследования системы нелинейных дифференциальных уравнений типа

$$\frac{d}{dt}x_a = F_a(x_1, x_2, \dots, x_N, z) \quad (a = 1, 2, \dots, N)$$

на первом шаге в ее ведущие члены подставляется решение вида

$$x_a = \frac{x_{a0}}{(t-t_0)^{m_a}} \quad (7.106)$$

и определяются все пары (x_{a0}, m_a) с целыми положительными значениями m_a . Для каждой из них можно искать решение системы в виде ряда Лорана

$$x_a = \frac{1}{(t-t_0)^{m_a}} \sum_{i=0}^{\infty} x_{ai}(t-t_0)^i. \quad (7.107)$$

На втором шаге для каждого (x_{a0}, m_a) в ведущие члены системы подставляется выражение

$$x_a = \frac{x_{a0}}{(t-t_0)^{m_a}} \left(1 + \gamma_a(t-t_0)^r\right) \quad (r > 0, a = 1, 2, \dots, N). \quad (7.108)$$

Оставляя в них только линейные члены по γ_a , получаем уравнение

$$Q(r)\gamma = 0, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N),$$

где $Q(r)$ – $N \times N$ -матрица. Некоторые из величин γ_a произвольны, следовательно, в разложении (7.107) появляются произвольные постоянные, если показатели r удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$\det Q(r) = (r+1)(r^{N-1} + a_2 r^{N-2} + \dots + a_{N-1}) = 0 \quad (7.109)$$

с коэффициентами a_n , зависящими от значений x_{a0} . Один из корней этого уравнения из-за произвольности выбора t_0 всегда равен -1 . Если другие корни $r_1, r_2, \dots, r_{N-1}$ ($r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{N-1}$) являются целыми положительными числами, то на третьем шаге необходимо проверить наличие особых точек логарифмического типа. С этой целью в систему дифференциальных уравнений подставляется усеченное разложение

$$x_a = \frac{1}{(t-t_0)^m} \sum_{i=0}^{r_s} x_{ai}(t-t_0)^i \quad (s = 1, 2, \dots, N-1). \quad (7.110)$$

Тогда приравнявая члены с одинаковыми степенями, получаем уравнения

$$Q(i)X_i = R_i \quad (i = 1, 2, \dots, r_s). \quad (7.111)$$

Здесь X_i – вектор-столбец с компонентами $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni}$; $R_i = (R_{1i}, R_{2i}, \dots, R_{Ni})$ – вектор-строка, которая зависит от коэффициентов x_{aj} , $0 \leq j \leq i-1$. При $i < r_1$ это выражение рекуррентно определяет все коэффициенты X_i . Так как для $i = r_1$ имеет $\det Q(r_1) = 0$, то для системы (7.111) должны выполняться условия совместности

$$\det Q^{(k)}(r_1) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad (7.112)$$

где $Q^{(k)}(r_1)$ – матрица $Q(r_1)$, где столбец k заменен столбцом $R_{r_1}^T$. Если (7.112) удовлетворяется, то процедура повторяется вплоть

до проверки произвольности значений $X_{r_{N-1}}$. В случае кратных корней в (7.109) число произвольных компонент в X_{r_s} равно кратности корня r_s .

В итоге система нелинейных уравнений порядка N имеет свойство Пенлеве, т. е. не имеет движущихся особых точек, кроме полюсов, если вблизи произвольных значений t_0 справедливо разложение в ряд Лорана (7.107), содержащее $N - 1$ произвольных постоянных. Но даже в этих сравнительно редких случаях указанный выше алгоритм дает только *необходимые условия*, позволяющие считать, что рассматриваемая система есть система типа Пенлеве. Если в решениях системы нелинейных уравнений нет подвижных алгебраических и логарифмических особых точек, в них могут быть существенно особые точки. Однако появление последних крайне редко и к настоящему времени алгоритм КАРС есть единственный эффективный способ поиска интегрируемых систем, ценность которого при определенном обобщении резко возрастает в исследовании интегрируемости нелинейных уравнений с частными производными.

7.2.3. Интегрируемость обобщенной модели Хенона–Хейлеса

Теории приходят и уходят, а примеры остаются.

И.М. Гельфанд

Для иллюстрации применения алгоритма КАРС исследуем интегрируемость уравнений

$$\ddot{x} + Ax + Dxy = 0, \quad (7.113)$$

$$\ddot{y} + By + Dx^2 - Cy^2 = 0$$

обобщенной модели Хенона–Хейлеса, которая при определенных значениях параметров A, B, C, D описывает движение звезд в среднем поле галактики.

Определим вначале наибольшие отрицательные степени m_1 и m_2 в выражениях

$$x = \frac{x_0}{\tau^{m_1}}, \quad y = \frac{y_0}{\tau^{m_2}}, \quad \tau = t - t_0. \quad (7.114)$$

Поскольку слагаемые $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ более сингулярные, чем x и y соответственно, то на этом и следующем шагах алгоритма достаточно в системе оставить только ведущие члены

$$\ddot{x} + Dxy = 0, \quad (7.115)$$

$$\ddot{y} + Dx^2 - Cy^2 = 0.$$

После подстановки в них выражений (7.114) получаем

$$2y_0 D \tau^{2-m_2} + m_1(m_1 + 1) = 0, \quad (7.116)$$

$$x_0^2 D \tau^{2(m_2-m_1)} - y_0^2 C + y_0 \tau^{-2+m_2} m_2(m_2 + 1) = 0.$$

Простой анализ показывает, что возможны две ветви решений. Для первого типа решений

$$m_1 = 2, \quad x_0 = \varepsilon \frac{3}{D} \sqrt{2 + \frac{1}{\lambda}} \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad (7.117)$$

$$m_2 = 2, \quad y_0 = -\frac{3}{D},$$

где введено обозначение $D = \lambda C$. Второй тип существует при ограничении $m_1 < 2$. Тогда при $\tau \rightarrow 0$ исчезает слагаемое, пропорциональное x_0^2 , и

$$m_1 = -\frac{1 + \varepsilon \sqrt{1 - 48\lambda}}{2} \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad (7.118)$$

$$m_2 = 2, \quad y_0 = \frac{6\lambda}{D}$$

с произвольным значением величины x_0 .

Исследуем вначале решения первого типа. Для анализа индексов Фукса подставим выражения

$$x = x_0 \tau^{-2} + x_r \tau^{r-2}, \quad y = y_0 \tau^{-2} + y_r \tau^{r-2}$$

в (7.115) и получим в наинизшем порядке по τ систему линейных уравнений

$$6x_r \varepsilon \sqrt{2 + \frac{1}{\lambda}} + y_r \left(6 - 5r + r^2 + \frac{6}{\lambda} \right) = 0, \quad (7.119)$$

$$x_r(r - 5) + 6\varepsilon y_r \sqrt{2 + \frac{1}{\lambda}} = 0.$$

Величина x_r или y_r принимает произвольное значение, если показатель r удовлетворяет уравнению

$$r^4 - 10r^3 + r^2 \left(31 + \frac{6}{\lambda} \right) - \frac{30r(1+\lambda)}{\lambda} - 36 \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right) = 0,$$

корни которого равны

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 6, \quad r_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{1 - 24 \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right)}}{2}.$$

Величины $r_{3,4}$ должны быть целыми и положительными числами. Это условие налагает ограничение на значение параметра λ . Нетрудно найти, что разрешенными значениями этого параметра будут

- 1) $\lambda = -1, \quad r = -1, 2, 3, 6;$
- 2) $\lambda = -1/2, \quad r = -1, 0, 5, 6;$
- 3) $\lambda = -3/4, \quad r = -1, 1, 4, 6.$

Обсудим первые два случая. При $\lambda = -1$, подставляя разложения

$$x = \frac{1}{(t-t_0)^{m_1}} \sum_{i=0}^6 x_i (t-t_0)^i; \quad (7.120)$$

$$y = \frac{1}{(t-t_0)^{m_2}} \sum_{i=0}^6 y_i (t-t_0)^i \quad (7.121)$$

($m_1 = m_2 = 2$) в (7.113), получаем ограничения $x_1 = y_1 = 0$ и уравнения

$$\begin{aligned} \frac{A}{C} + 2\epsilon x_2 - 2y_2 &= 0, \\ \frac{B}{C} + 2\epsilon x_2 - 2y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что величина x_2 или y_2 принимает произвольное значение, если $A = B$. Дальнейшие вычисления показывают, что

для резонансов при $r = 3$ и $r = 6$ выполняются условия совместности. Нетрудно убедиться, что в этом случае после замены переменных

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}$$

система уравнений разделяется на два независимых выражения

$$\ddot{u} + Au - 2Cu^2 = 0, \quad \ddot{v} + Av + 2Cv^2 = 0,$$

каждое из которых интегрируется в эллиптических функциях. В итоге при указанных ограничениях система Хенона–Хейлеса обладает свойствами Пенлеве и интегрируемости.

Как следует из уравнений (7.119), для $\lambda = -1/2$ значения x_0 и y_0 равны нулю, что противоречит условию резонанса при $r = 0$. Чтобы один из коэффициентов x_0 или y_0 был произвольным, необходимо в разложение (7.120), (7.121) добавить логарифмические слагаемые, что нарушает свойство Пенлеве и необходимое условие интегрируемости системы. Детальный анализ показывает, что при $\lambda = -3/4$ система (7.113) типа Пенлеве.

В случае (7.118) на втором этапе алгоритма ввиду условия из $m_1 < m_2$ достаточно проанализировать систему

$$\begin{aligned} \ddot{x} + Dxy &= 0, \\ \ddot{y} - Cy^2 &= 0. \end{aligned}$$

После подстановки в нее

$$x = x_0 \tau^{-m_1} + x_r \tau^{r-m_1-2}, \quad y = y_0 \tau^{-m_2} + y_r \tau^{r-m_2-2} \quad \left(m_1 = -\frac{1 - \sqrt{1 - 48\lambda}}{2} \right)$$

получаем следующие значения резонансов:

$$r = -1, 0, \sqrt{1 - 48\lambda}, 6.$$

Поскольку величина $\sqrt{1 - 48\lambda}$ должна принимать целые и положительные значения, значения параметра λ , необходимые для интегрируемости системы, равны

$$1) \quad \lambda = -\frac{5}{16}, \quad m_1 = \frac{3}{2}, \quad r = -1, 0, 4, 6;$$

$$2) \lambda = -\frac{1}{6}, \quad m_1 = 1, \quad r = -1, 0, 3, 6;$$

$$3) \lambda = -\frac{1}{16}, \quad m_1 = \frac{1}{2}, \quad r = -1, 0, 2, 6.$$

Здесь необходимо рассмотреть и рациональные значения показателя m_1 , так как при замене $x \rightarrow X^{\frac{1}{2}}$ или $x \rightarrow X^{\frac{3}{2}}$ уравнения (7.113) остаются рациональными функциями переменных X, y .

Обсудим следующие случаи использования разложения (7.120), (7.121).

1. Условия совместности (7.112) не выполняются как при резонансе $r = 4$, где определяется значение x_0 , так и при $r = 6$. В итоге

при $\lambda = -\frac{5}{16}$ система Хенона–Хейлеса неинтегрируемая.

2. При $\lambda = -\frac{1}{6}$ эта система имеет свойство Пенлеве при любых значениях параметров A, B, C . Более того, можно найти дополнительный алгебраический интеграл F :

$$F = \frac{1}{12} x^2 (C^2 x^2 + 4(9A(4A - B) - Cy(6A - Cy))) + (12A - 3B + 2Cy)\dot{x}^2 - 2Cx\dot{x}\dot{y}. \quad (7.122)$$

3. При $\lambda = -\frac{1}{16}$ и условии $B = 16A$ модель Хенона–Хейлеса интегрируемая и имеет также дополнительный алгебраический интеграл F :

$$F = \frac{1}{4} \dot{x}^4 + \frac{1}{16} \dot{x}^2 (8A - Cy)x^2 + \frac{1}{48} \dot{x}yCx^3 - \frac{x^4(-1152A^2 + C^2x^2 + 6Cy(-16A + Cy))}{4608}. \quad (7.123)$$

Итак, применение алгоритма КАРС позволило найти значения параметров, при которых система (7.113) проходит тест Пенлеве. Это является достаточным условием интегрируемости. Для вычисления скрытых интегралов движения в системах, где нет симметрий, часто используются прямые методы. Так, для определения алгебраического интеграла I в системах с двумя степенями свободы x, y предполагается, что он имеет вид

$$I = \sum_{i=0}^n \dot{x}^k y^{i-k} f_{i,k}(x, y). \quad (7.124)$$

Тогда условие

$$\frac{d}{dt} I = 0$$

и уравнения движения сразу приводят к переопределенной системе дифференциальных уравнений для неизвестных функций $f_{i,k}(x, y)$. Выбором разных значений n и с помощью такой процедуры можно найти интегралы движения для многих систем. Интегралы (7.122), (7.123) были получены именно этим способом.

7.2.4. Построение частных решений нелинейной модели методом линеаризации

В интегрируемых системах даже при известных интегралах движения конструирование точных общих решений – открытая проблема. Как показывает пример уравнений ангармонического осциллятора с затуханием, даже при наличии интеграла движения получение общего решения крайне затруднено. Одним из направлений решения этой проблемы является предложенный Вейсом [40] метод *линеаризации*, который позволяет в некоторых случаях найти новые свойства нелинейной интегрируемой системы и редуцировать ее в систему линейных уравнений. В этом методе частное решение уравнения (7.88) ищется в виде усеченного разложения

$$x(t) = \frac{1}{\phi(t)^m} \sum_{n=0}^m x_n(t) \phi(t)^n, \quad (7.125)$$

где $\phi(t)$ и $x_n(t)$ – аналитические функции от t . Предполагается, что функция $x(t)$ сингулярная не в одной точке $t = t_0$, а на неко-

торой кривой $\phi(t) = 0$. Кроме того, если функция $\phi(t)$ обращается в нуль при некотором значении $t = t_0$, то считается, что эти нули не совпадают с нулями функций $x_n(t)$. Целое положительное число m определяется из анализа ведущих членов уравнения. Сингулярное разложение (7.89) получается при $\phi(t) = t = t_0$ и разложении $x_n(t)$ в ряд по степеням $t = t_0$. После подстановки (7.125) в уравнения движения (7.88) мы получаем переопределенную систему уравнений для $\phi(t)$ и $x_n(t)$. При этом выражения для $x_m(t)$ совпадают с (7.88). Это дает возможность при известном частном решении (7.88) получить другое частное решение данного уравнения. Такое отображение одного решения нелинейного дифференциального уравнения в другое называется *бэклунд-преобразованием*.

Проиллюстрируем метод усеченного разложения на примере получения частных решений уравнений ангармонического осциллятора (7.91) и (7.92) при значениях параметров A, C :

$$A = -a^2, \quad C = c^2. \quad (7.126)$$

После подстановки

$$x = \frac{x_0(t)}{\phi(t)} + x_1(t) \quad (7.127)$$

в (7.91) и приравнивания членов с одинаковыми степенями $\phi(t)$, получаем переопределенную систему уравнений. Из уравнения для ведущих членов сразу следует, что

$$x_0(t) = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} \dot{\phi}(t), \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (7.128)$$

и три остальные уравнения имеют вид

$$\sqrt{2c\varepsilon}x_1(t)\dot{\phi}(t) + \ddot{\phi}(t) = 0; \quad (7.129)$$

$$(a^2 - 3c^2x_1(t)^2)\dot{\phi}(t) + \ddot{\phi}(t) = 0; \quad (7.130)$$

$$a^2x_1(t) - c^2x_1(t)^3 + \ddot{x}_1(t) = 0. \quad (7.131)$$

Условие совместности выражений (7.129), (7.130) приводит к дополнительному уравнению первого порядка для $x_1(t)$:

$$a^2 - c^2x_1(t)^2 - \varepsilon\sqrt{2c}\dot{x}_1(t) = 0, \quad (7.132)$$

которое, как нетрудно убедиться, совместно с (7.131). Кроме того, оно является частным интегралом движения уравнения (7.91). Действительно, его общий интеграл

$$E = \frac{\dot{x}^2(t)}{2} + a^2 \frac{x^2(t)}{2} - c^2 \frac{x^4(t)}{4}$$

при $E = \frac{a^4}{4c^2}$, отвечающем максимуму потенциальной энергии,

совпадает с (7.131). В итоге, по известному частному решению $x_1(t)$ – «затравочному решению» – уравнений ангармонического осциллятора, которое удовлетворяет (7.132), с помощью *линейного* уравнения (7.129) находим $\phi(t)$, далее по формуле (7.127) – частное решение уравнения (7.91). Так, для простейшего частного решения

$$x_1(t) = \pm \frac{a}{c} \quad (7.133)$$

мы получаем решение типа кинка

$$x(t) = \pm \frac{a}{c} \operatorname{th} \left(\frac{a\varepsilon(t-t_0)}{\sqrt{2}} \right) \quad (7.134)$$

с произвольной постоянной t_0 этого уравнения. Для уравнений

$$\frac{2B^2}{9}x(t) - c^2x(t)^3 + B\dot{x}(t) + \ddot{x}(t) = 0 \quad (7.135)$$

ангармонического осциллятора с затуханием и условием (7.104) выражение для $x_0(t)$ совпадает с (7.128). Формула для $x_1(t)$ совпадает с (7.135), а независимые уравнения для остальных переменных преобразуются к виду

$$(B + 3\sqrt{2c\varepsilon}x_1(t))\dot{\phi}(t) + 3\ddot{\phi}(t) = 0; \quad (7.136)$$

$$\sqrt{2B}x_1(t) + 3\varepsilon c x_1(t)^2 + 3\sqrt{2}\dot{x}_1(t) = 0. \quad (7.137)$$

Возьмем $x_1(t) = 0$ в качестве затравочного решения уравнения (7.135). Тогда $x(t)$ вычисляется квадратурой

$$x(t) = \frac{\varepsilon\sqrt{2B}}{c \left(-3 + Bce^{\frac{B}{3}(t-t_0)} \right)} \quad (7.138)$$

и описывает аperiодические колебания от одного равновесного состояния $x(t) \rightarrow -\frac{\varepsilon\sqrt{2B}}{3c}$ ($t \rightarrow -\infty$, $B > 0$) при $t \rightarrow -\infty$ к другому равновесному состоянию $x(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$).

Эти простые примеры показывают эффективность метода линеаризации. Однако данная процедура в отличие от алгоритма КАРС не приводит к полному множеству решений. Причина состоит в том, что уравнения для $x_n(t)$, которые получаются после подстановки (7.125), справедливы *при всех временах*, а не только при $t = t_0$, как в алгоритме КАРС. Такие дополнительные ограничения и приводят к потере постоянных интегрирования и множества точных решений.

7.3. ДИНАМИКА ЧАСТИЦ В РЕШЕТКЕ ТОДЫ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Новые системы плодят новые проблемы.

Основная теорема Мэрфи

В данном разделе на примере динамики решетки Тоды изложено интегрирование нелинейных уравнений с помощью метода обратной задачи рассеяния.

Рассмотрим одномерную цепочку (одномерную решетку) из частиц, находящихся на расстоянии a друг от друга, соединенных нелинейными пружинами (рис. 7.7, а). Пусть координаты каждой частицы в равновесном состоянии равны $y_{0n} = na$ ($-\infty < n < \infty$). Допустим теперь, что атомы отклонены от равновесного положения так, что координата частицы n стала $y_n = y_{0n} + x_n$, где x_n – смещение частицы n из положения равновесия. Тогда если

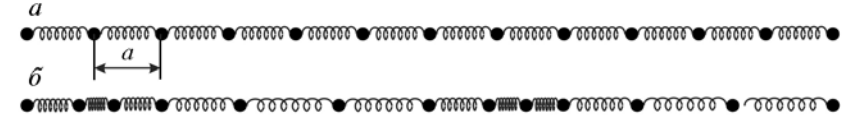


Рис. 7.7

$U(x_{n+1} - x_n)$ – потенциальная энергия взаимодействия между $n + 1$ и n , то уравнение движения частиц массы m имеет вид

$$m\ddot{x}_n = U'(x_{n+1} - x_n) - U'(x_n - x_{n-1}). \quad (7.139)$$

Для гармонического потенциала $U(x) = bx^2/2$ сила $U'(x)$ пропорциональна относительному смещению x и выражение принимает вид

$$m\ddot{x}_n = b(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}). \quad (7.140)$$

Поскольку ближайшие атомы связаны друг с другом, то возбуждения колебаний одной частицы или группы частиц будут передаваться соседним и распространяться по решетке с определенной скоростью. Как известно из общего курса физики, процесс передачи возбуждений среды (в частности колебательного процесса) от одной точки к другой называется *волной*. Простейший тип волн – *монохроматическая волна*, которая является решением (7.140):

$$x_n(t) = C(k)e^{i(kan + \omega t)} \quad (7.141)$$

с частотой ω , волновым вектором k и произвольной постоянной амплитудой $C(k)$. При этом выполняется соотношение между ω и k :

$$\omega = \pm\omega_1(k), \quad \omega_1(k) = 2\sqrt{\frac{b}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right), \quad (7.142)$$

которое называется *дисперсионным соотношением*. Волновой вектор k определяет отношение смещений соседних атомов:

$$\frac{x_{n+1}(t)}{x_n(t)} = e^{ika},$$

а так как при замене $k \rightarrow k + \frac{2\pi}{a}$ оно не изменяется, то физический смысл значений волнового вектора определяется неравенствами

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}.$$

Выражение (7.141) описывает колебательный процесс в системе связанных между собой частиц (*волновое движение*), который характеризуется распространением фазы колебаний $\Phi = kan + \omega t$ по решетке, переносом энергии и импульса со скоростью $v = \pm\omega/k$.

Период волны T равен $\frac{2\pi}{\omega}$, а ее длина $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ ($a \leq \lambda \leq \infty$) – рас-

стояние между частицами, колеблющимися в одинаковой фазе. При $k \ll 1$ частота волны пропорциональна волновому вектору, такие волны называются *звуковыми*, или длинноволновыми, *фононами*. В каждый момент волна (7.141) вызывает периодические сжатие и растяжение (рис. 7.7, б) в решетке. Монохроматические волны с частотой $\omega(k)$ и волновыми векторами k в интер-

вале $-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$ – *элементарные возбуждения* в линейной решетке. Любое возбуждение в ней есть линейная суперпозиция этих возбуждений, так функция

$$x_n(t) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_1(k) e^{i(kan + \omega_1(k)t)} dk + \int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_2(k) e^{i(kan - \omega_1(k)t)} dk \quad (7.143)$$

является общим решением (7.140). Поскольку $x_n(t)$ – вещественная функция, то коэффициенты $C_1(k)$, $C_2(k)$ удовлетворяют условиям

$$C_1(k) = C_1^*(-k), \quad C_2(k) = C_2^*(-k). \quad (7.144)$$

Их явный вид определяется начальными данными с помощью обратного фурье-преобразования следующим образом. Пусть в начальный момент заданы смещения $x_n(0)$ и скорости $\dot{x}_n(0)$ частиц в решетке. Тогда

$$x_n(0) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_1(k) e^{ikan} dk + \int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_2(k) e^{ikan} dk; \quad (7.145)$$

$$\dot{x}_n(0) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} i\omega_1(k) C_1(k) e^{ikan} dk - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} i\omega_1(k) C_2(k) e^{ikan} dk. \quad (7.146)$$

Умножим уравнение (7.145) на $e^{-ik'an}$, просуммируем по номерам всех частиц в решетке. Тогда правая часть полученного выражения

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik'an} x_n(0) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_1(k) T(k-k') dk + \int_{-\pi/a}^{\pi/a} C_2(k) T(k-k') dk \quad (7.147)$$

содержит сумму $T(k-k')$:

$$T(k-k') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(k-k')an}, \quad (7.148)$$

которая вычисляется методом *регуляризации*. Запишем (7.148) в виде

$$T(k-k') = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{i(k-k')an} + e^{-i(k-k')an}) - 1, \quad (7.149)$$

и заменим выражение $e^{\pm i(k-k')an}$ на $e^{\pm i(k-k')an - \alpha n}$. Положительный параметр α в дальнейшем положим равным нулю. Тогда выражение (7.149) в виде

$$T(k-k') = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} (z^n + z^{*n}), \quad z = e^{i(k-k')a - \alpha}$$

есть сумма бесконечной абсолютно сходящейся геометрической прогрессии. Поскольку $|z| < 1$, то она сразу вычисляется как

$$T(k-k') = \frac{1 - \gamma^2}{1 - 2\gamma \cos((k-k')a) + \gamma^2}, \quad \gamma = e^{-\alpha}. \quad (7.150)$$

Наконец, после подстановки (7.150) в (7.147) и предельного перехода $\alpha \rightarrow 0$ с помощью формулы

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1-\alpha, \alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1 - \gamma^2}{1 - 2\gamma \cos(x-y) + \gamma^2} = f(y) \quad (7.151)$$

получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik'an} x_n(0) = 2\pi a (C_1(k') + C_2(k')). \quad (7.152)$$

Аналогично из (7.146) следует соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ik'an} \dot{x}_n(0) = 2\pi i a \omega_1(k') (C_1(k') - C_2(k')). \quad (7.153)$$

Формулы (7.143), (7.152), (7.153) дают полное решение для динамики частиц в линейной решетке (7.140). По известным начальным данным $x_n(0)$, $\dot{x}_n(0)$ ($-\infty < n < \infty$) мы находим с помощью фурье-преобразования ((7.152), (7.153)) величины $C_1(k)$, $C_2(k)$. Тогда движение каждой частицы определяется интегралом Фурье (7.143).

Рассмотрим динамику частиц в нелинейной решетке с потенциалом

$$U = (x_{n+1} - x_n) = \frac{a}{b} \left[\exp(-b(x_{n+1} - x_n) - 1) \right] \quad (a, b > 0), \quad (7.154)$$

который является гармоническим только при малых значениях b и конечных значениях ab . В этой точно решаемой модели, называемой *решеткой Тоды*, можно исследовать элементарные возбуждения и достаточно просто проиллюстрировать нелинейный аналог преобразования Фурье – метод обратной задачи рассеяния. После введения безразмерных переменных

$$X = bx, \quad T = \sqrt{\frac{ab}{m}} t \quad (7.155)$$

уравнения движения в такой решетке принимают вид

$$\ddot{x}_n = -\exp[x_n - x_{n+1}] + \exp[x_{n-1} - x_n], \quad (7.156)$$

где для простоты записи произведена замена $X \rightarrow x$, $T \rightarrow t$. Для гамильтониана H данной системы

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + \exp(x_n - x_{n+1}) \right) \quad (7.157)$$

смещения x_n и импульсы $p_n = \dot{x}_n$ – канонически сопряженные переменные. Запишем (7.157) в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= a_n(b_n - b_{n+1}), \\ \dot{b}_n &= 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \end{aligned} \quad (7.158)$$

с простейшей квадратичной нелинейностью, удобной для дальнейшего изложения. Здесь и далее обозначено

$$a_n = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right), \quad b_n = \frac{\dot{x}_n}{2}. \quad (7.159)$$

Исследуем далее интегрируемость системы (7.158) в предположении, что на больших расстояниях относительные смещения соседних частиц стремятся к нулю: $x_n - x_{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \pm\infty$):

$$x_n - x_{n+1} \rightarrow 0, \quad a_n \rightarrow 1/2, \quad b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \pm\infty). \quad (7.160)$$

7.3.1. Представление Лакса

Одним из эффективных методов изучения интегрируемых систем является *метод обратной задачи рассеяния* (МОЗР). Идея метода очень проста. Пусть динамическая система описывается системой уравнений

$$\ddot{x}_a = F_a(x_a, \dot{x}_a, t) \quad (a = 1, 2, \dots, N), \quad (7.161)$$

включая случай $N \rightarrow \infty$. Пусть нам удалось найти для нее эрмитовую $L(L^+ = L)$ и антиэрмитовую $A(A^+ = -A)$ матрицы (элементы которых зависят от $x_a, \dot{x}_a$), такие, что искомые уравнения эквивалентны матричному уравнению

$$\frac{dL}{dt} = AL - LA. \quad (7.161)$$

Данное выражение называется *представлением Лакса*, а матрицы L, A – *парой Лакса*. Матрица A антиэрмитова, поэтому матрица $U(t)$, определяемая уравнением

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t), \quad U(t=0) = E, \quad (7.162)$$

есть унитарная матрица ($U^+ = U^{-1}$). Поскольку

$$\frac{dU^{-1}(t)}{dt} = \frac{dU^+(t)}{dt} = -U^+(t)A = -U^{-1}(t)A,$$

то (7.161) эквивалентно матричному уравнению

$$\frac{d}{dt}(U^{-1}(t)L(t)U(t)) = U^{-1}(t)\left[-AL(t) + \frac{d}{dt}L(t) + L(t)A\right]U(t) = 0.$$

Следовательно, матрица $(U^{-1}L(t)U)$ не зависит от времени, а матрица $L(t)$ в любой момент и матрица $L(0)$ в начальный момент связаны унитарным преобразованием (унитарно эквивалентны):

$$L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t). \quad (7.163)$$

Пусть $\Psi(t)$ и $\lambda(t)$ – соответственно собственная вектор-функция и собственное значение матрицы $L(t)$:

$$L(t)\Psi(t) = \lambda(t)\Psi(t).$$

Тогда из сравнения этого уравнения с

$$\begin{aligned} U(t)L(0)\Psi(0) &= U(t)L(0)U^{-1}(t)U(t)\Psi(0) = \\ &= L(t)U(t)\Psi(0) = \lambda(0)U(t)\Psi(0) \end{aligned}$$

следует выражение для эволюции функции $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = U(t)\Psi(0),$$

следовательно:

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = A\Psi(t). \quad (7.164)$$

Кроме того, собственные значения матрицы $L(t)$ не зависят от времени $\lambda(t) = \lambda(0) = \lambda$ и являются *интегралами движения*. В итоге, если система со многими степенями свободы допускает представление Лакса, то вычисление интегралов движения с помощью характеристического уравнения намного проще, чем прямой метод, изложенный в конце параграфа 7.2.3.

К настоящему времени *метод обратной задачи рассеяния* применим ко всем интегрируемым системам. Для гамильтоновых систем с N степенями свободы при известной паре Лакса, как правило, удается найти необходимое число интегралов дви-

жения и показать, что они находятся в инволюции. Из предыдущего следует, что собственные функции $\Psi(t)$ удовлетворяют двум уравнениям

$$L(t)\Psi(t) = \lambda\Psi(t); \quad (7.165)$$

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = A(t)\Psi(t). \quad (7.166)$$

Для проверки их совместности продифференцируем (7.165) по времени и воспользуемся выражением (7.166):

$$\begin{aligned} \frac{dL(t)}{dt}\Psi(t) + L(t)\frac{d\Psi(t)}{dt} - \lambda\frac{d\Psi(t)}{dt} &= \frac{dL(t)}{dt}\Psi(t) + L(t)A(t)\Psi(t) - \\ - A(t)\Psi(t) &= \left[\frac{dL(t)}{dt} + L(t)A(t) - A(t)L(t)\right]\Psi(t) = 0. \end{aligned}$$

В итоге интегрируемое уравнение (7.161) является *условием совместности* двух *линейных* уравнений (7.165), (7.166) для вспомогательной вектор-функции $\Psi(t)$.

Рассмотрим применение метода обратной задачи к интегрированию системы (7.158). Нетрудно проверить, что ее уравнения есть условия совместности выражений

$$(L\Psi)_n = a_{n-1}\Psi_{n-1} + a_n\Psi_{n+1} + b_n\Psi_n = \lambda\Psi_n; \quad (7.167)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_n = (A\Psi)_n = a_{n-1}\Psi_{n-1} - a_n\Psi_{n+1} + C\Psi_n, \quad (7.168)$$

где C – произвольная постоянная.

Докажем полную интегрируемость *периодической цепочки Тоды*. Представим такую систему как цепочку из N частиц на окружности с потенциалом взаимодействия (7.154) между ближайшими соседями. Выделение данной системы из уравнений (7.158) достигается наложением периодических условий

$$a_n = a_{n+N}, \quad b_n = b_{n+N}, \quad \Psi_n = \Psi_{n+N}.$$

Тогда симметричная $N \times N$ -матрица L имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & & & \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & a_{N-2} & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}. \quad (7.169)$$

Ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ – вещественные и удовлетворяют уравнению

$$\det(L - \lambda I) = \lambda^N + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^i F(a_n, b_n) = 0.$$

Поскольку они не зависят от времени, то коэффициенты разложения $F(a_n, b_n)$ также не зависят от времени и являются интегралами движения. Нетрудно проверить, что среди них имеются полный импульс цепочки P и энергия H (7.157):

$$P = \sum_{n=1}^N p_n = 2SpL = 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n, \quad (7.170)$$

$$H = \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2} + \exp(x_n - x_{n+1}) \right) = 2SpL^2 = 2 \sum_{n=1}^N \lambda_n^2.$$

Покажем, что интегралы движения λ_i и λ_j находятся в инволюции, т. е. их скобка Пуассона $\{\lambda_i, \lambda_j\}$ равна нулю. Запишем ее в переменных a_n, b_n

$$\begin{aligned} \{\lambda_i, \lambda_j\} &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial p_k} \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} - (i \leftrightarrow j) \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^N \left[\left(a_k \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_k} - a_{k-1} \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{k-1}} \right) \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_k} - (i \leftrightarrow j) \right] \right]. \end{aligned} \quad (7.171)$$

Пусть $\Psi(j)$ – собственный вектор-столбец с компонентами $\Psi_1(j), \Psi_2(j), \dots, \Psi_N(j)$ матрицы L с собственным значением λ_j , нормированный на единицу: $\Psi^T(j)\Psi(j) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(j)\Psi_n(j) = 1$. Для вычисления

производных $\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_k}$ продифференцируем по a_k уравнение

$$\sum_{m=1}^N L_{nm} \Psi_m(j) - \lambda_j \Psi_n(j) = 0, \quad (7.172)$$

умножим далее результат слева на $\Psi_n^T(j)$ и просуммируем полученное выражение по индексу n от 1 до N . В матричной записи получим

$$\begin{aligned} \Psi^T(j) \frac{\partial L}{\partial a_k} \Psi(j) + \Psi^T(j) L \frac{\partial \Psi(j)}{\partial a_k} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_k} \Psi^T(j) \Psi(j) - \\ - \lambda_j \Psi^T(j) \frac{\partial \Psi(j)}{\partial a_k} = \Psi^T(j) \frac{\partial L}{\partial a_k} \Psi(j) - \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_k} = 0, \end{aligned}$$

поскольку $\Psi^T(j)L = \lambda_j \Psi^T(j)$.

Тогда из вида матрицы L (7.169) следует, что

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_k} = 2\Psi_k(j)\Psi_{k+1}(j), \quad (7.173)$$

и аналогично получаем

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial b_k} = \Psi_k(j)^2. \quad (7.174)$$

В итоге выражение (7.171) принимает вид

$$\begin{aligned} \{\lambda_i, \lambda_j\} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [(\Psi_k(i)\Psi_k(j))\{a_k \Psi_{k+1}(i)\Psi_k(j) - \\ &- a_{k-1} \Psi_{k+1}(i)\Psi_k(j) - (i \leftrightarrow j)\}]. \end{aligned}$$

Заметим, что для компонент $\Psi_k(i)$, $\Psi_k(j)$ двух любых собственных векторов матрицы L из (7.167) сразу следует соотношение

$$(\lambda_i - \lambda_j)\Psi_k(i)\Psi_k(j) = W_k(i, j) - W_{k-1}(i, j),$$

где обозначено

$$W_k(i, j) = a_k(\Psi_k(i)\Psi_{k+1}(j) - \Psi_{k+1}(i)\Psi_k(j)) = -W_k(i, j) - W_{k-1}(i, j).$$

Поскольку

$$(a_k\Psi_{k+1}(i)\Psi_k(j) - a_{k-1}\Psi_{k-1}(i)\Psi_k(j) - (i \leftrightarrow j)) = -W_k(i, j) - W_{k-1}(i, j),$$

то скобка Пуассона записывается в виде

$$\begin{aligned} \{\lambda_i, \lambda_j\} &= \frac{1}{2(\lambda_i - \lambda_j)} \sum_{k=1}^N (W_{k-1}(i, j)^2 - W_k(i, j)^2) = \\ &= \frac{1}{2(\lambda_i - \lambda_j)} (W_0(i, j)^2 - W_N(i, j)^2) \end{aligned}$$

и равна нулю в силу граничных условий $W_0(i, j) = W_N(i, j)$. В итоге периодическая решетка Тоды имеет N независимых интегралов движения и по теореме Лиувилля интегрируема в квадратурах. Соответствующие решения выражаются в терминах многомерных тэта-функций и изложены в специальных монографиях (см., например, [34]).

7.3.2. Прямая задача рассеяния

Нужно обращать острый ум на самые незначительные и простые вещи и долго останавливаться на них, пока не привыкнем отчетливо и ясно прозревать в них истину.

Р. Декарт

Рассмотрим динамику частиц в бесконечной цепочке (7.156) при условии, что на больших расстояниях относительные смещения соседних частиц стремятся к нулю ($x_n - x_{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \pm\infty$)):

$$x_n - x_{n+1} \rightarrow 0, \quad a_n \rightarrow 1/2, \quad b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \pm\infty). \quad (7.175)$$

При заданных коэффициентах a_n , b_n с такими граничными условиями уравнение (7.167) является задачей на определение собст-

венных функций Ψ_n и собственных значений λ , которые называются *спектром* матрицы L . В этом параграфе мы исследуем свойства функций Ψ_n .

Выражения (7.167), (7.168) при условии (7.175) и $C = 0$ для $n \rightarrow \pm\infty$ сводятся к

$$\frac{1}{2}(\Psi_{n-1} + \Psi_{n+1}) = \lambda\Psi_n; \quad (7.176)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_n = \frac{1}{2}(\Psi_{n-1} - \Psi_{n+1}). \quad (7.177)$$

Решение этих уравнений

$$\Psi_n \rightarrow C_1 e^{i\omega t z^n} + C_2 e^{-i\omega t z^{-n}} \quad (7.178)$$

определяет асимптотическое поведение функций Ψ_n . Здесь C_1 , C_2 – постоянные коэффициенты и введены обозначения

$$\lambda = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \omega = \frac{i}{2}(z - z^{-1}). \quad (7.179)$$

Величину z называют *спектральным параметром*. В подразделе 4.1 при изучении нелинейных колебаний с заданной потенциальной энергией мы разделили все движения материальной точки на два класса: инфинитные движения с неограниченными значениями обобщенной координаты при $t \rightarrow \pm\infty$ и финитные – периодические колебания в потенциальной яме. Для уравнений (4.167) с вещественным собственным значением λ также возможны два типа решений с *непрерывным* и *дискретным* спектром. Первый тип решений описывает в асимптотике ($n \rightarrow \pm\infty$) волну (7.178) с волновым вектором k и частотой ω :

$$z = e^{ik}, \quad \lambda = \cos k, \quad \omega = -\sin k \quad (0 \leq k \leq 2\pi). \quad (7.180)$$

Собственные функции с дискретным спектром (связанные состояния) аналогичны периодическим решениям материальной точки, но в отличие от нелинейных колебаний они существуют только при дискретных значениях $|\lambda_i|$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Для каждого значения дискретного спектра λ_i собственные функции Ψ_n^i имеют убывающую на бесконечности асимптотику

$$\Psi_n^i \rightarrow c_2 e^{E_i t z_i^n} (n \rightarrow \infty); \quad (7.181)$$

$$\Psi_n^i \rightarrow c_1 e^{-E_i t z_i^{-n}} (n \rightarrow -\infty), \quad (7.182)$$

где

$$z_i = \varepsilon e^{-k_i}, \quad E_i = \varepsilon shk_i, \quad \lambda_i = \varepsilon chk_i, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad 0 < k_i < \infty. \quad (7.183)$$

Такой вид асимптотического поведения сразу следует из (7.178) после подстановки $z \rightarrow z_i$ и отбора ограниченных решений.

Обсудим кратко *прямую задачу теории рассеяния* для оператора L . Для непрерывного спектра ($|z| = 1$) общее решение конечно-разностного уравнения (7.167) можно представить в виде двух фундаментальных решений, в качестве которых выберем $\varphi_n(z)$ и $\bar{\varphi}_n(z)$ с асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$:

$$\varphi_n(z) \rightarrow z^n \quad (n \rightarrow \infty), \quad (7.184)$$

$$\bar{\varphi}_n(z) \rightarrow z^{-n} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Введем также вторую пару линейно независимых функций $\psi_n(z)$, $\bar{\psi}_n(z)$, заданных асимптотиками при $n \rightarrow -\infty$:

$$\psi_n(z) \rightarrow z^{-n} \quad (n \rightarrow -\infty), \quad (7.185)$$

$$\bar{\psi}_n(z) \rightarrow z^n \quad (n \rightarrow -\infty).$$

Введенные такими асимптотиками функции – дискретный аналог функций Йоста, и мы сохраним это название для представленных выше функций. Кроме того, для компактности записи в выражениях для асимптотик функций $\psi_n(z)$, $\bar{\psi}_n(z)$ опустим множители $e^{i\omega t}$ и $e^{-i\omega t}$ соответственно, которые введем обратно в нужном месте. Так как число независимых решений уравнения (7.176) равно двум, то функции $\psi_n(z)$ и $\bar{\psi}_n(z)$ являются линейной комбинацией $\bar{\varphi}_n(z)$ и $\varphi_n(z)$:

$$\begin{pmatrix} \psi_n(z) \\ \bar{\psi}_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \bar{\beta}(z) & \bar{\alpha}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_n(z) \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix} \quad (7.186)$$

с независимыми от n коэффициентами рассеяния $\alpha(z)$, $\bar{\alpha}(z)$, $\beta(z)$, $\bar{\beta}(z)$. Их вычисление при заданных величинах a_n , b_n есть одна из задач прямой задачи рассеяния. Отметим вытекающее из (7.186) соотношение

$$\frac{\psi_n(z)}{\alpha(z)} = \bar{\varphi}_n(z) + \frac{\beta(z)}{\alpha(z)} \varphi_n(z), \quad (7.187)$$

которое далее часто будет использоваться.

Найдем связь коэффициентов рассеяния $\alpha(z)$, $\beta(z)$ с асимптотическими значениями введенных функций. Как следует из (7.167), для двух произвольных собственных функций $\Psi_k(z)$, $\Phi_k(z)$ и матрицы L с одинаковыми собственными значениями выражение

$$W(\Psi(z), \Phi(z)) = a_k(\Psi_k(z)\Phi_{k+1}(z) - \Psi_{k+1}(z)\Phi_k(z)) \quad (7.188)$$

не зависит от k . Оно является дискретным аналогом вронскиана и равно нулю, если векторы функций $\Psi(z)$ и $\Phi(z)$ линейно зависимы. Тогда, вычисляя $W(\varphi, \bar{\varphi})$ при $n \rightarrow \infty$ и $W(\psi, \bar{\psi})$ при $n \rightarrow -\infty$, находим

$$W(\varphi(z), \bar{\varphi}(z)) = -\frac{z - z^{-1}}{2}, \quad W(\psi(z), \bar{\psi}(z)) = \frac{z - z^{-1}}{2}.$$

Далее из соотношений

$$\begin{aligned} W(\psi(z), \bar{\psi}(z)) &= W(\alpha(z)\bar{\varphi}(z) + \beta(z)\varphi(z), \bar{\alpha}(z)\varphi(z) + \bar{\beta}(z)\bar{\varphi}(z)) = \\ &= (\alpha(z)\bar{\alpha}(z) - \beta(z)\bar{\beta}(z))W(\bar{\varphi}(z), \varphi(z)) \end{aligned}$$

и подстановки уравнения (7.187) в $W(\psi(z), \varphi(z))$, $W(\bar{\varphi}(z), \bar{\psi}(z))$ получаем явные выражения для $\alpha(z)$, $\beta(z)$:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \frac{2W(\psi(z), \varphi(z))}{z - z^{-1}}, \\ \beta(z) &= \frac{2W(\bar{\varphi}(z), \psi(z))}{z - z^{-1}} \end{aligned} \quad (7.189)$$

и ограничение на коэффициенты рассеяния

$$\alpha(z)\bar{\alpha}(z) - \beta(z)\bar{\beta}(z) = 1. \quad (7.190)$$

Продолжим изучение свойств функций Йоста. Докажем, что функция $\varphi_n(z)$ имеет *треугольное* представление

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=n}^{\infty} K(n, m) z^m, \quad (7.191)$$

где коэффициенты $K(n, m)$ ($n \leq m$) не зависят от z и подчиняются граничным условиям

$$K(n, m) = 0 \quad (n \neq m, m \rightarrow \infty), \quad K(n, n) = 1 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.192)$$

Поскольку $K(n, m)$ ($n \leq m$) образуют бесконечную верхнюю треугольную матрицу, то представление (7.191) иногда называют верхним *треугольным представлением*. Подставляя его в (7.167) и приравнявая коэффициенты по степеням z , получаем уравнения

$$K(n, n) = 2a_{n-1}K(n-1, n-1), \quad (7.193)$$

$$\frac{K(n, n+1)}{2K(n, n)} - \frac{K(n-1, n)}{2K(n-1, n-1)} = b_n;$$

$$a_{n-1}K(n-1, m+1) + a_nK(n+1, m+1) + b_nK(n, m+1) = \\ + \frac{1}{2}(K(n, m) + K(n, m+2)) \quad (n \leq m). \quad (7.194)$$

Решения разностных уравнений (7.193) с граничными условиями (7.192) имеют вид

$$K(n, n) = e^{\frac{-x_n + x_\infty}{2}};$$

$$K(n, n+1) = -2K(n, n) \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} b_m \right); \quad (7.195)$$

$$K(n, n+2) = e^{\frac{-x_n}{2}} \prod_{m=n+1}^{\infty} e^{\frac{x_m}{2}} \left(-2a_m K(m+1, m+1) - \right. \\ \left. - 2b_m K(m, m+1) - K(m, m) \right)$$

и т. д. Так как смещения частиц в решетке определены с точностью до постоянной, то выберем далее $x_\infty = 0$. Полагая в (7.194) последовательно $m = n+1$, $m = n+2$, ..., мы имеем простые конечно-разностные уравнения

$$e^{\frac{x_{n-1}}{2}} K(n-1, m+1) - e^{\frac{x_n}{2}} K(n, m+2) = e^{\frac{x_n}{2}} \left(-2a_n K(n+1, m+1) - \right. \\ \left. - 2b_n(n, m+1) + K(n, m) \right) \quad (n \leq m)$$

с известной на каждом шаге правой частью. Нетрудно показать единственность решений этих выражений с граничными услови-

ями (7.192) и выписать для них для малых значений $m - n$ явные формулы. В итоге доказано, что при конечных значениях полного импульса

$$\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} 2b_m < \infty$$

и конечных относительных сдвигах на бесконечности $\prod_{m=-\infty}^{\infty} (2a_{m-1}) < \infty$

(эквивалентным условию $(x_n - x_{-n}) < \infty$ при $n \rightarrow \infty$) имеет место представление (7.191). Аналогичным способом можно показать, что функция $\psi_n(z)$ имеет нижнее треугольное представление

$$\psi_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=n} \bar{K}(n, m) z^{-m},$$

$$\bar{K}(n, n) \rightarrow 1 (n \rightarrow -\infty), \quad \bar{K}(n, m) \rightarrow 0 (m < n, m \rightarrow -\infty), \quad (7.196)$$

где коэффициенты $\bar{K}(n, n)$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{K}(n, n) = \frac{\bar{K}(n-1, n-1)}{2a_{n-1}} = \frac{\bar{K}(n+1, n)}{2\bar{K}(n+1, n+1)} - \frac{\bar{K}(n, n-1)}{2\bar{K}(n, n)} = -b_n \quad (7.197)$$

и т. д. Отсюда следуют необходимая для дальнейшего изложения формула

$$\bar{K}(n, n) = e^{\frac{x_n}{2}} g \quad (7.198)$$

и соотношение

$$\bar{K}(n, n)K(n, n) = g \quad (7.199)$$

для диагональных элементов. Формула для постоянной g будет получена позже.

Заметим, что при $|z| = 1$ функции $\bar{\varphi}_n(z)$, $\varphi_n\left(\frac{1}{z}\right)$ подчиняются

одному уравнению и одинаковым граничным условиям. Поэтому

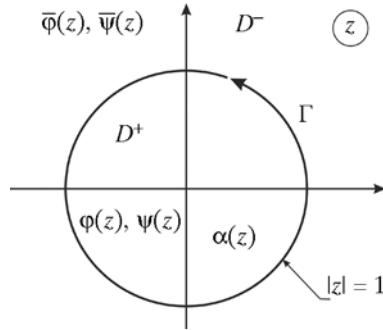


Рис. 7.8

Перейдем теперь к изучению аналитических свойств функций Йоста. Рассмотрим решения уравнения (7.167) при комплексных значениях спектрального параметра z , т. е. в области нефизических значений волнового вектора. Представления (7.191), (7.199) справедливы для непрерывного спектра, когда $z = e^{ik}$. В комплексной z -плоскости непрерывный спектр представляет собой окружность Γ единичного радиуса $|z| = 1$ (рис. 7.8). Если на ней ряды (7.191), (7.199) сходятся, то они будут сходиться и внутри единичного круга $|z| \leq 1$. В этом случае говорят, что функции $\phi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ допускают аналитическое продолжение с единичной окружности (области рассеяния) в область внутри единичного круга (в область D^-). Продолжая соотношения (7.200) в комплексную плоскость, получаем

$$\bar{\phi}_n(z) = \phi_n\left(\frac{1}{z}\right), \quad \bar{\psi}_n(z) = \psi_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\bar{\alpha}(z) = \alpha\left(\frac{1}{z}\right), \quad \bar{\beta}(z) = \beta\left(\frac{1}{z}\right) \quad (|z| > 1),$$

следовательно, $\bar{\phi}_n(z)$ и $\bar{\psi}_n(z)$ являются аналитическими функциями спектрального параметра z вне единичного круга (D^+) ($|z| \geq 1$). Формула (7.189) показывает, что $\alpha(z)$ есть аналитическая функция при $|z| \leq 1$. Области аналитичности этих функций показаны на рис. 7.8.

Функция $\alpha(z)$ может иметь нули на вещественной оси, которые будем обозначать как $z_1, z_2, z_3, \dots, z_N$ ($|z_i| < 1$). Поскольку

в силу единственности решений конечно-разностных уравнений справедливы соотношения

$$\bar{\phi}_n(z) = \phi_n^*(z),$$

$$\bar{\psi}_n(z) = \psi_n^*(z),$$

$$\bar{\alpha}(z) = \alpha^*(z),$$

$$\bar{\beta}(z) = \beta^*(z) \quad (|z| = 1). \quad (7.200)$$

$W(\psi(z_i), \phi(z_i)) = 0$, согласно (7.189), то функция $\psi_n(z_i)$ пропорциональна $\phi_n(z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\psi_n(z_i) = \gamma_i \phi_n(z_i). \quad (7.201)$$

Поэтому асимптотики функции $\psi_n(z_i)$ и $\phi_n(z_i)$ при $n \rightarrow \infty$ совпадают:

$$\psi_n(z_i) \rightarrow \gamma_i(z_i)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

а $\psi_n(z_i)$ убывает и при $n \rightarrow -\infty$ по определению (7.185):

$$\psi_n(z_i) \rightarrow (z_i)^{-n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow -\infty).$$

Таким образом, нули функции $\alpha(z)$ соответствуют собственным значениям дискретного спектра матрицы L с вещественными собственными значениями $\lambda_i = (z_i + z_i^{-1})/2$. Величины γ_i связаны с нормировкой собственных функций дискретного спектра. Для вывода необходимых соотношений используем два уравнения

$$a_{m-1}\psi_{m-1}(z) + a_m\psi_{m+1}(z) + (b_m - \lambda)\psi_m(z) = 0; \quad (7.202)$$

$$a_{m-1}\phi_{m-1}(z) + a_m\phi_{m+1}(z) + (b_m - \lambda)\phi_m(z) = 0 \quad (7.203)$$

для функций Йоста $\psi_m(z)$, $\phi_m(z)$ с собственным значением $\lambda = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Выразим величину b_n из уравнения (7.203) и подставим ее в выражение, полученное после дифференцирования (7.202) по z . Результат записывается в виде

$$\frac{d\lambda}{dz} \psi_m(z) \phi_m(z) = T_m(z) - T_{m-1}(z), \quad (7.204)$$

где

$$T_n(z) = a_n \left(\frac{d\psi_{n+1}(z)}{dz} \phi_n(z) - \frac{d\psi_n(z)}{dz} \phi_{n+1}(z) \right).$$

Просуммируем (7.204) по индексу m от $-\infty$ до n при $z = z_i$. Поскольку

скольк $\frac{d\psi_n(z_i)}{dz_i} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow -\infty)$, то (7.204) преобразуется к виду

$$\frac{d\lambda(z_i)}{dz_i} \sum_{m=-\infty}^n \psi_m(z_i) \phi_m(z_i) = T_n(z_i). \quad (7.205)$$

Далее после дифференцирования уравнения (7.204) по z , подстановки b_n из (7.203), суммирования по индексу m от $n+1$ до ∞ при $z = z_i$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_i)}{dz_i} \sum_{m=n+1}^{\infty} \psi_m(z_i) \phi_m(z_i) = \\ = a_n \left(\frac{d\phi_n(z_i)}{dz} \psi_{n+1}(z_i) - \frac{d\phi_{n+1}(z_i)}{dz} \psi_n(z_i) \right). \end{aligned} \quad (7.206)$$

Результат сложения (7.205) и (7.206) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda(z_i)}{dz_i} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(z_i) \phi_m(z_i) = a_n \left(\frac{d\phi_n(z_i)}{dz} \psi_{n+1}(z_i) - \frac{d\phi_{n+1}(z_i)}{dz} \psi_n(z_i) + \right. \\ \left. + \frac{d\psi_{n+1}(z_i)}{dz} \phi_n(z_i) \right) - \frac{d\psi_n(z_i)}{dz} \phi_{n+1}(z_i). \end{aligned} \quad (7.207)$$

Левая часть этого соотношения вследствие уравнения $\psi_n(z_i) = \gamma_i \phi_n(z_i)$ пропорциональна норме вектора-функции $\phi(z_i)$, которую мы обозначим как

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(z_i) \phi_m(z_i) = \frac{1}{c_i^2}. \quad (7.208)$$

Правая часть с учетом определений (7.188), (7.189) равна производной по z функции

$$-\alpha(z)(z - z^{-1})$$

при $z = z_i$. В итоге получаем простую формулу связывающую величину γ_i с нормой вектора-функции $\phi(z)$:

$$\alpha'(z_i) = \frac{d}{dz} \alpha(z) \Big|_{z=z_i} = -\frac{\gamma_i}{z_i c_i^2}. \quad (7.209)$$

Из нее также следует, что нули $\alpha(z)$ простые и величина $\alpha'(z_i)$ вещественна.

Набор действительных величин γ_i вместе с дискретным спектром z_i ($i = 1, 2, \dots, N$) и коэффициентом отражения $R(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ называется данными рассеяния S :

$$S = \{R(z), \gamma_i, z_i (i = 1, 2, \dots, N)\}, \quad (7.210)$$

их вычисление при заданных коэффициентах a_n, b_n оператора L – прямой задачей рассеяния. Напомним, что в спектральной задаче (7.167) величины a_n, b_n зависят от времени, следовательно, собственные функции и данные рассеяния S также являются функциями времени. Рассмотрим эволюцию коэффициентов $\alpha(z, t), \beta(z, t)$, входящих в уравнение

$$\psi_n(z, t) = \alpha(z, t) \bar{\phi}_n(z, t) + \beta(z, t) \phi_n(z, t). \quad (7.211)$$

При изучении функций Йоста мы опускали временные множители $e^{\pm i\omega t}$ и задавали асимптотическое поведение $\psi_n(z)$ в виде $\psi_n(z) \rightarrow z^{-n}$ ($n \rightarrow \infty$). Такое поведение совместно с уравнением

(7.168) при условии $C = -\frac{z - z^{-1}}{2}$. Тогда эволюцию данных рассеяния S можно установить из выражения

$$\frac{d}{dt} \psi_n = (A\psi)_n = a_{n-1} \psi_{n-1} - a_n \psi_{n+1} - \frac{z - z^{-1}}{2} \psi_n \quad (7.212)$$

следующим образом. Ключевым моментом является то обстоятельство, что данные рассеяния S определяются асимптотическим поведением ψ_n при $n \rightarrow \pm\infty$, когда $a_n(t)$ задается граничными условиями (7.160). Покажем, что временная зависимость данных рассеяния сразу следует из линейных уравнений

$$\frac{d}{dt} \psi_n = \frac{1}{2} (\psi_{n-1} - \psi_{n+1}) - \frac{z - z^{-1}}{2} \psi_n \quad (n \rightarrow \pm\infty) \quad (7.213)$$

с постоянными коэффициентами.

Подстановка выражения (7.211) при $n \rightarrow \infty$

$$\psi_n(z, t) \rightarrow \alpha(z, t) z^{-n} + \beta(z, t) z^n$$

в (7.213) приводит к уравнению

$$\frac{d\psi_n(z, t)}{dt} \rightarrow (z^{-1} - z)\beta(z, t)z^n \quad (n \rightarrow \infty).$$

Кроме того,

$$\frac{d\psi_n(z, t)}{dt} \rightarrow \frac{d\alpha(z, t)}{dt}z^{-n} + \frac{d\beta(z, t)}{dt}z^n \quad (n \rightarrow \infty).$$

Аналогично для связанного состояния при $z = z_i$ из уравнения (7.213) при $n \rightarrow \infty$ для функции $\psi_n(z_i, t) = \gamma_i(t)\phi_n(z_i, t)$ получаем

$$\frac{d\psi_n(z_i, t)}{dt} = \frac{d(\gamma_i\phi_n(z_i, t))}{dt} = \frac{d\gamma_i(t)}{dt}z_i^n$$

и

$$\frac{d\psi_n(z_i, t)}{dt} = \gamma_i(t)z_i^n(z_i^{-1} - z_i).$$

В итоге после неявного отображения переменных $a(t)$, $b_n(t)$ в новые динамические переменные $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma_i(t)$ нелинейная динамика решетки редуцируется к тривиальным линейным уравнениям с решениями

$$\alpha(z, t) = \alpha(z, 0), \quad \beta(z, t) = \beta(z, 0)\exp[(z^{-1} - z)t],$$

$$\gamma_i(t) = \gamma_i(0)\exp[(z_i^{-1} - z_i)t]. \quad (7.214)$$

Если заданы начальные условия $a(0)$, $b_n(0)$, то из решения уравнений (7.193)–(7.195), (7.197), (7.198) можно найти ядра $K_{nm}(t=0)$, $\bar{K}_{nm}(t=0)$, а затем определить функции Йоста и значения данных рассеяния в начальный момент. Тогда при известной их эволюции (7.214) динамика частиц в решетке Тоды может быть в принципе решена, если нам известен *метод определения величин $a(t)$, $b_n(t)$ по данным рассеяния $S(t)$* . Он называется *обратным спектральным преобразованием*, или *методом обратной задачи рассеяния*.

7.3.3. Метод обратной задачи рассеяния

Эта задача является одним из наиболее интригующих и поучительных разделов математической физики, обнаруживает в своем развитии новые неожиданные аспекты и далеко не является исчерпанной.

Л.Д. Фаддеев

Обратные задачи часто возникают во многих разделах науки, когда значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных. Примеры решенных обратных задач можно найти в геофизике, астрономии, медицинской визуализации, томографии, спектральном анализе, задачах по неразрушающему контролю и т. д. В нашем случае при выводе уравнений обратной задачи рассеяния фундаментальную роль играют аналитические свойства функций $\psi_n(z)$, $\phi_n(z)$.

Умножим уравнение (7.187) на $\frac{1}{2\pi i}z^{m-1}$ ($n \leq m$) и проинтегрируем по замкнутому контуру $|z| = 1$:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \bar{\phi}_n(z) z^{m-1} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} \phi_n(z) dz. \quad (7.215)$$

Здесь для компактности записи опущена зависимость переменных от времени и интегрирование идет против часовой стрелки. Преобразуем вначале правую часть этого уравнения с помощью полученных ранее выражений

$$\phi_n(z) = \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) z^s,$$

$$\bar{\phi}_n(z) = \phi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) z^{-s}$$

для функций Йоста. Первое слагаемое принимает простой вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \bar{\phi}_n(z) z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) \oint z^{-s} z^{m-1} dz = K(n, m), \quad (7.216)$$

так как входящие сюда интегралы после подстановки $z = e^{i\varphi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) без труда вычисляются:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint z^{-s+m-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i(-s+m)] d\varphi = \delta_{ms}.$$

Слагаемое с коэффициентом отражения $R(z)$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} \varphi_n(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) R(z) z^s z^{m-1} dz = \\ &= \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) F_w(s+m), \end{aligned} \quad (7.217)$$

где функция $F_w(m)$ определяется вкладом непрерывного спектра

$$F_w(m) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z) z^{m-1} dz. \quad (7.218)$$

Если упрощение правой части достигается фактически преобразованием Фурье, то для упрощения левой части необходимо использовать свойства аналитичности функций Йоста. Напомним, что функция $\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1}$ является аналитической функцией

внутри круга $|z| < 1$, кроме полюсов $z_1, z_2, \dots, z_N$ ($|z_i| < 1$) – нулей функции $\alpha(z)$ и полюсов при $z = 0$, как следует из разложения (7.198). По теореме Коши левая часть уравнения (7.215) равна

сумме вычетов (Res) функции $\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1}$ в этих полюсах:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} dz &= \text{Res} \left(\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} \right)_{/z=0} + \\ &+ \sum_{i=1}^N \text{Res} \left(\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} \right)_{/z=z_i}. \end{aligned} \quad (7.219)$$

Найдем вначале значение $\alpha(z)$ при $z = 0$. Подставим разложения (7.191), (7.196) в определение $\alpha(z)$ (7.189). Тогда с учетом (7.195), (7.198) в пределе $z \rightarrow 0$ находим, что

$$\alpha(0) = 2a_n K(n, n) \bar{K}(n+1, n+1) = K(n, n) \bar{K}(n, n) = g$$

и

$$\text{Res} \left(\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} \right)_{/z=0} = \delta_{nm} \frac{\bar{K}(n, m)}{g} = \delta_{nm} \frac{1}{K(n, n)}.$$

Для вычисления вычетов второго слагаемого в (7.219) используем разложение

$$\alpha(z) = \left(\frac{d\alpha(z_i)}{dz_i} \right) (z - z_i) + \dots = \alpha'(z_i) (z - z_i) + \dots$$

в окрестности точки $z = z_i$, вследствие которого

$$\text{Res} \left(\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} z^{m-1} \right)_{/z=z_i} = \text{Res} \left(\frac{\Psi_n(z_i)}{\alpha'(z_i)(z - z_i)} z_i^{m-1} \right) = \frac{\Psi_n(z_i)}{\alpha'(z_i)} z_i^{m-1}.$$

Согласно (7.128), (7.209) последнее выражение записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_n(z_i)}{\alpha'(z_i)} z_i^{m-1} &= \frac{\gamma_i \varphi_n(z_i)}{\alpha'(z_i)} z_i^{m-1} = \\ &= \frac{\gamma_i z_i^{m-1}}{\alpha'(z_i)} \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) z_i^s = -c_i^2 \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s) z_i^{s+m}. \end{aligned}$$

Наконец, собирая все слагаемые, приводим уравнение (7.215) к окончательному виду и записываем его с учетом зависимости от времени:

$$\delta_{nm} \frac{1}{K(n, n, t)} = K(n, m, t) + \sum_{s=n}^{\infty} K(n, s, t) F(s+m, t) = 0 \quad (n \leq m), \quad (7.220)$$

где

$$F(s+m, t) = \frac{1}{2\pi i} \oint R(z, t=0) \exp\left[(z^{-1} - z)t\right] z^{s+m-1} dz + \sum_{i=1}^N c_i(t=0)^2 \exp\left[(z_i^{-1} - z_i)t\right] z_i^{s+m}. \quad (7.221)$$

Это уравнение представляет собой дискретный аналог уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко, которое встречается в модификациях метода обратной задачи рассеяния интегрирования нелинейных уравнений в частных производных. Оно является системой линейных уравнений

$$G(n, m, t) + F(n+m, t) + \sum_{s=n+1}^{\infty} G(n, s, t) F(s+m, t) = 0 \quad (n < m) \quad (7.222)$$

для недиагональных элементов

$$G(n, s) = \frac{K(n, s)}{K(n, n)} \quad (n < s),$$

решения которой, согласно (7.221), при $n = m$ определяют диагональные элементы

$$\frac{1}{K(n, n, t)^2} = 1 + F(2n, t) + \sum_{s=n+1}^{\infty} G(n, s, t) F(s+n, t). \quad (7.223)$$

Эти уравнения – суть метода обратной задачи рассеяния, который состоит из трех этапов. После нетривиальной однозначной замены переменных $\{a_n(t), b_n(t)\}$ в данные рассеяния $S(t)$ уравнения решетки Тоды превратились в тривиальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. На первом этапе (прямая задача рассеяния) по известным начальным данным $a_n(t=0), b_n(t=0)$ ($-\infty \leq n \leq \infty$) вычисляются данные рассеяния $S(t=0)$ (7.210). На втором находится эволюция данных рассеяния $S(t)$ (7.214). На третьем этапе (обратная задача рассеяния) из решения уравнения (7.222) определяется матрица $G(n, s, t)$, следовательно, величины $K(n, n, t)$. Наконец, формула

$$2a_n(t) = e^{\frac{x_n(t) - x_{n+1}(t)}{2}} = \frac{K(n+1, n+1, t)}{K(n, n, t)} \quad (7.224)$$

определяет деформацию и смещение частиц

$$x_n(t) = -2\ln K(n, n, t) + \text{const} \quad (7.225)$$

в решетке. Эти этапы можно изобразить схемой

$$\{x_n(t=0), p_n(t=0)\} \xrightarrow{\text{I}} S(t=0) \xrightarrow{\text{II}} S(t) \xrightarrow{\text{III}} x_n(t),$$

они связаны с решением линейных задач, что является главным преимуществом процедуры. Изложенный метод не только позволяет исследовать эволюцию частиц в решетке, но и получить множество частных решений.

Рассмотрим сначала случай бесконечно малых начальных смещений и скоростей смещений в решетке $x_n(t=0) \sim O(\epsilon)$, $b_n(t=0) \sim O(\epsilon)$, $\epsilon \ll 1$. Тогда в прямой задаче рассеяния нет связанных состояний и коэффициент отражения остается малым во все моменты. Значит, третьим слагаемым в (7.223) можно пренебречь и

$$\frac{1}{K(n, n, t)^2} \approx 1 + F(2n, t),$$

а смещения частиц решетки в произвольный момент равны

$$x_n(t) = -2\ln K(n, n, t) = \ln(1 + F(2n, t)) \approx F(2n, t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint R(z, t=0) \exp\left[(z^{-1} - z)t\right] z^{2n-1} dz.$$

Поскольку вклад в это выражение дает только непрерывный спектр, то после замены $z = e^{ik}$ оно записывается в виде

$$\begin{aligned} x_n(t) &= -2\ln K(n, n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(k, t=0) \exp\left[i(2kn - 2\sin(k))t\right] dk = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} R\left(\frac{k}{2}, t=0\right) \exp\left[i(kn - \omega_1 t)\right] + \\ &+ R\left(\frac{k}{2} + \pi, t=0\right) \exp\left[i(kn + \omega_1 t)\right] dk. \end{aligned} \quad (7.226)$$

Поскольку эта формула совпадает с результатом (7.144) линейной теории, полученным преобразованием Фурье, то метод обратной задачи часто называют нелинейным аналогом преобразования Фурье. Другой случай, где можно получить явные формулы, – это замечательный класс так называемых N -солитонных решений.

7.3.4. N -солитонные решения

Абстрактные представления являются весьма полезными вспомогательными средствами, а иногда без них почти невозможно обойтись. Однако никогда не следует забывать, что они не обладают никакой физической реальностью. Физической реальностью обладают только исключительно перемещения локализованных элементов с течением времени.

Л. де Бройль

Пусть начальные $a_n(t=0)$, $b_n(t=0)$ таковы, что коэффициент отражения равен нулю $R(z, t=0)$ и имеется только N связанных состояний. Эти случаи принято называть безотражательными. Важно, что при таких данных рассеяния интегральные уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко сводятся к линейным уравнениям и решаются явно. Эволюция $a_n(t)$, $b_n(t)$ определяется только параметрами $\{c_i(t), z_i (i = 1, 2, \dots, N)\}$ дискретного спектра, которые задают функцию

$$F(s+m, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t)^2 z_i^{s+m} = \sum_{i=1}^N c_i(t=0)^2 \exp\left[\left(z_i^{-1} - z_i\right)t\right] z_i^{s+m} \quad (7.227)$$

в интегральном уравнении (7.222). Ее элементы $F(s+m, t)$ образуют матрицу $F_{sm}(t) = F(s+m, t)$. Поскольку эта матрица вырождена $\det\|F_{sm}(t)\| = 0$, то интегральные уравнения типа (7.222) решаются стандартным методом. В нашем случае после подстановки

$$G(n, m, t) = \sum_{j=1}^N c_j(t) A_{ni} z_i^m \quad (7.228)$$

и суммирования

$$\sum_{s=n+1}^{\infty} (z_i z_j)^s = \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}$$

матричные уравнения (7.222) приводятся к виду

$$\sum_{i=1}^N c_i(t) z_i^m \left[A_{ni} + c_i(t) z_i^n + \sum_{j=1}^N c_i(t) c_j(t) \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j} A_{nj} \right] = 0.$$

В итоге величины A_{ni} подчиняются системе линейных уравнений

$$A_{ni} + c_i(t) z_i^n + \sum_{j=1}^N c_i(t) c_j(t) \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j} A_{nj} = 0 \quad (-\infty < n < \infty), \quad (7.229)$$

решения которых запишем в виде

$$A_{ni} = - \sum_{j=1}^N (B^{-1}(n))_{ij} c_j(t) z_i^n, \quad (7.230)$$

где $B(n)$ – симметричная матрица с элементами

$$B_{ij}(n) = \delta_{ij} + c_i(t) c_j(t) \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}. \quad (7.231)$$

После подстановки (7.228), (7.230) в уравнение для (7.223) $K(n, n, t)$ и суммирования по индексу s получаем

$$\frac{1}{K(n, n, t)^2} = 1 + \sum_{i=1}^N c_i(t)^2 z_i^{2n} + \sum_{j=1}^N c_j(t) z_j^{n+1} \sum_{i=1}^N A_{ni} c_i(t) c_j(t) \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}. \quad (7.232)$$

Согласно (7.230), выражение

$$\sum_{i=1}^N A_{ni} c_i(t) c_j(t) \frac{(z_i z_j)^{n+1}}{1 - z_i z_j}$$

равно $-A_{nj} - c_j(t)z_j^n$, и формула (7.232) существенно упрощается:

$$\frac{1}{K(n, n, t)^2} = 1 - \sum_{j=1}^N c_j(t) A_{nj} z_j^n. \quad (7.233)$$

Докажем соотношение

$$1 - \sum_{j=1}^N c_j(t) A_{nj} z_j^n = \frac{\det B(n-1)}{\det B(n)}. \quad (7.234)$$

Напомним формулы для элементов обратной матрицы T^{-1} и определителя произвольной $N \times N$ -матрицы $T = \|t_{ij}\|$:

$$(T^{-1})_{ij} = \frac{\partial}{\partial t_{ji}} \ln \det T,$$

$$\det T = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} t_{1 i_1} t_{2 i_2} \dots t_{N i_N},$$

где по повторяющимся немим индексам производится суммирование от 1 до N . Здесь $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ — единичный антисимметричный тензор: $\varepsilon_{12 \dots N} = 1$. Он имеет три значения: нуль, если любые два индекса совпадают; $+1$, если $i_1 i_2 \dots i_N$ являются четной перестановкой чисел $1, 2, \dots, N$; -1 , если $i_1 i_2 \dots i_N$ являются нечетной перестановкой чисел $1, 2, \dots, N$. Запишем формулу для определителя матрицы $B(n-1)$ и подставим в нее соотношение $B_{ij}(n-1) - B_{ij}(n) = c_i(t)c_j(t)z_i^n z_j^n$. Воспользуемся свойствами антисимметричного тензора $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$, определением обратной матрицы и выражением (7.230). Тогда после серии выкладок

$$\begin{aligned} \det B(n-1) &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (B_{1 i_1}(n) + c_1(t)c_{i_1}(t)z_1^n z_{i_1}^n) \times \\ &\times (B_{2 i_2}(n) + c_2(t)c_{i_2}(t)z_2^n z_{i_2}^n) \dots (B_{N i_N}(n) + c_N(t)c_{i_N}(t)z_N^n z_{i_N}^n) = \\ &= \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} B_{1 i_1}(n) B_{2 i_2}(n) \dots B_{N i_N}(n) + \\ &+ \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} (c_1(t)c_{i_1}(t)z_1^n z_{i_1}^n) B_{2 i_2}(n) \dots B_{N i_N}(n) + \\ &+ \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} B_{1 i_1}(n) c_2(t)c_{i_2}(t)z_2^n z_{i_2}^n \dots B_{N i_N}(n) + \\ &+ \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} B_{1 i_1}(n) B_{2 i_2}(n) \dots (c_N(t)c_{i_N}(t)z_N^n z_{i_N}^n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det B(n) [1 + c_1(t)c_{i_1}(t)z_1^n z_{i_1}^n (B^{-1}(n))_{i_1 1} + \\ &+ c_2(t)c_{i_2}(t)z_2^n z_{i_2}^n (B^{-1}(n))_{i_2 2}, \dots, c_N(t)c_{i_N}(t)z_N^n z_{i_N}^n (B^{-1}(n))_{i_N N}] = \\ &= \det B(n) [1 - c_1(t)z_1^n A_{n1} - c_2(t)z_2^n A_{n2}, \dots, -c_N(t)z_N^n A_{nN}] = \\ &= \det B(n) \left[1 - \sum_{i=1}^N c_i(t)z_i^n A_{ni} \right] \end{aligned}$$

мы доказываем требуемое соотношение.

В результате, согласно (7.225), получаем удобную формулу

$$x_n(t) = -2 \ln K(n, n, t) = \ln \frac{\det B(n-1)}{\det B(n)} \quad (7.235)$$

для вычисления солитонных решений. Обсудим вначале случай одного связанного состояния с собственными значениями

$$z_1 = \varepsilon \exp[-k] (\varepsilon = \pm 1, k > 0).$$

Обозначим

$$\frac{c_1(t=0)^2 \exp\left[(z_1^{-1} - z_1)t\right]}{1 - z_1^2} = e^{2\varepsilon \text{shy}(t-t_0)}$$

и запишем $B(n)$ в виде

$$B(n) = 1 + c_1(t)^2 \frac{(z_1)^{2(n+1)}}{1 - z_1^2} = 1 + e^{-2k(n+1) + 2\varepsilon \text{sh}k(t-t_0)}.$$

Тогда смещения частиц в решетке

$$x_n = \ln \left[\frac{1 + e^{-2kn + 2\varepsilon \text{sh}k(t-t_0)}}{1 + e^{-2k(n+1) + 2\varepsilon \text{sh}k(t-t_0)}} \right] = \ln \left[1 + \frac{(-1 + e^{2k})}{1 + e^{2k(n+1) - 2\varepsilon \text{sh}k(t-t_0)}} \right] \quad (7.236)$$

представляют собой уединенную локализованную волну, движущуюся с постоянной скоростью

$$v = \frac{\text{sh}k}{k} > 1,$$

без изменения формы в положительном ($\epsilon = 1$) или отрицательном ($\epsilon = -1$) направлении. После введения безразмерных переменных (7.155) расстояние между частицами в решетке выбрано равным единице и координата частицы с индексом n равна y_n . Из-за присутствия локализованной волны ее координата станет $y_n + x_n$ и разность $y_n - y_{n-1}$ между положениями соседних частиц в решетке будет $1 + x_n - x_{n-1}$. Локальная деформация решетки $x_n - x_{n-1}$ имеет простой вид:

$$\begin{aligned} (x_n - x_{n-1}) &= -\ln \frac{B(n)B(n-2)}{B(n-1)^2} = \\ &= -\ln \left(1 + \frac{\text{sh}k^2}{\text{ch}^2(-kn + \epsilon \text{sh}k(t - t_0))} \right). \end{aligned} \quad (7.237)$$

Так как $(x_n - x_{n-1}) < 0$, то солитон представляет собой локализованную волну сжатия. Его структура при $k = 0,7$ изображена на рис. 7.9.

С уменьшением ширины $d \sim \frac{1}{k}$ увеличиваются скорость и амплитуда волны. Уединенная волна всегда распространяется быстрее, чем малоамплитудные линейные волны. Заметим, наконец, что в размерных переменных последняя формула запишется в виде

$$\begin{aligned} (x_n - x_{n-1}) &= -\ln \frac{B(n)B(n-2)}{B(n-1)^2} = \\ &= -\frac{1}{b} \ln \left(1 + \frac{\text{sh}k^2}{\text{ch} \left(-kn + \epsilon \text{sh}k \left(\sqrt{\frac{ab}{m}} t - t_0 \right) \right)} \right) \end{aligned}$$

и ее нельзя получить из теории возмущений. Подобные решения являются существенно нелинейными образованиями и мы будем их называть *солитонами*. В общем случае солитоном называется уединенная волна в средах разной физической приро-

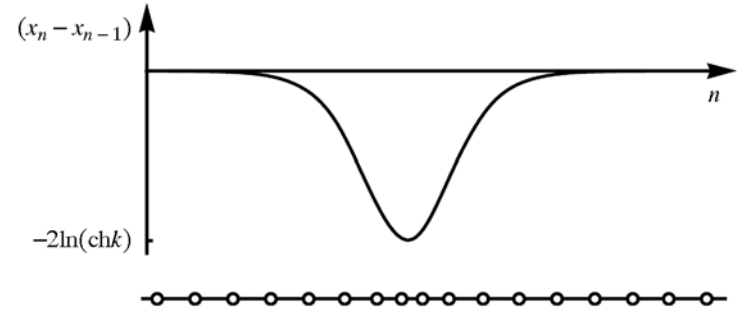


Рис. 7.9

ды, сохраняющая неизменными форму и скорость при распространении. Ее название произошло от англ. solitary – уединенная (solitary wave – уединенная волна), «-он» – типичное окончание терминов такого рода (например электрон, фотон и т. д.), означающее подобие частицы. Однако в интегрируемых системах динамика солитонов имеет важные особенности, одну из которых мы проиллюстрируем на примере двухсолитонного решения. Оно зависит от четырех параметров:

$$c_i(t=0), \quad z_i = \epsilon_i \exp[-k_i], \quad (\epsilon_i = \pm 1, \quad k_i > 0, \quad i = 1, 2)$$

и структуры определителя матрицы $B(n)$:

$$\begin{aligned} \det B(n) &= 1 + \frac{c_1(t)^2 z_1^{2(n+1)}}{1 - z_1^2} + \frac{c_2(t)^2 z_2^{2(n+1)}}{1 - z_2^2} + \\ &+ \frac{(z_1 - z_2)^2}{(1 - z_1 z_2)^2} c_1(t)^2 z_1^{2(n+1)} c_2(t)^2 z_2^{2(n+1)}. \end{aligned} \quad (7.238)$$

В обозначениях

$$c_i(t)^2 = (1 - z_i^2) \exp[(z_i^{-1} - z_i)t + 2\phi_i],$$

$$\Phi_i(n) = -2(n+1)k_i + 2\epsilon_i \text{sh}k_i t + 2\phi_i, \quad i = 1, 2$$

эта формула, записанная в компактном виде

$$\det B(n) = 1 + e^{\Phi_1} + e^{\Phi_2} + \frac{(z_1 - z_2)^2}{(1 - z_1 z_2)^2} e^{\Phi_1 + \Phi_2}, \quad (7.239)$$

представляет нелинейную суперпозицию двух солитонов. Положим для определенности $k_1 > k_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ и обсудим вначале структуру такой волны в системе координат, движущейся со скоростью $v_1 = \text{sh}k_1/k_1$ первого солитона. Тогда $\Phi_1(n) = \text{const}$ и

$$\Phi_2(n) = k_2 \left(\frac{\Phi_1(n)}{k_1} + 2t \left(-\frac{\text{sh}k_1}{k_1} + \frac{\text{sh}k_2}{k_2} \right) + 2 \frac{\Phi_2}{k_2} - 2 \frac{\Phi_1}{k_1} \right),$$

$$\left(\frac{\text{sh}k_1}{k_1} - \frac{\text{sh}k_2}{k_2} \right) > 0.$$

При $t \rightarrow -\infty$ величина $\Phi_2(n) \rightarrow \infty$, первое и второе слагаемое (7.239) экспоненциально мало и мы имеем

$$\det B(n) \approx \left(1 + e^{\Phi_1(n)} \frac{(z_1 - z_2)^2}{(1 - z_1 z_2)^2} \right) e^{\Phi_2(n)},$$

а при $t \rightarrow \infty$ функция $\Phi_2(n) \rightarrow -\infty$ и

$$\det B(n) \approx 1 + e^{\Phi_1}.$$

Отсюда следует, что в движущейся системе координат, когда $\Phi_1(n) = \text{const}$, деформация при $t \rightarrow \pm\infty$ записывается в виде

$$(x_n - x_{n-1}) = -\ln \left[1 + \frac{\text{sh}k_1^2}{\text{ch}^2 \left(\frac{\Phi_1(n) + A_{\pm}}{2} + k_1 \right)} \right], \quad (7.240)$$

где $A_- = \ln \frac{(z_1 - z_2)^2}{(1 - z_1 z_2)^2}$, $A_+ = 0$. Подобным образом в системе координат, движущейся со скоростью $v_2 = \text{sh}k_2/k_2$ второго солитона, асимптотическое поведение при $t \rightarrow \pm\infty$ деформации имеет вид

$$(x_n - x_{n-1}) = -\ln \left[1 + \frac{\text{sh}k_2^2}{\text{ch}^2 \left(\frac{\Phi_2(n) + B_{\pm}}{2} + k_2 \right)} \right], \quad (7.241)$$

где $B_- = 0$, $B_+ = A_-$. Таким образом, при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ двухсолитонное решение описывает процесс столкновения двух солитонов со скоростями v_1 и v_2 . При $t \rightarrow -\infty$ они пространственно разделены и, так как $\text{sh}k_1/k_1 > \text{sh}k_2/k_2$, то быстрый солитон находится левее медленного. Асимптотика двухсолитонного решения в этом пределе есть сумма правых частей формул (7.240) и (7.241). С течением времени быстрый солитон догоняет медленный. При их сближении картина пространственно разделенных солитонов теряется. Однако с течением времени быстрый солитон обгоняет медленный, расстояние между ними увеличивается так, что при $t \rightarrow +\infty$ вновь возникают пространственно разделенные солитоны. После взаимодействия быстрый солитон испытывает

изменение фазы и сдвигается вперед на величину $-\frac{A_-}{k_1} > 0$ по

сравнению с тем положением, которое он занимал бы в отсутствие второго солитона. Медленный солитон после взаимодействия

смещается назад на величину $-\frac{A_-}{k_2}$. Этот сценарий движения, вычисленный по точным решениям, солитонов с параметрами $k_1 = 1,5$, $k_2 = 0,7$ через равные промежутки времени, изображен на рис. 7.10.

При столкновении число частиц, их амплитуды и скорости при рассеянии не меняются. Процесс рассеяния солитонов состоит лишь в изменении фазы солитонов на A_- . Посколь-

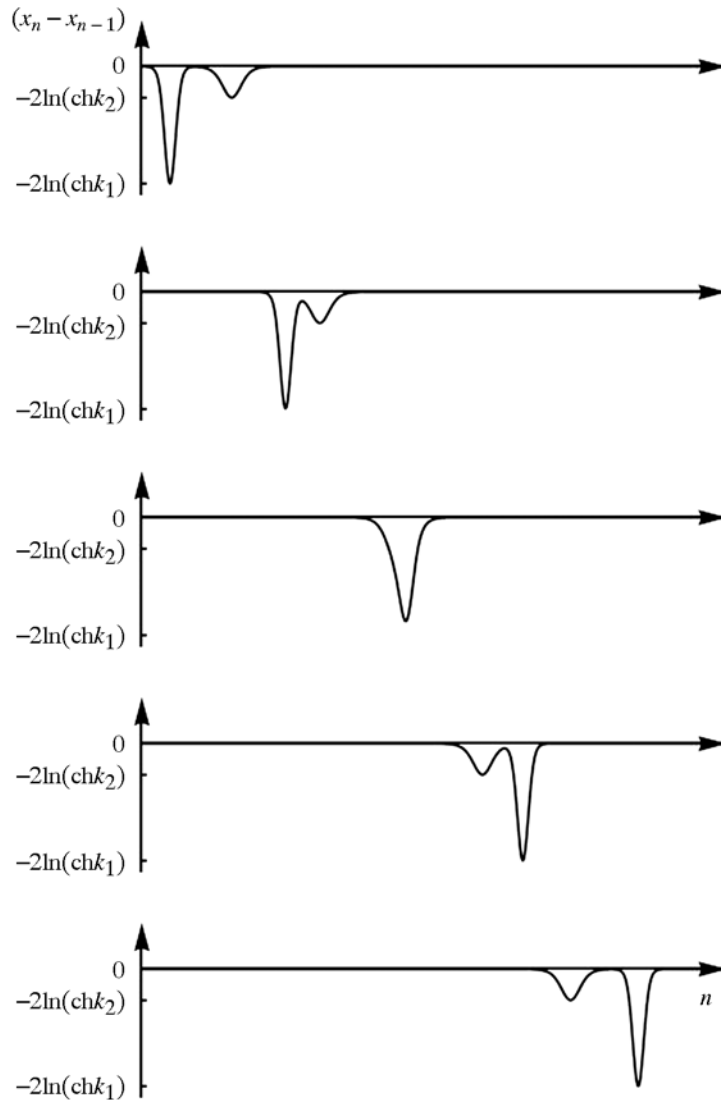


Рис. 7.10

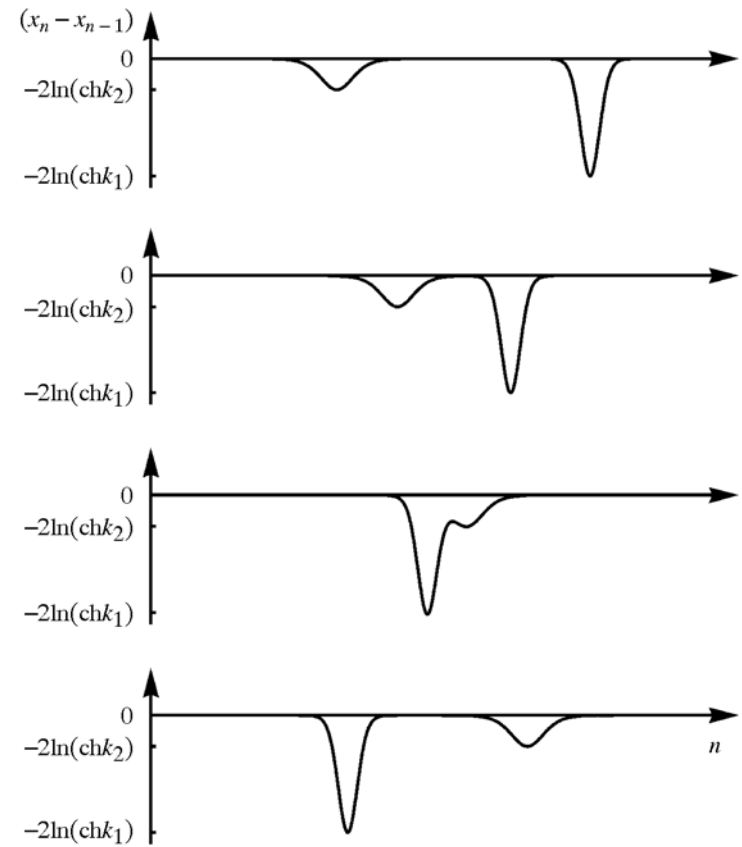


Рис. 7.11

ку $\ln \frac{(z_1 - z_2)^2}{(1 - z_1 z_2)^2} < 0$, то в результате взаимодействия быстрый

солитон получает сдвиг вперед, а медленный – назад.

В случае $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$ солитоны движутся навстречу друг другу и, если расстояние между ними больше характерных размеров, то решение имеет два выраженных минимума. На рис. 7.11 показано движение солитонов с параметрами $k_1 = 1,5$, $k_2 = 0,7$ через равные промежутки времени. По мере сближения солитонов амплитуда быстрого уменьшается, а медленного увеличивается. После

выравнивания амплитуд солитоны обмениваются амплитудами и скоростями и расходятся. Амплитуда первоначально медленного солитона возрастает до таковой быстрого.

В общем случае N -солитонное решение (7.235) описывает процесс рассеяния N солитонов. При этом полное приращение фазы солитона равно сумме фаз при парном его столкновении с остальными солитонами. Результат столкновения индивидуального солитона с остальными не зависит от порядка столкновений. Солитоны ведут себя подобно частицам (частицеподобная волна): при взаимодействии друг с другом они не разрушаются и после столкновения сохраняют свою структуру неизменной. Описанная картина движения солитонов является общей для всех интегрируемых систем.

7.3.5. Обратная задача рассеяния и задача Римана

Идея, примененная однажды, порождает искусственный прием. Примененная дважды, она становится методом.

Г. Полюа, Г. Сеге

Схема обратной задачи рассеяния, описанная в предыдущем параграфе, содержит конечно-разностные уравнения (7.222), (7.223). Далее мы изложим другую плодотворную формулировку этого метода, центральную роль в которой играет задача Римана.

Решение уравнения (7.187), записанного в виде

$$\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} = \bar{\varphi}_n(z) + R(z)\varphi_n(z), \quad (7.242)$$

есть частный пример решения типичной задачи Римана. Для нашего случая она формулируется следующим образом. Дан замкнутый контур $\Gamma(|z|=1)$, разделяющий плоскость комплексного переменного на внутреннюю область D^+ и внешнюю D^- (см. рис. 7.8).

Требуется найти две функции: $\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)}$ – аналитическую в области

D^+ , за исключением точек $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), где она имеет простые полюсы; и $\bar{\varphi}_n(z)$ – аналитическую в области D^- (с заданным поведением при $z \rightarrow \infty$), удовлетворяющие на контуре Γ условию (7.242). Покажем, что решение этой задачи сводится к

решению определенной системы сингулярных интегральных уравнений. Приведем вначале некоторые необходимые сведения об особых интегралах из теории функций комплексного переменного. Пусть Γ – некоторый замкнутый контур в области комплексного переменного z , D^+ – область внутри контура, D^- – область, дополнительная к $D^+ + \Gamma$. Напомним, что если $f(z)$ – аналитическая функция в области D^+ и непрерывная в $D^+ + \Gamma$, то знаменитая формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} f(z), & z \in D^+ \\ 0, & z \in D^- \end{cases} \quad (7.243)$$

позволяет по известным значениям функции $f(z)$ на границе найти значения функции в D^+ . Если $f(z)$ – аналитическая функция в области D^- , непрерывная в $D^- + \Gamma$ и $f(\infty) \neq \infty$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z} = \begin{cases} 0, & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \quad (7.244)$$

Направление обхода контура выбираем так, чтобы область D^+ оставалась слева. Для интегралов типа Коши линиями, где подынтегральная функция перестает быть аналитической по z , является контур Γ . На нем подынтегральная функция в (7.243) обращается в бесконечность и интеграл

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad z_0 \in \Gamma$$

называется *особым*, или *сингулярным*. Ему придается смысл специальным предельным переходом. Проведем окружность радиуса $r \ll 1$ около точки z_0 , и пусть точки z_1 и z_2 – точки ее пересечения с кривой Γ (рис. 7.12). Если точка z стремится к контуру из области D^+ , то определим особый интеграл

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \int_{z_a}^{z_b} \frac{f(t) dt}{t-z}, \quad z \in D^+, \quad z_0 \in \Gamma \quad (7.245)$$

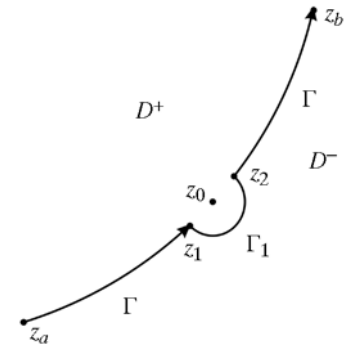


Рис. 7.12

как предельное значение

$$\int_{z_2}^{z_b} \frac{f(t) dt}{t - z_0} + \int_{z_a}^{z_1} \frac{f(t) dt}{t - z_0} + \int_{\Gamma_1} \frac{f(t) dt}{t - z_0} \quad (7.246)$$

при $r \rightarrow 0$. Здесь Γ_1 – дуга окружности, расположенная в области D^- . Последний интеграл после замены $t = z_0 + re^{i\varphi}$ ($z_1 = z_0 + r$) без труда вычисляется:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(t) dt}{t - z_0} = if(z_0) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} d\varphi = if(z_0) \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = i\pi f(z_0). \quad (7.247)$$

Предел суммы первых двух интегралов в (7.246) при $r \rightarrow 0$ называется главным значением особого интеграла и обозначается символом P :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{z_2}^{z_b} \frac{f(t) dt}{t - z_0} + \int_{z_a}^{z_1} \frac{f(t) dt}{t - z_0} = P \int_{z_a}^{z_b} \frac{f(t) dt}{t - z_0}.$$

Если контур замкнут, то $z_a = z_b$ и в окончательном виде мы получаем формулу

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} = i\pi f(z_0) + P \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z_0}, \quad z \in D^+, \quad z_0 \in \Gamma. \quad (7.248)$$

Аналогичным образом доказывается выражение

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} = -i\pi f(z_0) + P \oint_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z_0}, \quad z \in D^-, \quad z_0 \in \Gamma. \quad (7.249)$$

Эти формулы называются *формулами Сохоцкого*. Для их применения в дальнейшем удобно перейти от функций Йоста к функциям с постоянными значениями при $z \rightarrow \infty$ и $z = 0$. Введем новые функции $\Psi_n(z)$, $\Phi_n(z)$, $\bar{\Phi}_n(z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi_n(z) &= z^{-n} e^{\frac{-x_n(t)}{2}} \Psi_n(z), \\ \bar{\Phi}_n(z) &= z^{-n} e^{\frac{-x_n(t)}{2}} \bar{\Phi}_n(z), \end{aligned} \quad (7.250)$$

$$\Phi_n(z) = z^n e^{\frac{-x_n(t)}{2}} \Phi_n(z).$$

Тогда $\Psi_n(z)$ не имеет полюсов при $z = 0$ и $\bar{\Phi}_n(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Перепишем теперь соотношение (7.246) в терминах новых функций:

$$\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} = \bar{\Phi}_n(z) + R(z) \Phi_n(z) z^{2n}, \quad z \in \Gamma. \quad (7.251)$$

Согласно теореме Коши:

$$\bar{\Phi}_n(z) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\bar{\Phi}_n(z') dz'}{z' - z}, \quad z \in D^-; \quad (7.252)$$

$$\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Psi_n(z') dz'}{\alpha(z') (z' - z)}, \quad z \in D^+. \quad (7.253)$$

Поскольку при обходе контура Γ область D^- остается справа, то перед интегралом в правой части (7.252) стоит знак «минус». Контур $\bar{\Gamma}$ (рис. 7.13) включает контур Γ и окружности бесконечно малого радиуса около точек $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), соединенные разрезами с контуром. Берега Γ^+ , Γ^- одного из разрезов показаны на рис. 7.13. Ясно, что интеграл по сумме всех берегов разрезов равен нулю. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\bar{\Gamma}} \frac{\Psi_n(z) dz'}{\alpha(z') (z' - z)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Psi_n(z') dz'}{\alpha(z') (z' - z)} - \\ & - \sum_{i=1}^N \text{Res} \left(\frac{\Psi_n(z')}{\alpha(z') (z' - z_i) (z' - z)} \right)_{|z'=z_i}, \end{aligned}$$

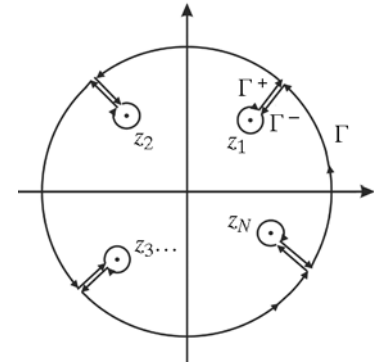


Рис. 7.13

где, согласно (7.201), (7.209), (7.250):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Res} \left(\frac{\Psi_n(z')}{\alpha(z')(z' - z)} \right)_{z'=z_i} &= \operatorname{Res} \left(\frac{\Psi_n(z_i)}{(z_i - z)\alpha'} \right) = \\ &= \frac{\gamma_i \Phi(z_i) z_i^{2n}}{(z_i - z)\alpha'} = -\frac{c_i^2 \Phi(z_i) z_i^{2n+1}}{(z_i - z)}. \end{aligned} \quad (7.254)$$

В итоге

$$\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Psi_n(z') dz'}{\alpha(z')(z' - z)} + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2 \Phi(z_i) z_i^{2n+1}}{(z_i - z)}. \quad (7.255)$$

Найдем интегральное представление для собственных функций $\Psi_n(z)$ и $\bar{\Phi}_n(z)$. Подставим соотношение

$$\bar{\Phi}_n(z) = \frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} - R(z) \Phi_n(z) z^{2n} (z \in \Gamma)$$

в правую часть уравнения (7.252). В полученном выражении интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\Psi_n(z') dz'}{\alpha(z')(z' - z)}, \quad z \in D^-$$

равен сумме вычетов только в точках $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$),

так, $\frac{\Psi_n(z') dz'}{(z' - z)}$ аналитична в области D^+ . В итоге функция $\bar{\Phi}_n(z)$

имеет интегральное представление

$$\bar{\Phi}_n(z) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2 \Phi(z_i) z_i^{2n+1}}{(z_i - z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{R(z') z'^{2n} \Phi_n(z') dz'}{z' - z}, \quad z \in D^-. \quad (7.256)$$

Аналогичным способом из (7.255) после подстановки (7.251) следует представление

$$\frac{\Psi_n(z)}{\alpha(z)} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2 \Phi(z_i) z_i^{2n+1}}{(z_i - z)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{R(z') z'^{2n} \Phi_n(z') dz'}{z' - z}, \quad z \in D^+. \quad (7.257)$$

Эти формулы показывают, что все функции Йоста при всех значениях спектрального параметра определяются только волновыми функциями $\Phi_n(z)$ в области рассеяния и связанными состояниями. Для вывода замкнутой системы уравнений для них положим в $z = z_k^{-1}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) в (7.256) и учтем соотношение $\bar{\Phi}_n(z_k^{-1}) = \Phi_n(z_k)$. Тогда

$$\Phi_n(z_k) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2 \Phi(z_i) z_i^{2n+1}}{(z_i - z_k^{-1})} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{R(z') z'^{2n} \Phi_n(z') dz'}{z' - z_k^{-1}}. \quad (7.258)$$

Поскольку функция $\bar{\Phi}_n(z)$ непрерывна в области $D^- + \Gamma$, то в пределе $z \rightarrow \Gamma$ из (7.256) получаем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_n(z) &= 1 + \sum_{i=1}^N \frac{c_i^2 \Phi(z_i) z_i^{2n+1}}{(z_i - z)} - \frac{1}{2} R(z) z^{2n} \Phi_n(z) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} P \oint_{\Gamma} \frac{R(z') z'^{2n} \Phi_n(z') dz'}{z' - z}, \quad z \in \Gamma. \end{aligned} \quad (7.259)$$

Система сингулярных уравнений (7.258), (7.259) – есть основные уравнения в формулировке метода обратной задачи рассеяния с использованием задачи Римана. Ее решение позволяет при заданной зависимости c_i и $R(z')$ от времени найти функции Йоста в любой момент. Отметим, что функция $\Psi_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$z(\Psi_{n-1}(z) - \Psi_n(z)) + \frac{-\Psi_n(z) + 4a_n^2 \Psi_{n+1}(z)}{z} + 2b_n \Psi_n(z) = 0.$$

После подстановки в него асимптотического разложения

$$\Psi_n(z) \approx \Psi_n(0) + z\Psi'_n(0) + \dots$$

и сокращения сингулярных членов при $z \rightarrow 0$ следует формула для вычисления x_n :

$$x_n = \ln \left[\frac{\Psi_n(z=0)}{\alpha(z=0)} \right]. \quad (7.260)$$

В более общей формулировке описанный подход известен как метод «одевания» [41, 42], позволяющий по заданному частному решению строить решения эволюционных интегрируемых уравнений, включая уравнения с частными производными. Эквивалентность двух формулировок метода обратной задачи рассеяния нетрудно показать при помощи формулы (7.256). Подставляя в нее представление $\bar{\Phi}_n(z)$ и $\Phi_n(z)$ в виде

$$\bar{\Phi}_n(z) = 1 + \sum_{m=n+1}^{\infty} G_{nm} z^{-m+n},$$

$$\Phi_n(z) = 1 + \sum_{m=n+1}^{\infty} G_{nm} z^{m-n}, \quad G_{nm} = e^{\frac{x_n}{2}} K(n, m) = \frac{K(n, m)}{K(n, n)}$$

и приравнявая члены по обратным степеням параметра z , получаем уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко (7.221).

Несомненным преимуществом уравнений (7.258), (7.259) является более простая процедура вывода формул для многосолитонных решений. Приведем необходимый для дальнейшего изложения явный вид функции $\bar{\Phi}_n(z)$ для односолитонного решения. Из (7.258), (7.259) при $N = 1$, $R(z) = 0$ следует, что

$$\bar{\Phi}_n(z) = \frac{(z - z_1) e^{t(z_1 - z_1^{-1})} + z_1^{2n+1} (-1 + z_1 z)}{(z - z_1) \left(e^{t(z_1 - z_1^{-1})} + z_1^{2n+2} \right)}. \quad (7.261)$$

7.3.6. Солитоны – элементарные возбуждения нелинейных интегрируемых систем

Истинный солитон – это нечто существенно большее, чем просто нелинейная волна.

А. Ньюэлл

В параграфе 3.4.2 мы показали, что решение задачи о малых колебаниях системы N взаимодействующих частиц существенно упрощается введением нормальных координат. В этих координатах гамильтониан приобретает диагональный вид и представляет собой сумму не взаимодействующих гармонических осцилля-

торов. В данном параграфе мы докажем, что уравнения решетки Тоды имеют бесконечный набор интегралов движения и любое возмущение в ней есть суперпозиция не взаимодействующих нелинейных волн и солитонов.

Изучим вначале структуру интегралов движения. Величина $Sp(L^n)$, полиномиальная по a_n, b_n , является интегралом движения. Это утверждение следует из матричного уравнения (7.161) и правила перестановки матриц под знаком Sp :

$$\frac{d}{dt} Sp(L^n) = Sp((AL - LA)L^{n-1}) = 0.$$

В интегрируемых моделях связь $Sp(L^n)$ с данными рассеяния дается так называемой формулой «следов», с которой заинтересованный читатель может познакомиться по монографии [38]. Наиболее просто явный вид первых интегралов движения и их выражение в терминах данных рассеяния можно найти следующим образом. Функция $\alpha(z)$ (7.189) не зависит от времени и представляет собой функционал от a_n, b_n . Следовательно, ее коэффициенты при разложении в ряд по степеням z^{-1} или z дают сохраняющиеся величины. Положим $n \rightarrow \infty$ в (7.189) и, используя треугольное представление (7.191), выпишем первые члены разложения $\alpha(z)$:

$$\alpha(z) = K(n, n) + zK(n, n+1) + z^2(K(n, n+2) - K(n, n+1) + K(n, n)) + O(z^3) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (7.262)$$

Функцию $\alpha(z)$ можно выразить в данных рассеяния. Напомним, что она аналитична в области D^+ и имеет в ней конечное число

нулей при $z = z_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), функция $\alpha\left(\frac{1}{z}\right)$ – аналитическая

в области D^- , кроме того, согласно (7.190), на контуре Γ выполняются соотношения

$$\alpha(z) \bar{\alpha}(z) = \alpha(z) \alpha\left(\frac{1}{z}\right) = \alpha(z) \alpha^*(z) = (1 - |R(z)|)^{-1}. \quad (7.263)$$

Покажем вначале, что в области D^+ функция $\alpha(z)$ полностью определяется значениями модуля коэффициента отражения на контуре Γ и дискретным спектром. Функция

$$\alpha_1(z) = \prod_{i=1}^N \frac{z z_i - 1}{z - z_i} \alpha(z) \quad (7.264)$$

также аналитична в области D^+ не имеет в ней нулей. $|\alpha(z)| = |\alpha_1(z)|$ при этом на контуре Γ . Согласно теореме Коши (7.243), (7.244), для функций $\ln \alpha_1(z)$ и $\ln \alpha_1\left(\frac{1}{z}\right)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\ln \alpha_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\ln \alpha_1(z') dz'}{z' - z}, \quad z \in D^+; \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\ln \alpha_1\left(\frac{1}{z'}\right) dz'}{z' - z}, \quad z \in D^+.\end{aligned}$$

Складывая их, получаем выражение

$$\begin{aligned}\ln \alpha_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\ln\left(\alpha_1(z') \alpha_1\left(\frac{1}{z'}\right)\right) dz'}{z' - z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln\left(\alpha_1(e^{ik}) \alpha_1(e^{-ik})\right) dk}{1 - ze^{ik}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln\left(\alpha_1(e^{ik}) \alpha_1(e^{-ik})\right) \left(\frac{1}{1 - ze^{ik}} + \frac{1}{1 - ze^{-ik}}\right) dk, \quad z \in D^+, \quad (7.265)\end{aligned}$$

позволяющее найти функцию $\alpha_1(z)$ в области D^+ через ее значения на границе этой области. Отсюда следует полезная формула

$$\begin{aligned}\ln \alpha(z) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln\left(1 - |R(e^{ik})|^2\right) \left(\frac{1}{1 - ze^{ik}} + \frac{1}{1 - ze^{-ik}}\right) dk + \\ &+ \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{z - z_i}{zz_i - 1}\right), \quad z \in D^+, \quad (7.266)\end{aligned}$$

согласно которой $\alpha(z)$ восстанавливается по коэффициенту отражения и дискретному спектру, т. е. данным рассеяния. Отметим, что разложение $\ln \alpha(z)$, согласно (7.195), (7.262), имеет вид

$$\ln \frac{\alpha(z)}{\alpha(0)} = 1 - Pz - z^2 H + O(z^3). \quad (7.267)$$

Здесь P – полный импульс:

$$P = 2 \sum_n b_n = \sum_n \dot{x}_n, \quad (7.268)$$

и H – гамильтониан системы:

$$H = \sum_n \left((4a_n^2 - 1) + 2b_n^2 \right) = \sum_n \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \exp\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{2}\right) - 1 \right). \quad (7.269)$$

Сравнивая разложение по z в формулах (7.266) с (7.267), получаем

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln\left(1 - |R(e^{ik})|^2\right) \cos k \, dk + \sum_{i=1}^N 2\varepsilon \operatorname{sh} k_i, \quad (7.270)$$

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln\left(1 - |R(e^{ik})|^2\right) \cos 2k \, dk + \sum_{i=1}^N \operatorname{sh} 2k_i, \quad (7.271)$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $k_i > 0$. Эти формулы выражают классические интегралы движения в новых переменных – данных рассеяния. В них гамильтониан системы представляет собой континуальный набор невзаимодействующих нелинейных волн с плотностью $\ln(1 - |R(e^{ik})|^2)$, импульсами $\cos k$, энергией $\cos 2k$, N солитонов с импульсами $2\varepsilon \operatorname{sh} k_i$ и энергией $\operatorname{sh} 2k_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Солитоны не взаимодействуют между собой и с нелинейными волнами. Если нелинейная система допускает такое разделение переменных в гамильтониане, то солитоны в ней – «истинные солитоны» (см. эпиграф). Солитоны, как и нелинейные волны, являются элементарными возбуждениями в нелинейных системах с дисперсией. Закон дисперсии солитонов

$$E = \varepsilon P \sqrt{1 + \frac{P^2}{4}} \quad (7.272)$$

для малых импульсов совпадает с дисперсионным соотношением для длинноволнового фонона, при больших импульсах – с выражением для энергии свободной частицы массой $m = 1$.

7.3.7. Преобразование Дарбу и Бэклунда

Решение задачи Коши, как правило, возможно только для ограниченного класса начальных условий. В общем случае определение аналитической структуры собственных функций даже для простых начальных условий крайне затруднено и удаётся исследовать лишь асимптотическое поведение решений при больших временах. Поэтому широкое применение получили более простые, так называемые *прямые методы* в теории солитонов: *преобразования Дарбу*, *Бэклунда* и *метод Хироты* – одни из чудес солитонной математики. Они не решают задачу Коши для интегрируемых уравнений, но позволяют построить множество частных решений, стартуя с некоторого «затравочного» точного решения.

Преобразование Дарбу существует для всех интегрируемых уравнений и является эффективным методом получения точных решений нелинейных интегрируемых уравнений. В нашем случае оно даёт возможность по известному частному решению (a_n, b_n, Ψ_n) уравнений (7.158), (7.167), (7.168) получить новые решения $(\bar{a}_n, \bar{b}_n, \bar{\Psi}_n)$ этой системы.

Рассмотрим две системы уравнений

$$(L\Psi)_n = a_{n-1}\Psi_{n-1} + a_n\Psi_{n+1} + b_n\Psi_n = \lambda\Psi_n, \\ \frac{d}{dt}\Psi_n = (A\Psi)_n = a_{n-1}\Psi_{n+1} - a_n\Psi_{n-1}; \quad (7.273)$$

$$(\bar{L}\bar{\Psi})_n = \bar{a}_{n-1}\bar{\Psi}_{n-1} + \bar{a}_n\bar{\Psi}_{n+1} + \bar{b}_n\bar{\Psi}_n = \lambda\bar{\Psi}_n, \\ \frac{d}{dt}\bar{\Psi}_n = (\bar{A}\bar{\Psi})_n = \bar{a}_{n-1}\bar{\Psi}_{n-1} - \bar{a}_n\bar{\Psi}_{n+1}. \quad (7.274)$$

Здесь величины $\bar{a}_n, a_n, \bar{b}_n, b_n$ есть различные решения уравнений решетки Тоды

$$\dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}), \quad \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2); \quad (7.275)$$

$$\dot{\bar{a}}_n = \bar{a}_n(\bar{b}_n - \bar{b}_{n+1}), \quad \dot{\bar{b}}_n = 2(\bar{a}_{n-1}^2 - \bar{a}_n^2). \quad (7.276)$$

При преобразованиях Дарбу волновые функции Ψ и $\bar{\Psi}$ связаны линейным преобразованием

$$\bar{\Psi} = D\Psi, \quad (7.277)$$

где матрица D зависит в общем случае от $\bar{a}_n, a_n, \bar{b}_n, b_n$ и спектрального параметра λ . Определяющие ее уравнения

$$\bar{L}D = DL; \quad (7.278)$$

$$\frac{dD}{dt} = -DA + \bar{A}D \quad (7.279)$$

сразу следуют после подстановки (7.277) в (7.274). Дифференцирование выражения (7.278) и дальнейшее исключение из него $\frac{dD}{dt}$ даёт условие совместности

$$\left(\frac{d\bar{L}}{dt} + [\bar{L}, \bar{A}]\right)D = D\left(\frac{dL}{dt} + [L, A]\right)$$

уравнений (7.278), (7.279). Оно выполняется, если величины $\bar{a}_n, a_n, \bar{b}_n, b_n$ удовлетворяют уравнениям (7.275), (7.276).

Построим простейшие преобразования Дарбу для системы (7.273)–(7.277). Положим

$$\bar{\Psi}_n = T_n\Psi_n + B_n\Psi_{n+1}. \quad (7.280)$$

Тогда, согласно (7.273), (7.274), не зависящие от спектрального параметра неопределённые коэффициенты T_n, B_n подчиняются системе уравнений. Одно из них имеет вид

$$\frac{T_{n-1}B_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{T_nB_n}{a_n}. \quad (7.281)$$

Следовательно, величина $\frac{T_nB_n}{a_n}$ не зависит от n и, так как $\bar{\Psi}_n$

определена с точностью до множителя, то положим $T_nB_n = a_n$ при $T_n \neq 0$. В итоге оставшаяся система уравнений записывается в виде

$$\bar{a}_n = a_{n+1} \frac{B_n}{B_{n+1}}, \\ \bar{b}_n = b_n + B_n^2 - B_{n-1}^2; \quad (7.282)$$

$$\begin{aligned}\dot{B}_n &= B_n \left(-B_{n-1}^2 + B_n^2 + \frac{\dot{a}_n}{a_n} \right), \\ -B_{n-1}^2 - \frac{a_n^2}{B_n^2} + b_n &= \alpha\end{aligned}\quad (7.283)$$

с произвольной постоянной α . Последнее уравнение следует из соотношения

$$-B_{n-1}^2 - \frac{a_n^2}{B_n^2} + b_n = -B_n^2 - \frac{a_{n+1}^2}{B_{n+1}^2} + b_{n+1}.$$

Эти формулы и определяют преобразование Дарбу, которое отображает класс решений уравнений решетки Тоды в себя. При известном решении a_n, b_n с помощью (7.283) находятся величины B_n , которые, согласно (7.282), определяют новое решение $\bar{a}_n, \bar{b}_n$. Это преобразование Дарбу называется далее A -преобразованием.

Для иллюстрации их эффективности положим

$$a_n = \frac{1}{2}, \quad b_n = 0$$

для всех n . Тогда после замены $B_n^2 = G_n$ система (7.283) преобразуется к виду

$$\dot{G}_n = \frac{1}{2} (1 + 4\alpha G_n + 4G_n^2); \quad (7.284)$$

$$\frac{1}{4G_n} - G_{n-1} = \alpha. \quad (7.285)$$

Решая первое уравнение, получим

$$G_n = \frac{1}{2} \left(-\alpha + \sqrt{1 - \alpha^2} \operatorname{tg} \left[\sqrt{1 - \alpha^2} (t + 4C_n) \right] \right) \quad (7.286)$$

с постоянными C_n . Для построения солитонного решения необходимо положить $\alpha > 1$ и выбрать следующую параметризацию: $\alpha = \operatorname{ch} \kappa$. Тогда

$$G_n = \frac{1}{2} (-\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{sh} \kappa \operatorname{th} [\operatorname{sh} \kappa (t + 4C_n)]),$$

и уравнение (7.285) дает зависимость постоянных C_n от n :

$$C_n = C_{n-1} - \frac{\kappa}{4 \operatorname{sh} \kappa},$$

откуда

$$C_n = -n \frac{\kappa}{4 \operatorname{sh} \kappa} - \frac{t_0}{4}.$$

Получим окончательную формулу

$$\bar{a}_n = \frac{1}{2} \exp \left(\frac{\bar{x}_n - \bar{x}_{n+1}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \kappa^2}{\operatorname{ch} (n\kappa - (t - t_0) \operatorname{sh} \kappa)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\bar{b}_n = \frac{\dot{\bar{x}}_n}{2} = \frac{\operatorname{sh} \kappa}{2} \left[\operatorname{th} (\kappa(n-1) - (t - t_0) \operatorname{sh} \kappa) + \operatorname{th} (\kappa n - (t - t_0) \operatorname{sh} \kappa) \right], \quad (7.287)$$

зависящую от двух произвольных постоянных t_0, κ и совпадающую с односолитонным решением (7.237). Применение указанной процедуры с новым параметром α' к этому решению приводит к двухсолитонному решению и т. д. В итоге на шаге N мы получим N -солитонное решение, зависящее от $2N$ -произвольных постоянных.

Уравнения типа (7.283) линеаризуются после замены зависимой переменной отношением двух функций, различающихся индексом n . Нетрудно проверить, что после подстановки

$$B_n^2 = -\frac{\Psi_n}{2\Psi_{n+1}} \exp \frac{1}{2} (x_n - x_{n+1}) \quad (7.288)$$

система (7.283) приводится к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}a_{n-1} \Psi_{n-1} + a_n \Psi_{n+1} + b_n \Psi_n &= \alpha \Psi_n, \\ d/dt \Psi_n &= a_{n-1} \Psi_{n-1} - a_n \Psi_{n+1} + C \Psi_n,\end{aligned} \quad (7.289)$$

которая совпадает с уравнениями L - A -пары (7.267)–(7.268) при фиксированном значении спектрального параметра $\lambda = \alpha$. Ее решение, согласно (7.282), определяет новое решение

$$\bar{x}_n = \ln \left[\frac{\Psi_n}{\Psi_{n+1}} \right] + \frac{1}{2} (x_n + x_{n+1}). \quad (7.290)$$

Как показывают непосредственные вычисления, преобразование (7.280) при $T_n = 0$ принимает вид

$$\bar{a}_n = a_{n+1}, \quad \bar{b}_n = b_{n+1}, \quad \bar{\Psi}_n = \Psi_{n+1}. \quad (7.291)$$

Оно следует из дискретной трансляционной симметрии L - A -пары и уравнений движения частиц в решетке Тоды. Это простое, но важное для дальнейшего преобразование назовем B -преобразованием Дарбу.

Преобразование Бэклунда также позволяет получить сложные решения из более простых. Мы получим его из A -преобразования Дарбу, полагая

$$B_n = \exp[Q_n]. \quad (7.292)$$

Тогда из первого уравнения (7.282) следует, что

$$Q_n = \frac{1}{2}[\bar{x}_n - x_{n+1} - C]. \quad (7.293)$$

Величина Q_n определена с точностью до несущественной постоянной C . Мы выберем $C = \ln(2)$ из соображений удобства. После подстановки (7.292), (7.293) в (7.282), (7.283) получим набор дифференциальных соотношений

$$V_1 \equiv -\dot{x}_n + \exp[-x_n + \bar{x}_{n-1}] + \exp[x_n - \bar{x}_n] + 2\alpha = 0; \quad (7.294)$$

$$V_2 \equiv -\dot{\bar{x}}_n + \exp[x_n - \bar{x}_n] + \exp[-x_{n+1} + \bar{x}_n] + 2\alpha = 0. \quad (7.295)$$

По установившейся терминологии для динамических систем с бесконечным числом степеней свободы соотношения типа

$$R_1(T_n(t), U_n(t), \dot{T}_n(t), \dot{U}_n(t), \alpha) = 0;$$

$$R_2(T_n(t), U_n(t), \dot{T}_n(t), \dot{U}_n(t), \alpha) = 0,$$

включающие функции T_n , U_n и их производные по времени, из которых следует, что если величины $T_n(t)$ удовлетворяют нелинейному уравнению

$$E_1(T_n) = 0.$$

то и переменные $U(t)$ также удовлетворяют в общем случае другому нелинейному уравнению

$$E_2(U_n) = 0,$$

называются *бэклунд-преобразованием (ПБ) нелинейных уравнений*. Прямыми вычислениями нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_1 = E(x_n) &\equiv \ddot{x}_n - \exp[x_n - x_{n+1}] - \exp[x_{n-1} - x_n] = 0, \\ \frac{d}{dt} V_2 = E(\bar{x}_n) &\equiv \ddot{\bar{x}}_n - \exp[x_n - \bar{x}_{n+1}] - \exp[\bar{x}_{n-1} - \bar{x}_n] = 0. \end{aligned}$$

Так как x_n и $\bar{x}_n$ удовлетворяет одному и тому же уравнению, то такое однозначное отображение решений называется *автопреобразованием Бэклунда*. Такие преобразования являются нетривиальным обобщением канонических преобразований в классической механике. При заданном затравочном решении x_n ПБ сводят задачу о нахождении нового решения к решению системы (7.294), (7.295).

В нашем изложении ПБ были получены с помощью L - A -пары. Исторически для многих интегрируемых уравнений вначале были найдены преобразования Бэклунда, а затем исследована обратная задача рассеяния.

7.3.8. «Размножение интегрируемых уравнений», модифицированные решетки Тоды

Если вам непонятно какое-то слово в техническом тексте, не обращайтесь на него внимания. Текст полностью сохраняет смысл и без него.

*Закон Купера в книге Л. Питера
«Принцип Питера»*

В этом параграфе на примере цепочки Тоды описана процедура «размножения» интегрируемых уравнений, которая позволяет по известной паре Лакса интегрируемого уравнения последовательно получать другое «модифицированное» интегрируемое уравнение и его L - A -пару. Такая схема является дискретным вариантом метода «размножения» [45–48] нелинейных эволюционных уравнений в частных производных в пространстве – времени размерности $1 + 1$ и $2 + 1$. Ключевую роль в построении новых уравнений и ассоциированных с ними L - A -пар играют преобразования Дарбу и Бэклунда.

Рассмотрим вначале преобразование Бэклунд и покажем, как с его помощью можно получить новое интегрируемое урав-

нение. Обозначим «затравочное» решение x_n как $x_n^{(1)}$, а решения, полученные из него последовательным преобразованием Бэклунда с параметрами $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots$, как $x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \dots$. Рассмотрим несколько первых ПБ:

$$-\dot{x}_n^{(1)} + \exp[-x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}] + \exp[x_n^{(1)} - x_n^{(2)}] + 2\alpha^{(1)} = 0; \quad (7.296)$$

$$-\dot{x}_n^{(2)} + \exp[x_n^{(1)} - x_n^{(2)}] + \exp[-x_{n+1}^{(1)} + x_n^{(2)}] + 2\alpha^{(1)} = 0; \quad (7.297)$$

$$-\dot{x}_n^{(2)} + \exp[-x_n^{(2)} + x_{n-1}^{(3)}] + \exp[x_n^{(2)} - x_n^{(3)}] + 2\alpha^{(2)} = 0; \quad (7.298)$$

$$-\dot{x}_n^{(3)} + \exp[x_n^{(2)} - x_n^{(3)}] + \exp[-x_{n+1}^{(2)} + x_n^{(3)}] + 2\alpha^{(2)} = 0, \quad (7.299)$$

связывающих решения уравнений решетки Тоды

$$\ddot{x}_n^{(i)} = -\exp[x_n^{(i)} - x_{n+1}^{(i)}] + \exp[x_{n-1}^{(i)} - x_n^{(i)}], \quad i = 1, 2, \dots \quad (7.300)$$

Тогда из (7.296), (7.297) сразу следует соотношение

$$\exp[Z_{n-1}^{(1)}] - \exp[Z_n^{(1)}] - \dot{x}_n^{(1)} + \dot{x}_{n+1}^{(1)} + \dot{Z}_n^{(1)} = 0 \quad (7.301)$$

для величины

$$Z_n^{(1)} = x_n^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}. \quad (7.302)$$

Это соотношение принимает вид простейшего конечно-разностного уравнения после записи $Z_n^{(1)}$ в виде

$$Z_n^{(1)} = r_n - r_{n+1}. \quad (7.303)$$

Тогда

$$\dot{r}_n = -\exp[r_{n-1} - r_n] + \dot{x}_n^{(1)} + C, \quad (7.304)$$

и оставшееся уравнение из системы (7.296), (7.297) имеет вид

$$-\exp[r_{n-1} - r_n] - \exp[r_{n+1} - r_n + x_n - x_{n+1}^{(1)}] + \dot{x}_n^{(1)} - 2\alpha^{(1)} = 0. \quad (7.305)$$

Произвольную постоянную C в (7.304) мы полагаем далее равной нулю, так как она «обнуляется» после преобразования Галилея: $r_n^{(1)} \rightarrow r_n^{(1)} + Ct$. Нетрудно убедиться, что условием совместности уравнений (7.304) и (7.305) с произвольным параметром $\alpha^{(1)}$ является (7.300). Напомним, что условия совместности для систем типа (7.304), (7.305) проверяются следующим образом. В уравнение, полученное дифференцированием (7.305) по вре-

мени, необходимо подставить выражения $\dot{r}_n, \dot{r}_{n+1}, \dot{r}_{n-1}$ из (7.304) и учесть связи между r_{n+1} и r_{n-1} , r_n согласно (7.305). Условия совместности выполняются, если в полученном соотношении условие равенства нулю всех коэффициентов по $\alpha^{(1)}$, эквивалентно (7.300). Поэтому (7.304) и (7.305), записанные в переменных

$$G_n^{(1)} = \exp[r_n],$$

представляют собой L - A -пару для уравнений решетки Тоды, т. е. систему переопределенных уравнений (для вспомогательных $G_n^{(1)}$), условие совместности которой соблюдается, если величины $x_n^{(1)}$ подчиняются уравнениям (7.300) ($i = 1$).

Для нелинейных уравнений отсутствует принцип суперпозиции и сумма двух частных решений нелинейного уравнения не является его решением. Тем не менее указанные выше формулы дают возможность получить новые интегрируемые уравнения для некоторых линейных комбинаций частных решений, *связанных ПБ*. Так как

$$x_n^{(2)} - x_{n+1}^{(1)} = r_n - r_{n+1}, \quad (7.306)$$

то динамика $x_n^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}$ определяется уравнением для функции $r_n^{(1)}$. Подставим функции $x_n^{(1)}$ и $x_n^{(1)} - x_{n+1}^{(1)}$:

$$\dot{x}_n^{(1)} = \dot{r}_n + \exp[r_{n-1} - r_n],$$

$$x_n^{(1)} - x_{n+1}^{(1)} = \ln(\exp(r_n - r_{n+1})(-2\alpha^{(1)} + \dot{r}_n)), \quad (7.307)$$

выраженные из (7.304), (7.305) в терминах r_n и ее производных, в (7.300) ($i = 1$). В итоге получим новое нелинейное уравнение с параметром $\alpha^{(1)}$

$$\ddot{r}_n = (-\exp[r_{n-1} - r_n] + \exp[r_n - r_{n+1}])(2\alpha^{(1)} - \dot{r}_n) \quad (7.308)$$

в терминах r_n или

$$\dot{A}_n^{(1)} = A_n^{(1)}(B_n^{(1)} - B_{n+1}^{(1)}),$$

$$\dot{B}_n^{(1)} = 4[A_n^{(1)2} - A_{n-1}^{(1)2}](\alpha^{(1)} - B_n^{(1)}) \quad (7.309)$$

в терминах

$$A_n^{(1)} = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{r_n - r_{n+1}}{2}\right), \quad B_n^{(1)} = \frac{\dot{r}_n}{2}. \quad (7.310)$$

Описанную схему можно продолжить далее. Выражения (7.298), (7.299) дают следующее преобразование Бэклунда. После подстановки в них (7.306) и $x_n^{(3)} = T_n^{(1)} + x_{n+1}^{(1)}$ уравнения для $T_n^{(1)}$ принимают простой вид в переменных R_n : $T_n^{(1)} = R_n - R_{n+1}$. Тогда

$$x_n^{(1)} = R_n - R_{n+1} + x_{n+1}^{(1)}$$

и (7.298), (7.299) редуцируются к виду

$$\dot{R}_n = 2(\alpha^{(2)} + 2(-1 + \exp[-R_n + R_{n+1}]B_n^{(1)})); \quad (7.311)$$

$$-\exp[-R_n + R_{n-1}]\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + 2(-1 + \exp[-R_n + R_{n+1}]A_n^{(1)2}) + \\ + (-1 + \exp[-R_n + R_{n-1}])B_n^{(1)} = 0. \quad (7.312)$$

Проверка условия совместности этой системы с произвольным параметром $\alpha^{(2)}$ показывает, что она есть L - A -пара для уравнений (7.309). В итоге мы получили *новое интегрируемое уравнение* (7.308) и *ассоциированную с ним L - A -пару*.

Для «размножения» уравнений (7.309) подставим в них выражения $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}$

$$A_n^{(1)2} = \frac{(2\alpha^{(2)} - \dot{R}_n)}{4(1 - \exp[-R_n + R_{n+1}])}, \\ B_n^{(1)} = \frac{-2\alpha^{(1)} \exp[-R_n + R_{n-1}] + \dot{R}_n}{2(-1 + \exp[-R_n + R_{n-1}])}, \quad (7.313)$$

найденные из (7.311), (7.312). В результате получаем уравнение для функций R_n :

$$\ddot{R}_n = \frac{(1 - \exp[R_{n-1} - 2R_n + R_{n+1}]) (2\alpha^{(1)} - \dot{R}_n) (-2\alpha^{(2)} + \dot{R}_n)}{(-1 + \exp[R_{n-1} - R_n]) (1 - \exp[R_{n+1} - R_n])}. \quad (7.314)$$

Изложим далее другой способ «размножения» интегрируемых уравнений, не связанный с составлением линейных комбинаций частных решений нелинейных уравнений. Для согласования с формулами обратной задачи рассеяния положим в формулах (7.289) постоянную $C = \frac{z - z^{-1}}{2}$ и $\alpha = \lambda = \frac{z + z^{-1}}{2}$, где z — неко-

торый фиксированный параметр. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, преобразование Дарбу дает возможность при известном решении x_n найти Ψ_n с помощью уравнений (7.289) и получить новое решение $\bar{x}_n$ чисто алгебраическим путем. Рассмотрим теперь другую задачу. Пусть величины a_n, b_n удовлетворяют выражениям (7.275). Найдем уравнения для вспомогательных функций Ψ_n . Для этого необходимо выразить величины a_n, b_n через функцию Ψ_n и ее производную. Наиболее просто это можно сделать при помощи вспомогательной функции $F_n(t)$:

$$\Psi_n = e^{\frac{t(-z+z^{-1})}{2}} e^{-\frac{x_n}{2}} F_n(t), \quad (7.315)$$

с помощью которой из (7.289) следуют уравнения для

$$F_{n-1} + 4a_n^2 F_{n+1} - 2(\lambda - b_n)F_n = 0; \quad (7.316)$$

$$2\dot{F}_n - 2b_n F_n + 4a_n^2 F_{n+1} - F_{n-1} = 0. \quad (7.317)$$

Тогда A -преобразование Дарбу принимает вид

$$\bar{a}_n = a_{n+1} \frac{F_n F_{n+2}}{F_{n+1}^2}, \\ \bar{b}_n = b_n + \frac{F_{n-1}}{2F_n} - \frac{F_n}{2F_{n+1}} \quad (7.318)$$

и B -преобразование

$$\bar{a}_n = a_{n+1}, \quad \bar{b}_n = b_{n+1}, \quad \bar{F}_n = F_{n+1} \quad (7.319)$$

для уравнений (3.275), (7.316), (7.317), где $\lambda = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Найдем уравнения для функций F_n . Из (7.316), (7.317) нетрудно получить явное выражение для a_n, b_n :

$$a_n^2 = \frac{\lambda F_n - \dot{F}_n}{4F_{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2}\lambda + \frac{\dot{F}_n - F_{n-1}}{2F_n} \quad (7.320)$$

в терминах введенных собственных функций. После подстановки этих соотношений в (7.275) мы приходим к новому уравнению

$$(-\ddot{F}_n F_n + \dot{F}_n^2) F_{n+1} + (F_n^2 - F_{n-1} F_{n+1})(\dot{F}_n - \lambda F_n) = 0 \quad (7.321)$$

с параметром $\lambda = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ для функции $F_n(t)$. Поскольку L - A -пара представляется линейными однородными уравнениями, то и полученное выражение однородно относительно величин $F_n(t)$ и их производных. В переменных

$$F_n = \exp[r_n], \quad A_n = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{r_n - r_{n+1}}{2}\right), \quad B_n = \frac{\dot{r}_n}{2}$$

оно принимает компактный вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}_n &= A_n(B_n - B_{n+1}), \\ \dot{B}_n &= (A_{n-1}^2 - A_n^2)(2\lambda - 4B_n). \end{aligned} \quad (7.322)$$

Найдем L - A -пару для системы (7.322). Для следующего преобразования Дарбу $\bar{a}_n \rightarrow \bar{a}_n$, $\bar{b}_n \rightarrow \bar{b}_n$ будут справедливы формулы (7.297), (7.298) с заменой в них $a_n \rightarrow \bar{a}_n$, $b_n \rightarrow \bar{b}_n$, $F_n \rightarrow \bar{F}_n$ и параметра преобразования λ на новый параметр $\lambda^{(1)}$. Поэтому

$$\bar{a}_n^2 = \frac{\lambda^{(1)} \bar{F}_n - \dot{\bar{F}}_n}{4\bar{F}_{n+1}}, \quad \bar{b}_n = \frac{1}{2} \lambda^{(1)} + \frac{\dot{\bar{F}}_n - \bar{F}_{n-1}}{2\bar{F}_n}, \quad (7.323)$$

и после подстановки этих выражений в (7.276) мы получаем нелинейное уравнение для $\bar{F}_n$:

$$(-\ddot{\bar{F}}_n \bar{F}_n + \dot{\bar{F}}_n^2) \bar{F}_{n+1} + (\bar{F}_n^2 - \bar{F}_{n-1} \bar{F}_{n+1})(\dot{\bar{F}}_n - \lambda^{(1)} \bar{F}_n) = 0. \quad (7.324)$$

Из формул (7.318)–(7.320), (7.323) следует набор соотношений между величинами F_n , $\bar{F}_n$ и их производными для A -преобразования Дарбу:

$$\frac{F_n(\lambda F_{n+1} - \dot{F}_{n+1})}{F_{n+1}^2} - \frac{\lambda^{(1)} \bar{F}_n - \dot{\bar{F}}_n}{\bar{F}_{n+1}} = 0, \quad (7.325)$$

$$-\lambda + \lambda^{(1)} + \frac{F_n}{F_{n+1}} - \frac{\dot{F}_n}{F_n} - \frac{\bar{F}_{n-1}}{\bar{F}_n} + \frac{\dot{\bar{F}}_n}{\bar{F}_n} = 0$$

и

$$\frac{\lambda F_n - \dot{F}_n}{F_{n+1}} - \frac{\lambda^{(1)} \bar{F}_{n-1} - \dot{\bar{F}}_{n-1}}{\bar{F}_n} = 0, \quad (7.326)$$

$$(\lambda - \lambda^{(1)}) + \frac{\dot{F}_n - F_{n-1}}{F_n} - \frac{\dot{\bar{F}}_{n-1} - \bar{F}_{n-2}}{\bar{F}_{n-1}} = 0$$

для B -преобразования. Прямые вычисления показывают, что как (7.325), так и (7.326) являются преобразованиями Бэклунда между уравнениями (7.321) и (7.324). Кроме того, последовательность, например, A -преобразований записывается в виде цепочки уравнений

$$\frac{F_n^{(i)}(\lambda^{(i)} F_{n+1}^{(i)} - \dot{F}_{n+1}^{(i)})}{(F_{n+1}^{(i)})^2} - \frac{\lambda^{(i+1)} F_n^{(i+1)} - \dot{F}_n^{(i+1)}}{F_{n+1}^{(i+1)}} = 0,$$

$$-\lambda^{(i)} + \lambda^{(i+1)} + \frac{F_n^{(i)}}{F_{n+1}^{(i)}} - \frac{\dot{F}_n^{(i)}}{F_n^{(i)}} - \frac{F_{n-1}^{(i+1)}}{F_n^{(i+1)}} + \frac{\dot{F}_n^{(i+1)}}{F_n^{(i+1)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $\lambda^{(0)} = \lambda$, $F_n^{(0)} = F_n$, $F_n^{(1)} = \bar{F}_n$ и т. д. Решения таких цепочек, названных «одевающими» [44], позволяют по формулам

$$(a_n^{(i)})^2 = \frac{\lambda^{(i)} F_n^{(i)} - \dot{F}_n^{(i)}}{4F_{n+1}^{(i)}}, \quad b_n^{(i)} = \frac{1}{2} \lambda^{(i)} + \frac{\dot{F}_n^{(i)} - F_{n-1}^{(i)}}{2F_n^{(i)}}$$

найти новые решения решетки Тоды. Отметим, что «одевающие цепочки» для интегрируемых систем допускают периодическое замыкание по дискретному индексу i и приводят к нетривиальным интегрируемым уравнениям [44].

Приступим, наконец, к изложению процедуры размножения интегрируемых уравнений на примере B -преобразований Дарбу. Для построения L - A -пары, ассоциированной с уравнением (7.321), наиболее удобно использовать соотношения (7.326). Для этого необходимо найти замену переменных $\{F_n, \bar{F}_n\} \rightarrow \{F_n, V_n\}$, $(-\infty < n < \infty)$, при которой эти соотношения редуцируются к

L – A -паре в пространстве новой вспомогательной переменной V_n . Такую замену можно провести многими способами. Однако для продолжения процедуры «размножения» преобразования Бэклунда (7.326) должны быть приведены к виду, при котором функции A_n и B_n могут быть выражены через величину V_n и ее производные. Из вида (7.326) ясно, что при таком преобразовании в одном из выражений нужно уничтожить слагаемое с $\bar{F}_n$, и это требование приводит к замене

$$\bar{F}_{n-1} = F_n V_n. \quad (7.327)$$

Тогда L – A -пара для уравнения (7.302) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \frac{F_{n-1}}{F_n} (V_{n-1} - V_n) + \left(\lambda - \lambda^{(1)} \right) V_n = \\ &= 4A_{n-1}^2 (V_{n-1} - V_n) + (\lambda - \lambda^{(1)}) V_n; \end{aligned} \quad (7.328)$$

$$\begin{aligned} &\frac{F_{n-1}(V_{n-1} - V_n) + V_n(\lambda F_n - \dot{F}_n)}{2F_n} + \frac{1}{2} \left(\lambda - \frac{\dot{F}_n}{F_n} \right) V_{n+1} = \\ &= 2A_{n-1}^2 (V_{n-1} - V_n) + \left(B_n + \frac{\lambda}{2} \right) (V_n - V_{n+1}) = \lambda^{(1)} V_n. \end{aligned} \quad (7.329)$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, условие совместности (7.328) и (7.329) с произвольным параметром $\lambda^{(1)} = \frac{1}{2} z' + \frac{1}{2z'}$ эквивалентно уравнению (7.321).

Таким образом, последовательность преобразований от исходной системы уравнений к новой состоит из следующих шагов. На первом шаге с помощью L – A мы находим представление переменных $\{a_n, b_n\}$ в терминах вспомогательных величин F_n , их производных и спектрального параметра z . В интегрируемых уравнениях с частными производными такое представление известно как преобразование *Миуры*. Тогда из системы дифференциальных уравнений для $\{a_n, b_n\}$ получаем новое нелинейное уравнение для величины F_n с параметром z . Согласно терминологии, интегрируемые уравнения, полученные преобразованием Миуры, называются модифицированными. Поэтому (7.321) есть

первое модифицированное уравнение Тоды. На втором шаге, используя преобразования Дарбу L – A -пары, находим две системы уравнений для F_n и F'_n , которые являются преобразованиями Бэклунда полученного выражения с параметрами z и z' . Наконец, на третьем шаге, требующем определенной изобретательности, подходящей заменой переменной мы получаем L – A -пару нового уравнения со спектральным параметром z' . Если эту схему удастся выполнить для исходного уравнения, то далее она может быть продолжена для вывода следующего интегрируемого уравнения. Так в рассматриваемом нами случае из (7.328) и (7.329) можно выразить A_n и B_n через V_n и ее производную и после подстановки данных формул в (7.322) получить нелинейное дифференциальное уравнение для переменной V_n – второе модифицированное уравнение Тоды. Применяя далее преобразование Дарбу

$$\bar{A}_n = A_{n+1}, \quad \bar{B}_n = B_{n+1}, \quad \bar{V}_n = V_{n+1}$$

для этого уравнения можно найти преобразования Бэклунда и представить L – A -пару. Опуская громоздкие уравнения для последней, выпишем второе модифицированное уравнение Тоды в переменных $V_n = \exp[W_n]$:

$$\ddot{W}_n = \frac{(1 - \exp[W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}]) \left[(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)})^2 - \dot{W}_n^2 \right]}{(-1 + \exp[W_{n-1} - W_n])(1 - \exp[W_{n+1} - W_n])}. \quad (3.330)$$

В заключение этого параграфа обсудим кратко односолитонные решения уравнения (7.321). Отметим, что из-за присутствия слагаемого, линейного по $\dot{F}_n$, это выражение является формально диссипативной системой. Солитону (7.236) в решетке Тоды, согласно (7.261), (7.315), соответствует решение

$$F_n = e^{\frac{t(z-z^{-1})}{2}} \frac{z^{-n} (e^{t\Omega} (z - z_1) + z_1^{1+2n} (-1 + z z_1))}{(z - z_1) (e^{t\Omega} + z_1^{2+2n})} \quad (7.331)$$

с параметрами

$$z_1 = \varepsilon e^{-\kappa} \quad (\varepsilon = \pm 1, \kappa > 0), \quad \Omega = z_1 - z_1^{-1}. \quad (7.332)$$

Здесь z – параметр уравнения (7.321), z_1 – параметр решения. В общем случае (7.331) для вещественных значений параметра z из-за присутствия множителя z^{-n} расходитсся при $n \rightarrow \infty$ или $n \rightarrow -\infty$ и имеет смысл только для комплексных переменных F_n либо при $|z| = 1$. Поэтому для вещественных значений F_n решение ограничено только при $z = 1$ и $z = 1/z_1$. Последнему значению отвечает волновая функция $\bar{\Phi}_n(z = z_1)$ (7.261) связанного состояния. Тогда, полагая $z = 1/z_1 = e^{-\kappa}$ ($\kappa > 0$) в (7.331), получаем решение уравнения (7.321) в виде уединенной волны:

$$F_n = \frac{1}{2} \frac{e^\kappa}{\text{ch}(\kappa(n+1) - t \text{sh} \kappa)}. \quad (7.333)$$

При $z = 1$ в (7.331) также отсутствует расходящийся множитель и

$$F_n = 1 - \frac{1 + e^\kappa}{1 + \exp[(2\kappa(n+1) - 2t \text{sh} \kappa)]}$$

снова представляет собой уединенную волну. Диссипативная структура уравнения (7.321) проявляется при его преобразованиях

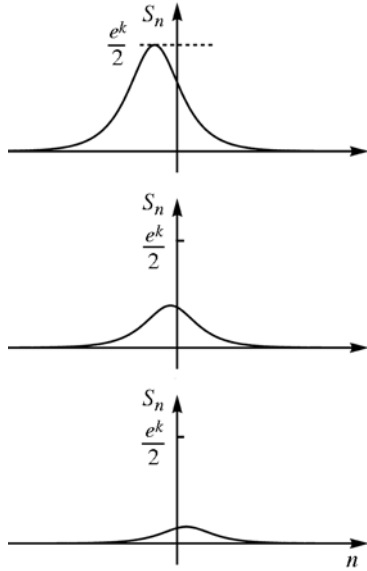


Рис. 7.14

$$F_n = e^{\frac{t(z+z^{-1})}{2}} S_n = e^{\frac{t(z+z^{-1})}{2}} e^{u_n}, \quad (7.334)$$

в уравнения без параметров

$$\begin{aligned} & -\ddot{S}_n S_n S_{n+1} + \dot{S}_n^2 S_{n+1} + \\ & + \dot{S}_n (S_n^2 - S_{n-1} S_{n+1}) = 0, \\ & \ddot{u}_n + \dot{u}_n (e^{u_n - u_{n+1}} - e^{u_{n-1} - u_n}) = 0. \end{aligned} \quad (7.335)$$

Тогда (7.333) соответствует диссипативный солитон

$$S_n = \frac{e^{\kappa - t \text{ch} \kappa}}{2 \text{ch}[\kappa(n+1) - t \text{sh} \kappa]}. \quad (7.336)$$

Его вид при $t = 0$ и последующих моментах изображен на рис. 7.14.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 203 с.
2. Голдстейн Г. Классическая механика: Пер. с англ. Изд. 2-е. М.: Наука, 1975. 408 с.
3. Мах Э. Механика. Ижевск: Изд-во журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 456 с.
4. Розенбергер Ф. История физики. Т. 1. М.; Л.: ОНТИ; Гостехиздат, 1934. 148 с.
5. Розенбергер Ф. История физики. Т. 2. М.; Л.: ОНТИ; Гостехиздат, 1934. 342 с.
6. Тарнас Р. История (страсть) западного мышления. М.: Крон-Пресс, 1995. 448 с.
7. Антисери Д., Реале Дж. Западная философия от истоков до наших дней. Кн. 1. Античность. Уфа: ТОО ТК «Петрополис», 1994. 319 с.
8. Антисери Д., Реале Дж. Западная философия от истоков до наших дней. Кн. 2. Средневековье. СПб.: Пневма, 2002. 848 с.
9. Антисери Д., Реале Дж. Западная философия от истоков до наших дней. Кн. 3. От Возрождения до Канта. СПб.: Пневма, 2002. 864 с.
10. Роджерс Э. Физика для любознательных. Наука о Земле и Вселенной. Молекулы и энергия. М.: Мир, 1970. 651 с.
11. Спасский Б.И. История физики. Ч. 1. М.: Высш. шк., 1977. 320 с.
12. Лагранж Ж.Л. Аналитическая механика. Т. I: Пер. с фр. М.: Гостехиздат, 1950. 598 с.
13. Keynes J.M. Newton the man // Newton Tercentenary Celebrations of The Royal Society of London. Cambridge, 1947. P. 18–28.
14. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Под ред. Л.С. Полака. М.: Наука, 1984. 686 с.
15. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
16. Ланцош К. Вариационные принципы механики: Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 408 с.
17. Полак Л.С. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1960. 599 с.
18. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 431 с.
19. Филиппов А.Т. Многоликий солитон. М.: Наука, 1986. 222 с.
20. Папалекси Н.Д. Развитие учения о нелинейных колебаниях и их применении // ДАН. Сер. физ., 1945. Т. 9, № 3. С. 145–160.
21. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. Изд. 3-е. М.: Наука, 1981. 568 с.
22. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 503 с.
23. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

24. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов. Т. II. Нелинейная механика / Под ред. Ю.А. Митропольского и А.Д. Суханова. М.: Наука, 1932–1940. 828 с. (Классики науки).
25. Найфэ А. Введение в теорию возмущений: Пер. с англ. М.: Мир, 1965. 535 с.
26. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
27. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1985. Т. 3. С. 3–160.
28. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 237 с.
29. Ковалевская С.В. Воспоминания. Повести. М.; Л.: Наука, 1974. 300 с.
30. Ковалевская С.В. Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки // Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 195–210.
31. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1950. 268 с.
32. Движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С.В. Ковалевской / Под ред. С.А. Чаплыгина, Н.И. Мерцалова. М.; Л.: АН СССР, 1940. 189 с.
33. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
34. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Наука, 1939. 717 с.
35. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 359 с.
36. Tabor M. Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An introduction. N. Y., 1989. 384 p.
37. Ramani A., Grammaticos B., Boutis T. // Phys. Rep., 1983. No. 3. P. 180.
38. Toda M. Теория нелинейных решеток: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 361 с.
39. Арнольд В.И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989. 96 с.
40. Weiss J. // J. Math. Phys., 1983. V. 24. P. 1405.
41. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. // J. Math. Phys., 1983. V. 24. P. 522.
42. Захаров В.Е., Шабат А.Б. // Функц. анализ и его прилож., 1974. Т. 8, № 3. С. 43.
43. Захаров В.Е., Шабат А.Б. // Функц. анализ и его прилож., 1979. Т. 13, № 3. С. 13.
44. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
45. Борисов А.Б., Зыков С.А. // ТМФ, 1998. Т. 116. С. 119.
46. Юров А.В. // ТМФ, 1999. Т. 119. С. 419.
47. Borisov A.B., Pavlov M.P. // Phys. D, 2001. No. 152, 153. P. 104.
48. Борисов А.Б. // ТМФ, 2001. Т. 128. С. 226.
49. Веселов А.П., Шабат А.Б. // Функц. анализ и его прилож., 1993. Т. 27, № 2. С. 1.
50. Шабат А.Б. // ТМФ, 1999. Т. 1. С. 165.

51. Айзерман М.А. Лекции по классической механике. М.: Наука, 1974. 367 с.
52. Араго Ф. Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Т. 1. Ижевск: Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 495 с.
53. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 239 с.
54. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: ГИТТЛ, 1958. 624 с.
55. Беленький И.М. Введение в аналитическую механику. М.: Высш. шк., 1964. 319 с.
56. Белл Э.Т. Предшественники современной математики. М.: Просвещение, 1979. 254 с.
57. Белый Ю.А. Тихо Браге. М.: Наука, 1982. 229 с.
58. Белый Ю.А. Иоганн Кеплер. М.: Наука, 1971. 295 с.
59. Бухгольц Н.Н. Основы теоретической механики. В 2 ч. Ч. 1. М.: Наука, 1972. 460 с.
60. Бухгольц Н.Н. Основы теоретической механики. В 2 ч. Ч. 2. М.: Наука, 1972. 328 с.
61. Борисов А.В., Мамаев И.С. Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд. дом «Удмурдский университет», 1999. 460 с.
62. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск: Науч.-изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
63. Виленкин Н.Я., Лишевский В.П. Софья Васильевна Ковалевская: К 125-летию со дня рождения // Квант, 1975. № 3. С. 3–11.
64. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1966. 296 с.
65. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Л.И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // УФН, 1979. Т. 128, № 4. С. 579–624.
66. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963. 639 с.
67. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. Изд. 3-е. М.: МЦНМО, 2001. 443 с.
68. Голованов Я.К. Этюды об ученых. М.: Мол. гвардия, 1976. 416 с.
69. Горелик Г.С. Колебания и волны. М.: ГИТТЛ, 1950. 551 с.
70. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 759 с.
71. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988. 366 с.
72. Зоммерфельд А. Механика: Пер. с нем. М.: Иностран. лит., 1947. 369 с.
73. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. М.: Наука, 1969. 238 с.
74. Кудрявцев П.С. История физики. Т. 1. М.: Учпедгиз, 1956. 559 с.
75. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики: Пер. с итал. Т. II. М.: Иностран. лит., 1951. 435 с.
76. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
77. Невзглядов В.Г. Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1959. 584 с.
78. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. 447 с.

79. *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. М.: Физматлит, 2002. 391 с.
80. *Парс Л.А.* Аналитическая механика. М.: Наука, 1971. 636 с.
81. *Савельев И.В.* Основы теоретической физики. В 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. Изд. 2-е, испр. М.: Наука, 1991. 496 с.
82. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 438 с.
83. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1946. 654 с.
84. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995. 460 с.
85. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «РХД», 1999. 596 с.
86. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 447 с.
87. *Штрайх С., Ковалевская С.* М.: Журнально-газетное объединение, 1935. 236 с.
88. *Хаар Д.* Основы гамильтоновой механики. М.: Наука, 1974. 222 с.
89. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. М.: Физматгиз, 1963. 772 с.
90. *Цыганов А.В.* Интегрируемые системы в методе разделения переменных. Ижевск: НИЦ «РХД», 2005. 384 с.
91. *Эроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1986. 243 с.
92. The Penleve property. One century later / Ed. R. Conte; CRM Series in mathematical physics. N. Y.: Springer-Verlag, 1999. 810 p.
93. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformations and Solitons: Springer Series in Nonlinear Dynamics. N. Y.: Springer-Verlag, 1991. 217 p.
94. *Данилов Ю.А., Смородинский Я.А.* Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии» // Усп. физ. наук, 1973. Т. 109, вып. 1. С. 175–209.
95. *Берри А.* Краткая история астрономии. Изд. 2-е. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 363 с.
96. *Хокинг С.* Краткая история времени: от Большого взрыва до черных дыр. СПб.: Амфора, 2008. 230 с.
97. *Коперник Н.* О вращениях небесных сфер. Малый комментарий. Послание против Вернера. Упсальская запись / Пер. И.Н. Веселовского. М.: Наука, 1964. 646 с.
98. *Данилов Ю.А.* Прекрасный мир науки: Сб. / Сост. А.Г. Щадтина; Под общ. ред. В.И. Санюка, Д.И. Трубецкого. М.: Прогресс-Традиция, 2008. 384 с.
99. *Christianson J.R.* On Tycho's Island: Tycho Brahe and His Assistants, 1570–1601. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
100. *Гинзбург В.Л.* К трехсотлетию «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона // УФН, 1987. Т. 151, вып. 1. С. 119–141.
101. *Эйнштейн А.* Иоганн Кеплер // Собрание научных трудов. В 4 т. / Под ред. И.Е. Тамма, Я.А. Смородинского, В.Г. Кузнецова. М.: Наука, 1965–1967 гг. Т. IV. 630 с.
102. *Эйнштейн А.* К 200-летию со дня смерти Исаака Ньютона // Собрание научных трудов. В 4 т. М., 2009. Т. 4. С. 89.
103. *Тихо Браге.* Автобиография / Пер. Ю.А. Данилова // Историко-астрономические исследования. М.: Наука, 1984. Вып. 17. С. 377–396.

104. *Вавилов С.И.* Исаак Ньютон (Научная биография и статьи). М.: АН СССР, 1961. 294 с.
105. *Галилей Г.* Диалог о двух главнейших системах мира – птолемеевой и коперниковой / Пер. А.И. Долгова. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
106. *Самин Д.К.* 100 великих ученых. М.: Вече, 2009. 32 с.
107. *Кузнецов Б.Г.* Галилео Галилей. М.: Наука, 1964. 325 с.
108. *Губарев В.* Вперед... к Средневековью? // Деловой вестник, 2009. № 49(729).
109. Замечательные ученые / Под ред. С.П. Капицы. М.: Наука, 192 с.
110. *Халамайзер А.Я.* Софья Ковалевская. М., 1989. 112 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие автора	5
Глава 1. Ньютонова механика	9
1.1. Краткий очерк развития механики с древних времен до второго периода античной физики	9
1.2. От периода математической физики в Античности до Леонардо да Винчи	18
1.3. От Николая Коперника до И. Кеплера	33
1.4. От И. Кеплера и Г. Галилея до И. Ньютона	45
1.5. Ньютонова система мира	64
Глава 2. Лагранжева механика	76
2.1. Голономные и неголономные связи	77
2.2. Классификация сил, действующих на тело. Виртуальные перемещения. Идеальные связи	80
2.3. Принцип виртуальных перемещений	84
2.4. Принцип Д'Аламбера. Общее уравнение динамики	87
2.5. Уравнения Лагранжа первого рода	89
2.6. Уравнения Лагранжа второго рода	92
2.7. Вариационное исчисление	98
2.7.1. Подход Эйлера	100
2.7.2. Подход Лагранжа	102
2.8. Построение уравнений механики из принципа наименьшего действия	108
2.9. Законы сохранения	114
2.9.1. Закон сохранения энергии	116
2.9.2. Закон сохранения импульса	118
2.9.3. Центр инерции и уравнения его движения	120
2.9.4. Закон сохранения момента импульса	121
2.9.5. Уравнение движения момента импульса незамкнутой системы	124
2.10. Теорема Нётер	126
Глава 3. Линейные колебания	132
3.1. Свободные колебания системы с одной степенью свободы	132
3.1.1. Гармонические колебания	132
3.1.2. Фазовая плоскость	136
3.2. Затухающие свободные колебания	137
3.2.1. Комплексификация линейных дифференциальных уравнений	138
3.2.2. Логарифмический декремент затухания	140

3.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы ..	143
3.4. Свободные колебания систем со многими степенями свободы ..	150
3.4.1. Колебания системы с двумя степенями свободы	150
3.4.2. Малые колебания системы из N материальных точек ...	153
Глава 4. Нелинейные колебания	161
4.1. Нелинейные колебания консервативных систем с одной степенью свободы	164
4.2. Колебания математического маятника. Эллиптические функции ..	173
4.3. Малоамплитудные колебания консервативной системы с одной степенью свободы	179
4.3.1. Прямое разложение	180
4.3.2. Метод многих масштабов	183
4.3.3. Метод усреднения. Подход Ван дер Поля	188
4.3.4. Обобщенный метод усреднения. Подход Крылова и Боголюбова	191
4.4. Вынужденные колебания ангармонического осциллятора	194
4.4.1. Прямое разложение	196
4.4.2. Вторичный резонанс $\omega \approx \pm 3$	197
4.4.3. Первичный резонанс. Амплитудно-частотная характеристика	200
4.5. Автоколебания. Предельные циклы	207
4.5.1. Аналитическое решение уравнения Ван дер Поля при малых значениях параметра нелинейности	210
4.5.2. Приближенное решение уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра нелинейности	213
4.5.3. Доказательство существования единственного устойчивого предельного цикла для уравнения Ван дер Поля	217
4.6. Параметрический резонанс	222
4.6.1. Теория Флоке	223
4.6.2. Аналитическое решение уравнения Матье при малых значениях параметра нелинейности	228
Глава 5. Движение в центральном поле	234
5.1. Задача двух тел	234
5.2. Задача Кеплера	235
Глава 6. Гамильтонова механика	246
6.1. Уравнения Гамильтона	246
6.2. Уравнение Гамильтона–Якоби	254
6.3. Теорема Якоби	259
6.4. Скобки Пуассона	262
6.5. Теорема Пуассона	267
6.6. Канонические преобразования	269
6.7. Инфинитезимальные канонические преобразования. Движение как бесконечная совокупность канонических преобразований ..	278

6.8. Изменение функции при бесконечно малых канонических преобразованиях. Скрытые интегралы движения	281
6.9. Интегральные инварианты Пуанкаре. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объема	282
6.10. Теорема Лиувилля	286
Глава 7. Интегрируемые системы	290
7.1. Уравнения движения твердого тела	290
7.1.1. Углы Эйлера	293
7.1.2. Кинематические уравнения Эйлера	297
7.1.3. Моменты инерции твердого тела	298
7.1.4. Динамические уравнения Эйлера	303
7.1.5. Алгоритм С.В. Ковалевской для интегрирования уравнений движения твердого тела с закрепленной точкой	305
7.2. Свойство Пенлеве дифференциальных уравнений	321
7.2.1. Краткий обзор аналитической теории дифференциальных уравнений	321
7.2.2. Современный алгоритм анализа интегрируемых систем ..	325
7.2.3. Интегрируемость обобщенной модели Хенона–Хейлеса ..	332
7.2.4. Построение частных решений нелинейной модели методом линеаризации	337
7.3. Динамика частиц в решетке Тоды. Интегрирование методом обратной задачи рассеяния	340
7.3.1. Представление Лакса	345
7.3.2. Прямая задача рассеяния	350
7.3.3. Метод обратной задачи рассеяния	361
7.3.4. <i>N</i> -солитонные решения	366
7.3.5. Обратная задача рассеяния и задача Римана	376
7.3.6. Солитоны – элементарные возбуждения нелинейных интегрируемых систем	382
7.3.7. Преобразование Дарбу и Бэклунда	386
7.3.8. «Размножение интегрируемых уравнений», модифицированные решетки Тоды	391
Список литературы	401

Научное издание

Александр Борисович Борисов

НАЧАЛА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Рекомендовано к изданию ученым советом
Института физики металлов и НИСО УрО РАН

Редактор **М.О. Тюлюкова**
Технический редактор **Е.М. Бородулина**
Корректор **Г.Н. Старкова**
Компьютерная верстка **Г.П. Чащиной**
Дизайн **Ю.В. Устиновой**

ISBN 978-5-7691-2145-6



9 785769 121456

НИСО УрО РАН № 24(10)–22. Сдано в набор 16.06.10. Подписано в печать 05.10.10. Формат 60×84 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,5. Уч.-изд. л. 27. Тираж 200. Заказ 207.

Оригинал-макет изготовлен в РИО УрО РАН.
620219, Екатеринбург, ГСП-169, ул. Первомайская, 91.

Отпечатано в типографии
«Уральский центр академического обслуживания».
620219, Екатеринбург, ул. Первомайская, 91.